



4점공략법

기출문제모음집 공통편

CON TENTS

지로함

4점공략법

[출처]

2024년 교육청 고3공통 5월 공통범위 19 [3.00점]

1. 집합 $U = \{x \mid -5 \leq x \leq 5, x \text{는 정수}\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 X 에 대하여 두 집합 A, B 를

$$A = \{a \mid a \text{는 } x \text{의 실수인 네제곱근, } x \in X\},$$

$$B = \{b \mid b \text{는 } x \text{의 실수인 세제곱근, } x \in X\}$$

라 하자. $n(A) = 9, n(B) = 7$ 이 되도록 하는 집합 X 의 모든 원소의 합의 최댓값을 구하시오.

[출처]

2022년 교육청 고3공통 7월 공통범위 19 [3.00점]

2. $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $2n^2 - 9n$ 의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$ 의 값을 구하시오.

4점공략법

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 11 [4.00점]

3. 함수 $f(x) = -(x-2)^2 + k$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수가 2일 때, 상수 k 의 값은?

$\sqrt{3}^{f(n)}$ 의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9 이다.

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

[출처] 2023년 교육청 고3공통 7월 공통범위 9 [4.00점]

4. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0$$

의 모든 실근의 곱이 -4 일 때, n 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4
 ④ 5 ⑤ 6

4점공략법

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 9 [4.00점]

5. 수직선 위의 두 점 $P(\log_5 3)$, $Q(\log_5 12)$ 에 대하여 선분 PQ 를 $m : (1-m)$ 으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m 의 값은? (단, m 은 $0 < m < 1$ 인 상수이다.)

- ① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

[출처] 2024년 교육청 고3공통 7월 공통범위 9 [4.00점]

6. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(0, -\log_2 9)$, $B(2a, \log_2 7)$, $C(-\log_2 9, a)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 $(b, \log_8 7)$ 일 때, 2^{a+3b} 의 값은?

- ① 63 ② 72 ③ 81
④ 90 ⑤ 99

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 14 [4.00점]

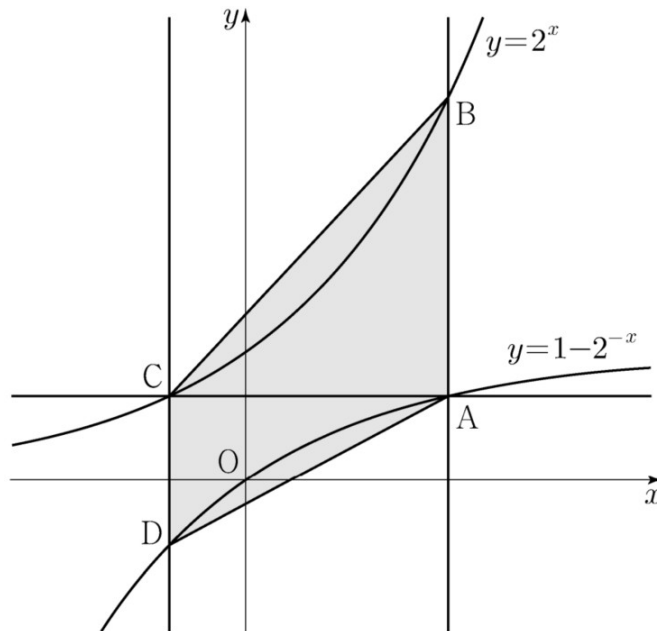
7. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은?

$\log_2 \sqrt{-n^2 + 10n + 75} - \log_4(75 - kn)$ 의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수가 12이다.

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 12 [4.00점]

8. 그림과 같이 곡선 $y = 1 - 2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = 2^x$ 과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = 2^x$ 과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = 1 - 2^{-x}$ 과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ 일 때, 사각형 ABCD의 넓이는?

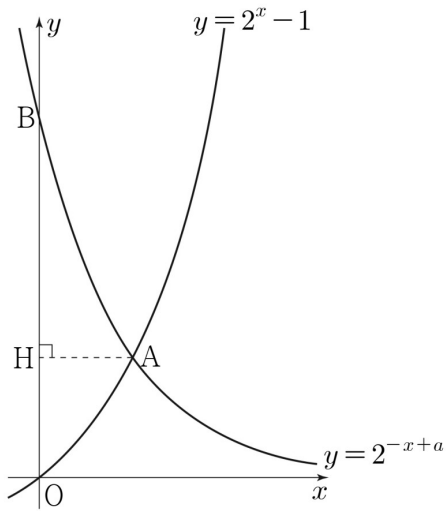


- ① $\frac{5}{2}\log_2 3 - \frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3 - \frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}\log_2 3 - \frac{7}{4}$
 ④ $4\log_2 3 - 2$ ⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3 - \frac{9}{4}$

[출처]

2022년 교육청 고3공통 4월 공통범위 9 [4.00점]

9. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^{-x+a}$, $y=2^x-1$ 이 만나는 점을 A, 곡선 $y=2^{-x+a}$ 이 y 축과 만나는 점을 B라 하자.
점 A에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 할 때,
 $\overline{OB}=3\times\overline{OH}$ 이다. 상수 a 의 값은? (단, O는 원점이다.)



- ① 2 ② $\log_2 5$ ③ $\log_2 6$
④ $\log_2 7$ ⑤ 3

[출처]

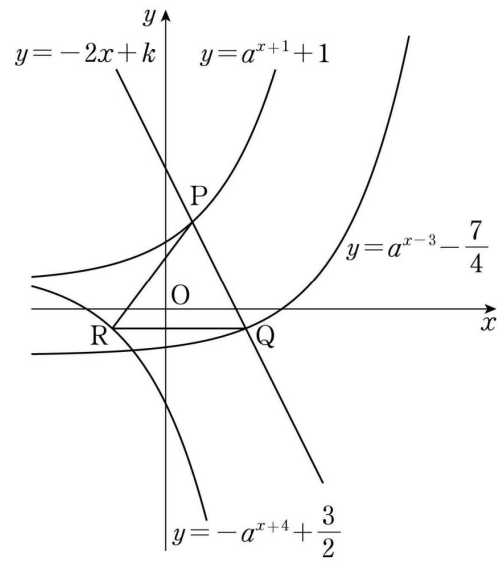
2023년 교육청 고3공통 10월 공통범위 13 [4.00점]

10. 그림과 같이 두 상수 a ($a > 1$), k 에 대하여 두 함수

$$y=a^{x+1}+1, y=a^{x-3}-\frac{7}{4}$$

의 그래프와 직선 $y=-2x+k$ 가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 Q를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수

$y=-a^{x+4}+\frac{3}{2}$ 의 그래프와 점 R에서 만나고 $\overline{PR}=\overline{QR}=5$ 일 때, $a+k$ 의 값은?

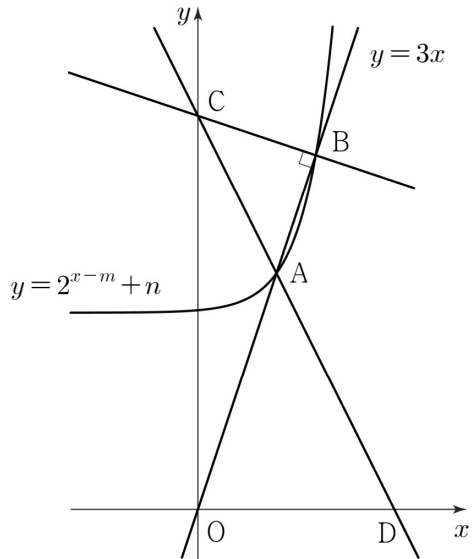


- ① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7
④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

[출처]

2023년 교육청 고3공통 7월 공통범위 21 [4.00점]

11. 그림과 같이 곡선 $y = 2^{x-m} + n$ ($m > 0, n > 0$)과 직선 $y = 3x$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 점 B를 지나며 직선 $y = 3x$ 에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 C라 하자. 직선 CA가 x 축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 선분 CA를 5:3으로 외분하는 점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 20일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작다.)



[출처]

2025년(2026학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 22 [4.00점]

12. $k > 1$ 인 실수 k 에 대하여 두 곡선

$$y = 2^x + \frac{k}{2}, y = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2$$

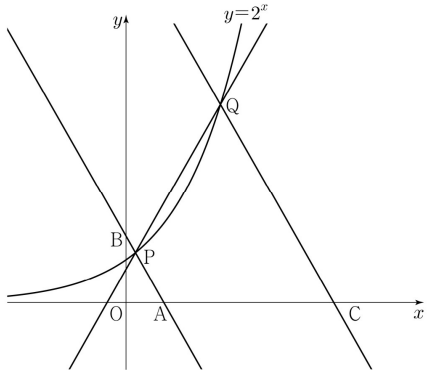
가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y = 2^{x-2} - 3$ 과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k + \log_2 k = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 0는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 21 [4.00점]

13. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $P(a, 2^a)$, $Q(b, 2^b)$ 이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m 이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$ 인 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$ 인 직선이 x 축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{AB}=4\overline{PB}, \quad \overline{CQ}=3\overline{AB}$$

일 때, $90 \times (a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < a < b$)

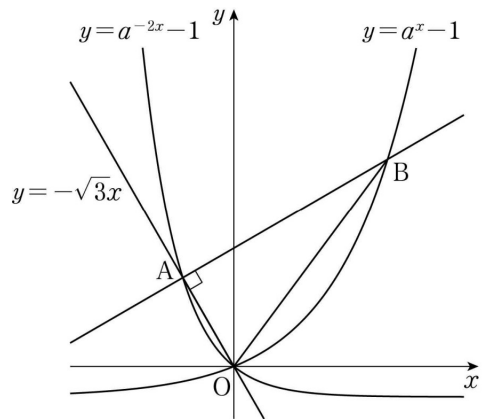


[출처] 2022년 교육청 고3공통 10월 공통범위 21 [4.00점]

14. 그림과 같이 $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 두 곡선

$$y=a^{-2x}-1, \quad y=a^x-1$$

이 있다. 곡선 $y=a^{-2x}-1$ 과 직선 $y=-\sqrt{3}x$ 가 서로 다른 두 점 O, A에서 만난다. 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 직선이 곡선 $y=a^x-1$ 과 제 1사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\overline{OA}:\overline{OB}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$ 일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



4점공략법

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 20 [4.00점]

[출처] 2025년 인피니트 수학연구소 백미 기출+변형 수학1 Part1 기출 -

15. 곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 과 직선 $y = x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 k 라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$x > k \text{인 모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} \text{ 이고}$$

$$f(f(x)) = 3x \text{ 이다.}$$

$f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 14 [4.00점]

16. 두 자연수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+a} + b & (x \leq -8) \\ -3^{x-3} + 8 & (x > -8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은?

집합 $\{f(x) | x \leq k\}$ 의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위는 $3 \leq k < 4$ 이다.

- ① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

[출처]

2024년 교육청 고3공통 5월 공통범위 13 [4.00점]

17. 두 상수 a, b ($b > 0$)에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+3} + b & (x \leq a) \\ 2^{-x+5} + 3b & (x > a) \end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 k 의 최댓값이 $4b+8$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $k > b$)

$b < t < k$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 1이다.

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

[출처]

2025년 교육청 고3공통 7월 공통범위 20 [4.00점]

18. 두 실수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = -2^{-x+a} + b$ 가 있다.

집합 $\{x \mid x \neq 4, x \text{는 실수}\}$ 에서 정의된 함수

$$g(x) = f(x) + 2^x + \frac{|x-4|}{x-4} \{f(x) - 2^x\}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $g(6)$ 의 값을 구하시오.

모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수는 0 또는 2이다.

[출처]

2022년 교육청 고3공통 10월 공통범위 10 [4.00점]

19. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 두 곡선

$$y = -\log_2(-x), \quad y = \log_2(x+2a)$$

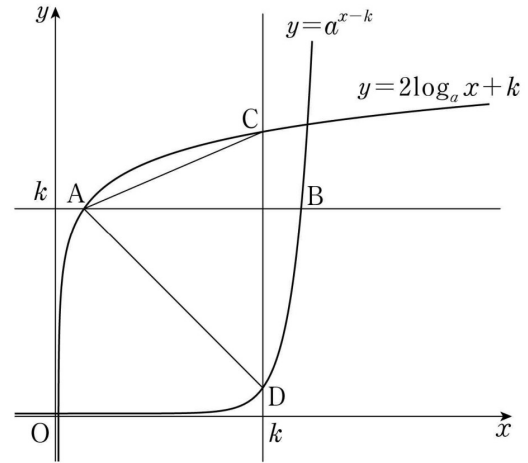
가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있을 때, 선분 AB의 길이는?

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2
④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처]

2023년 교육청 고3공통 3월 공통범위 21 [4.00점]

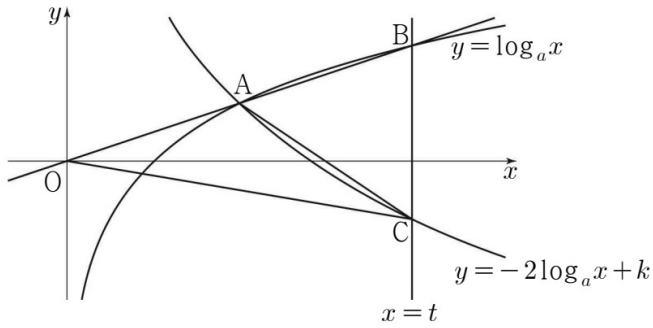
20. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k 에 대하여 직선 $y=k$ 가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$ 가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$ 과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB} \times \overline{CD} = 85$ 이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$ 의 값을 구하시오.



[출처]

2025년 교육청 고3공통 5월 공통범위 12 [4.00점]

21. 그림과 같이 세 상수 a ($a > 1$), k , t 에 대하여 두 곡선 $y = \log_a x$, $y = -2\log_a x + k$ 가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x = t$ 가 두 곡선 $y = \log_a x$, $y = -2\log_a x + k$ 와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 직선 AB가 원점 O를 지나고 두 삼각형 OCA, ACB의 넓이가 2로 같을 때, $a \times k \times t$ 의 값은? (단, $k > 0$ 이고, t 는 점 A의 x 좌표보다 크다.)

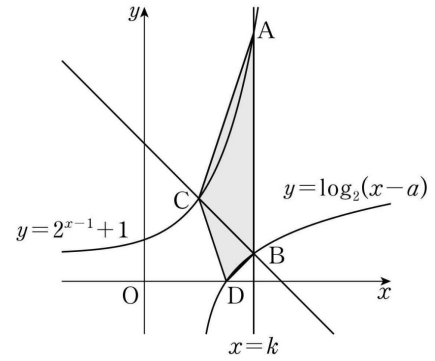


- ① $8\sqrt{2}$ ② 16 ③ $16\sqrt{2}$
 ④ 24 ⑤ $24\sqrt{2}$

[출처]

2022년 교육청 고3공통 3월 공통범위 11 [4.00점]

22. 그림과 같이 두 상수 a , k 에 대하여 직선 $x = k$ 가 두 곡선 $y = 2^{x-1} + 1$, $y = \log_2(x - a)$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y = 2^{x-1} + 1$ 과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ 일 때, 곡선 $y = \log_2(x - a)$ 가 x 축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0 < a < k$)



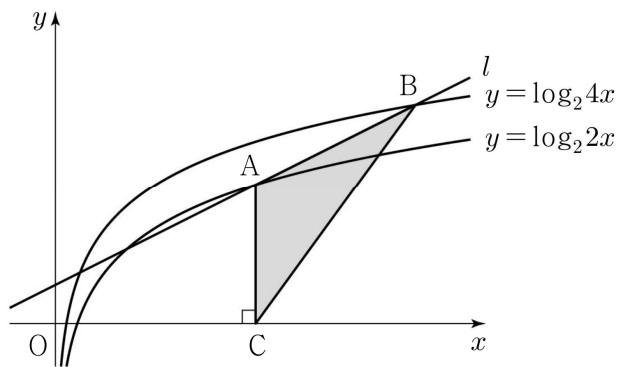
- ① 14 ② 13 ③ 12
 ④ 11 ⑤ 10

[출처]

2022년 교육청 고3공통 7월 공통범위 11 [4.00점]

23. 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선 l 이 곡선 $y = \log_2 2x$ 와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 A라 하고, 직선 l 이 곡선 $y = \log_2 4x$ 와 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 B라 하자. $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 일 때, 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발 C에 대하여 삼각형 ACB의 넓이는?

- ① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$
 ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6



[출처]

2025년 교육청 고3공통 3월 공통범위 15 [4.00점]

24. 세 실수 a, p, q ($p < q$)에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} |2^x - 4| & (x \leq p \text{ 또는 } x \geq q) \\ a + \log_2 x & (p < x < q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\frac{p+q}{2}\right)$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
 ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[출처]

2024년 교육청 고3공통 3월 공통범위 21 [4.00점]

25. $a > 2$ 인 실수 a 에 대하여 기울기가 -1 인 직선이 두 곡선

$$y = a^x + 2, y = \log_a x + 2$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로

하는 원의 중심의 y 좌표가 $\frac{19}{2}$ 이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$ 일 때, a^2 의

값을 구하시오.

[출처]

2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 14 [4.00점]

26. 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = 2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 A_nB_n 의 기울기는 3이다.

(나) $\overline{A_nB_n} = n \times \sqrt{10}$

중심이 직선 $y = x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n 을 지나는 원이

곡선 $y = \log_2 x$ 와 만나는 두 점의 x 좌표 중 큰 값을 x_n 이라

하자. $x_1 + x_2 + x_3$ 의 값은?

① $\frac{150}{7}$

② $\frac{155}{7}$

③ $\frac{160}{7}$

④ $\frac{165}{7}$

⑤ $\frac{170}{7}$

[출처] 2023년 교육청 고3공통 4월(5/10시행) 공통범위 10 [4.00점]

27. 상수 a ($a > 1$)에 대하여 곡선 $y = a^x - 1$ 과 곡선 $y = \log_a(x+1)$ 이 원점 O 를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 O 가 아닌 점을 P 라 하고, 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 삼각형 OHP 의 넓이가 2일 때, a 의 값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

[출처] 2022년 교육청 고3공통 3월 공통범위 21 [4.00점]

28. 상수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 $A(a, b)$ 가 오직 하나 존재한다.

- (가) 점 A 는 곡선 $y = \log_2(x+2) + k$ 위의 점이다.
(나) 점 A 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y = 4^{x+k} + 2$ 위에 있다.

$a \times b$ 의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$)

[출처] 2027년(2028학년도) 평가원 고3공통 수능 예시 문항 30 [4.00점]

29. 두 실수 a, b 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{6}(x+a+b)} - a & (x \leq 0) \\ 6\log_3 x - b & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

- (가) $x \leq 0$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 두 점에서만 만난다.
- (나) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 만나는 모든 점의 x 좌표의 집합이 $\{0, a, b, c\}$ 이고, $|c| = 2|b|$ 이다.

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 21 [4.00점]

30. 양수 a 에 대하여 $x \geq -1$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$ 인 실수 t 에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a 의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 21 [4.00점]

31. 실수 t 에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$ 와 $y=2^{x-t}$ 이 만나는 점의 x 좌표를 $f(t)$ 라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C 의 값을 정할 때, $A+B+C$ 의 값을 구하시오. (단, $A+B+C \neq 0$)

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$ 이다.
 - 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$ 이다.
 - 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$ 이다.

- <보 기> ———

 - ㄱ. $f(1)=1$ 이고 $f(2)=2$ 이다.
 - ㄴ. 실수 t 의 값이 증가하면 $f(t)$ 의 값도 증가한다.
 - ㄷ. 모든 양의 실수 t 에 대하여 $f(t) \geq t$ 이다.

[출처] 2024년 교육청 고3공통 7월 공통범위 21 [4.00점]

32. $m \leq -10$ 인 상수 m 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=\begin{cases} |5\log_2(4-x)+m| & (x \leq 0) \\ 5\log_2 x+m & (x > 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t ($t > 0$)에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 모든 실근의 합을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(m)$ 의 값을 구하시오.

- $t \geq a$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $g(t)=g(a)$ 가 되도록 하는 양수 a 의 최솟값은 2이다.

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 21 [4.00점]

33. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} |3^{x+2} - n| & (x < 0) \\ |\log_2(x+4) - n| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2024년 교육청 고3공통 10월 공통범위 21 [4.00점]

34. 두 자연수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-3} + a & (x < 2) \\ |5\log_2 x - b| & (x \geq 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 최솟값을 구하시오.

(가) 함수 $g(t)$ 의 치역은 $\{0, 1, 2\}$ 이다.

(나) $g(t)=2$ 인 자연수 t 의 개수는 6이다.

CON TENTS

삼각함수

4점공략법

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 10 [4.00점]

35. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = a \cos bx + 3$ 이

$x = \frac{\pi}{3}$ 에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b 의

순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 최솟값은?

- ① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[출처] 2025년 교육청 고3공통 3월 공통범위 13 [4.00점]

36. 0이 아닌 실수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x & (x < 0) \\ 1 - \cos x & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 있다. 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하자. $M-m=4$ 를 만족시키는 모든 a 의 값의 곱은?

- ① -12 ② -10 ③ -8
④ -6 ⑤ -4

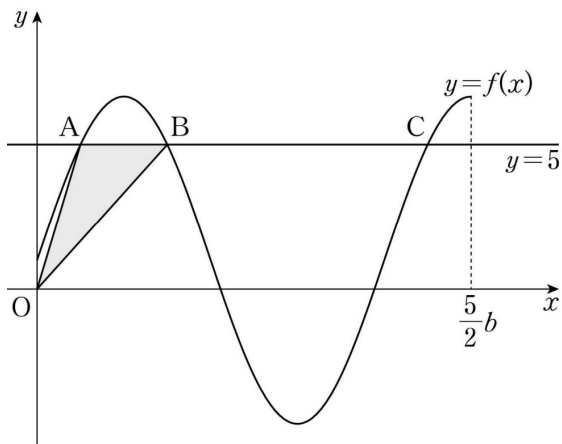
[출처]

2023년 교육청 고3공통 10월 공통범위 11 [4.00점]

37. 그림과 같이 두 상수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = a \sin \frac{\pi x}{b} + 1 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{5}{2}b\right)$$

의 그래프와 직선 $y=5$ 가 만나는 점을 x 좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C라 하자. $\overline{BC} = \overline{AB} + 6$ 이고 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 4$, $b > 0$ 이고, O는 원점이다.)



- ① 68 ② 70 ③ 72
④ 74 ⑤ 76

[출처]

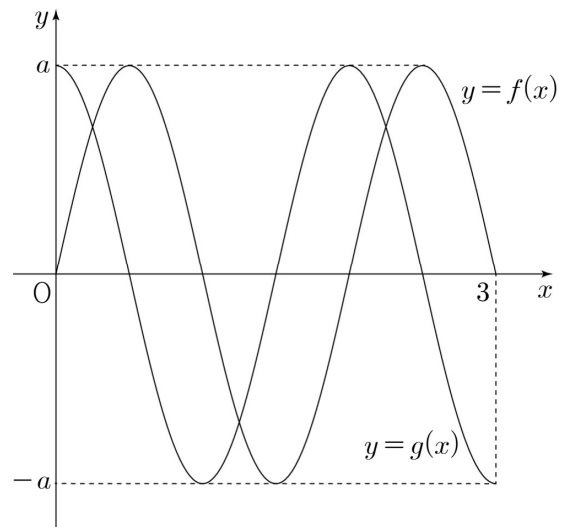
2024년 교육청 고3공통 7월 공통범위 19 [3.00점]

[출처] 2025년 인피니트 수학연구소 백미 기출+변형 수학1 Part2 기출 -

38. 양수 a 에 대하여 $0 \leq x \leq 3$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = a \sin \pi x, \quad g(x) = a \cos \pi x$$

가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 만나는 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 2일 때, a^2 의 값을 구하시오.



[출처]

2025년 교육청 고3공통 5월 공통범위 20 [4.00점]

39. 양수 t 에 대하여 닫힌구간 $\left[0, \frac{2}{t}\right]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \sqrt{3} \sin(t\pi x), g(x) = -3 \cos(t\pi x)$$

가 있다. $0 < k < \frac{2}{t}$ 인 상수 k 에 대하여 $f(k) = g(k) = 3k$ 일 때, $60(t+k)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2024년 교육청 고3공통 10월 공통범위 19 [3.00점]

40. 두 상수 a, b ($a > 0$)에 대하여 함수

$f(x) = |\sin a\pi x + b|$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $60(a+b)$ 의 값을 구하시오.

(가) $f(x) = 0$ 이고 $|x| \leq \frac{1}{a}$ 인 모든 실수 x 의 값의 합은

$$\frac{1}{2}$$
이다.

(나) $f(x) = \frac{2}{5}$ 이고 $|x| \leq \frac{1}{a}$ 인 모든 실수 x 의 값의 합은

$$\frac{3}{4}$$
이다.

[출처]

2023년 교육청 고3공통 3월 공통범위 13 [4.00점]

41. 두 함수

$$f(x)=x^2+ax+b, g(x)=\sin x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?

(단, a, b 는 상수이고, $0 \leq a \leq 2$ 이다.)

$$(가) \{g(a\pi)\}^2 = 1$$

(나) $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $f(g(x))=0$ 의 모든 해의
합은 $\frac{5}{2}\pi$ 이다.

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[출처]

2024년 교육청 고3공통 3월 공통범위 20 [4.00점]

42. 두 함수 $f(x)=2x^2+2x-1$, $g(x)=\cos \frac{\pi}{3}x$ 에 대하여

$0 \leq x < 12$ 에서 방정식

$$f(g(x))=g(x)$$

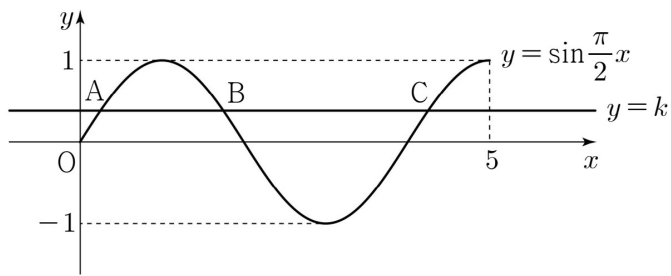
를 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합을 구하시오.

[출처]

2022년 교육청 고3공통 7월 공통범위 10 [4.00점]

43. 곡선 $y = \sin \frac{\pi}{2}x (0 \leq x \leq 5)$ 가 직선 $y = k (0 < k < 1)$ 과 만나는 서로 다른 세 점을 y 축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x 좌표의 합이 $\frac{25}{4}$ 일 때, 선분 AB의 길이는?

- ① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$
 ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



[출처]

2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 9 [4.00점]

44. 닫힌구간 $[0, 12]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \cos \frac{\pi x}{6}, \quad g(x) = -3 \cos \frac{\pi x}{6} - 1$$

이 있다. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 α_1, α_2 라 할 때, $|\alpha_1 - \alpha_2| = 8$ 이다. 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 β_1, β_2 라 할 때, $|\beta_1 - \beta_2|$ 의 값은? (단, k 는 $-1 < k < 1$ 인 상수이다.)

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[출처]

2022년 교육청 고3공통 10월 공통범위 12 [4.00점]

45. 양수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = \left| 4\sin\left(ax - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \right| \left(0 \leq x < \frac{4\pi}{a} \right)$$

의 그래프가 직선 $y=2$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 n 이다. 이 n 개의 점의 x 좌표의 합이 39일 때, $n \times a$ 의 값은?

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$
- ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

[출처]

2025년 교육청 고3공통 7월 공통범위 10 [4.00점]

46. 다음과 같이 $0 \leq x < 2$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 있다.

$n-1 \leq x < n$ 일 때, $f(x) = 3^n \sin \pi x + 4$ 이다. (단, $n = 1, 2$)

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 중 y 좌표가 자연수인 점의 개수는?

- ① 7 ② 10 ③ 13
- ④ 16 ⑤ 19

[출처]

2023년 교육청 고3공통 7월 공통범위 10 [4.00점]

47. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 곡선 $y = |4\sin 3x + 2|$ 와 직선 $y = 2$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수는?

- ① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

[출처]

2022년 교육청 고3공통 4월 공통범위 11 [4.00점]

48. 자연수 k 에 대하여 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$ 의 서로 다른 실근의 개수가 8이다. $0 \leq x < 2\pi$ 일

때, x 에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$ 의 모든 해의 합은?

- ① 5π ② 6π ③ 7π
④ 8π ⑤ 9π

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 19 [3.00점]

49. 두 자연수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이다.

(나) $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

[출처] 2027년(2028학년도) 평가원 고3공통 수능 예시 문항 16 [4.00점]

50. 두 자연수 a, b 에 대하여 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수

$$f(x)=|2\sin ax+b|$$

가 있다. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 개수가 10이 되도록 하는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

- ① 14

② 15

③ 16

④ 17

⑤ 18

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 20 [4.00점]

51. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \leq x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x - 1 & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. $0 \leq t \leq 2\pi$ 인 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = f(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t 의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 20 [4.00점]

52. 5 이하의 두 자연수 a, b 에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 함수 $y = a\sin x + b$ 의 그래프가 직선 $x = \pi$ 와 만나는 점의 집합을 A 라 하고, 두 직선 $y = 1, y = 3$ 과 만나는 점의 집합을 각각 B, C 라 하자. $n(A \cup B \cup C) = 3$ 이 되도록 하는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 9 [4.00점]

53. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 부등식

$$\cos x \leq \sin \frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x 의 값의 범위는 $\alpha \leq x \leq \beta$ 이다.
 $\beta - \alpha$ 의 값은?

- ① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$
- ④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 19 [3.00점]

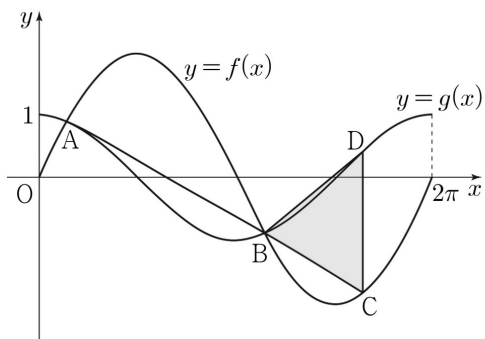
54. 함수 $f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x$ 라 할 때, $0 < x < 16$ 에서 부등식

$$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2023년 교육청 고3공통 4월(5/10시행) 공통범위 13 [4.00점]

55. 다음 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 3:1로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$ 와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k 는 양수이고, 점 B의 x 좌표는 점 A의 x 좌표보다 크다.)



- ① $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$ ② $\frac{9\sqrt{5}}{40}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$
 ④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

[출처] 2023년 교육청 고3공통 4월(5/10시행) 공통범위 11 [4.00점]

56. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α 라 할 때, $k \times \alpha$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.)

- ① $\frac{7}{2}\pi$ ② 4π ③ $\frac{9}{2}\pi$
 ④ 5π ⑤ $\frac{11}{2}\pi$

CON TENTS

삼할

[출처]

2024년 교육청 고3공통 10월 공통범위 13 [4.00점]

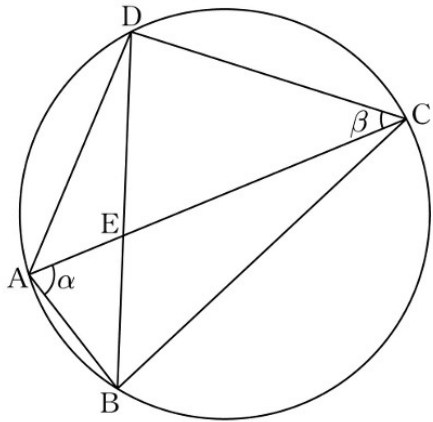
57. 그림과 같이 한 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=4, \overline{BC}=2\sqrt{30}, \overline{CD}=8$$

이다. $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$ 라 할 때,

$\cos(\alpha + \beta) = -\frac{5}{12}$ 이다. 두 선분 AC와 BD의 교점을 E라

할 때, 선분 AE의 길이는? (단, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$)



- ① $\sqrt{6}$ ② $\frac{\sqrt{26}}{2}$ ③ $\sqrt{7}$
 ④ $\frac{\sqrt{30}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

[출처]

2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 10 [4.00점]

58. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의

넓이가 9π 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $3\sin A = 2\sin B$

(나) $\cos B = \cos C$

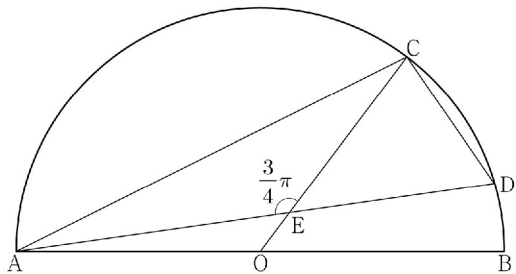
- ① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
 ④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 13 [4.00점]

59. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4, \overline{ED}=3\sqrt{2}, \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC} \times \overline{CD}$ 의 값은?



- ① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
 ④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

[출처] 2023년 교육청 고3공통 4월(5/10시행) 공통범위 21 [4.00점]

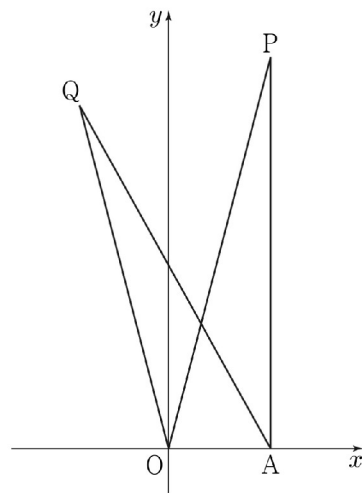
60. 좌표평면 위의 두 점 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$ 과 y 좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AP} = \overline{AQ} = 2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{OP} > \overline{OQ}$ 이다.

(나) $\cos(\angle OPA) = \cos(\angle OQA) = \frac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p \times q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



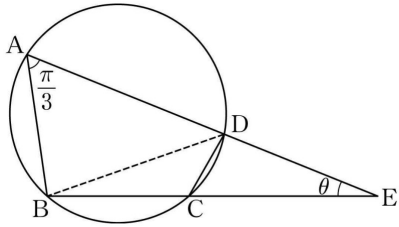
[출처]

2022년 교육청 고3공통 3월 공통범위 15 [4.00점]

61. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 2, \quad \overline{AD} = 3, \quad \angle BAD = \frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle AEB = \theta$ 일 때, $\sin \theta$ 의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{CD} = \boxed{\text{(가)}}$$

이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서

$$\angle AEB \text{는 공통, } \angle EAB = \angle ECD$$

이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.

이를 이용하면

$$\overline{ED} = \boxed{\text{(나)}}$$

이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$$\sin \theta = \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $(p+q) \times r$ 의 값은?

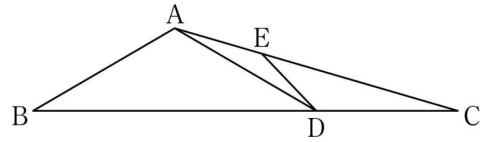
- ① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$
 ④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

[출처]

2022년 교육청 고3공통 10월 공통범위 13 [4.00점]

62. 그림과 같이 $\overline{AB} = 2, \overline{BC} = 3\sqrt{3}, \overline{CA} = \sqrt{13}$ 인 삼각형

ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B가 아닌 점 D를 $\overline{AD} = 2$ 가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 양 끝점 A, C가 아닌 점 E를 사각형 ABDE가 원에 내접하도록 잡는다.



다음은 선분 DE의 길이를 구하는 과정이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABC) = \boxed{\text{(가)}}$$

이다. 삼각형 ABD에서 $\sin(\angle ABD) = \sqrt{1 - (\boxed{\text{가}})^2}$

이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$$

이므로 $\sin(\angle CAD) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \times \sin(\angle ACD)$ 이다.

삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{DE} = \boxed{\text{(다)}}$$

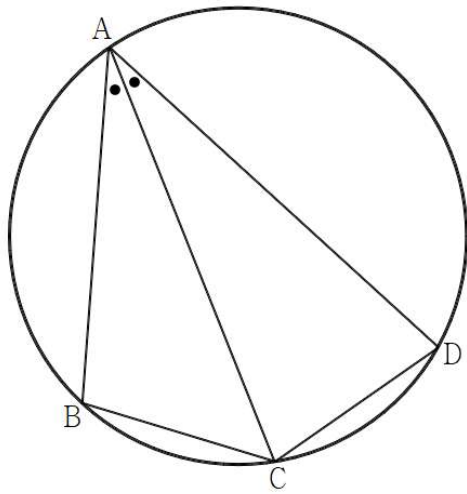
이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $p \times q \times r$ 의 값은?

- ① $\frac{6\sqrt{13}}{13}$ ② $\frac{7\sqrt{13}}{13}$ ③ $\frac{8\sqrt{13}}{13}$
 ④ $\frac{9\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{13}}{13}$

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 11 [4.00점]

63. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고
 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$
 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?



- ① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$
 ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

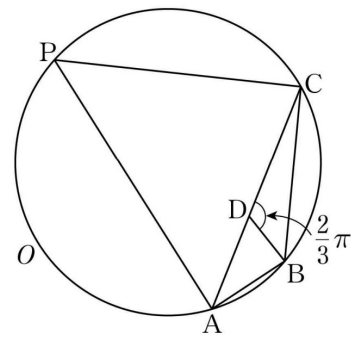
[출처]

2024년 교육청 고3공통 3월 공통범위 13 [4.00점]

64. 그림과 같이

$$2\overline{AB}=\overline{BC}, \cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O 라 하자. 원 O 위의 점 P 에
 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P 를
 Q라 할 때, $\overline{QA}=6\sqrt{10}$ 이다. 선분 AC 위의 점 D 에 대하여
 $\angle CDB=\frac{2}{3}\pi$ 일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의
 길이는?



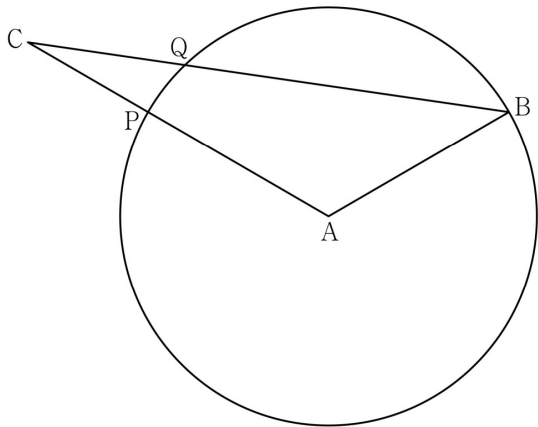
- ① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$
 ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

[출처] 2027년(2028학년도) 평가원 고3공통 수능 예시 문항 19 [4.00점]

65. $\cos A = -\frac{1}{2}$, $\sin B : \sin C = 5 : 3$ 인 삼각형 ABC에서

점 A를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원이 두 선분 AC, BC와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PB의 길이가 $3\sqrt{3}$ 일 때, 선분 PQ의 길이는? (단, 점 Q는 점 B가 아니다.)

- ① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{9}{14}$ ③ $\frac{5}{7}$
 ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{6}{7}$



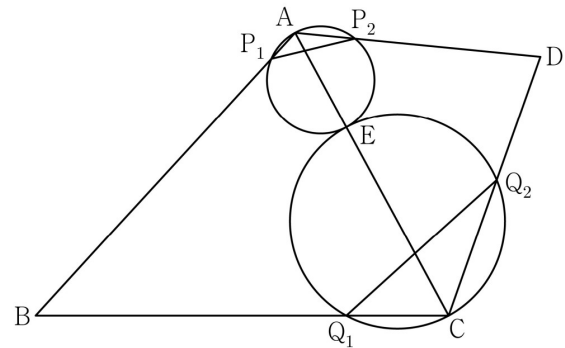
[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 13 [4.00점]

66. 그림과 같이

$$\overline{BC}=3, \overline{CD}=2, \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3}, \angle DAB > \frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2 라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2 라 하자.

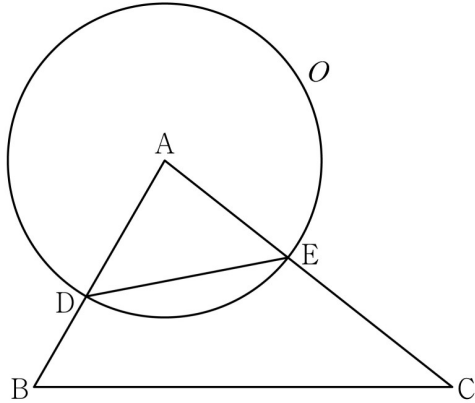
$\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2} = 3 : 5\sqrt{2}$ 이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB} + \overline{AD}$ 의 값은? (단, $\overline{AB} > \overline{AD}$)



- ① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$
 ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 14 [4.00점]

67. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB 위에 $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$ 인 점 D를 잡고, 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O , 원 O 와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자. $\sin A : \sin C = 8 : 5$ 이고, 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9 : 35$ 이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{AB} < \overline{AC}$)



- ① $18 + 15\sqrt{3}$ ② $24 + 20\sqrt{3}$ ③ $30 + 25\sqrt{3}$
 ④ $36 + 30\sqrt{3}$ ⑤ $42 + 35\sqrt{3}$

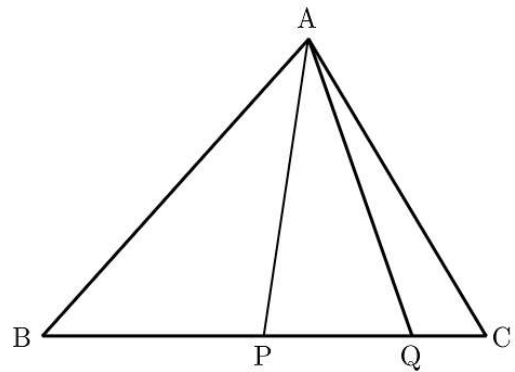
[출처] 2025년(2026학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 14 [4.00점]

68. $\overline{AB} = 2\sqrt{7}$ 인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P, 선분 BC를 $5 : 1$ 로 내분하는 점을 Q라 하자.

$$\overline{AQ} = 3\sqrt{2}, \sin(\angle QAP) : \sin(\angle APQ) = \sqrt{2} : 3$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는?

- ① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$
 ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



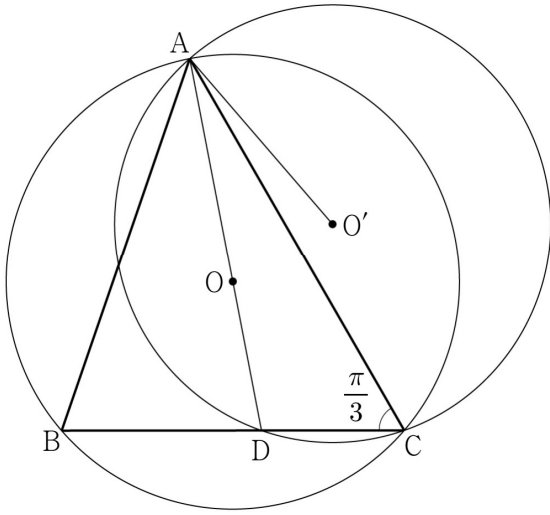
[출처]

2024년 교육청 고3공통 7월 공통범위 13 [4.00점]

69. 그림과 같이

$$\overline{BC} = \frac{36\sqrt{7}}{7}, \sin(\angle BAC) = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \angle ACB = \frac{\pi}{3}$$

인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 직선 AO가 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ADC의 외접원의 중심을 O'이라 할 때, $\overline{AO'} = 5\sqrt{3}$ 이다. $\overline{OO'}^2$ 의 값은? (단, $0 < \angle BAC < \frac{\pi}{2}$)



- ① 21 ② $\frac{91}{4}$ ③ $\frac{49}{2}$
 ④ $\frac{105}{4}$ ⑤ 28

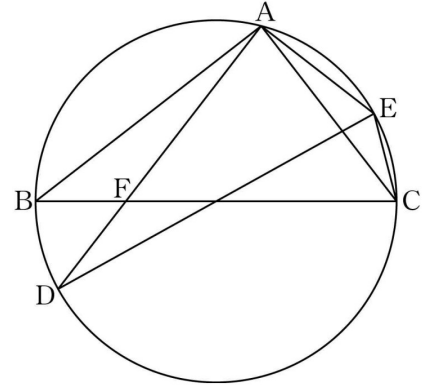
[출처]

2023년 교육청 고3공통 10월 공통범위 21 [4.00점]

70. 그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$$\overline{BC} = \overline{DE} = 4, \overline{BF} = \overline{CE}, \sin(\angle CAE) = \frac{1}{4}$$

이다. $\overline{AF} = k$ 일 때, k^2 의 값을 구하시오.

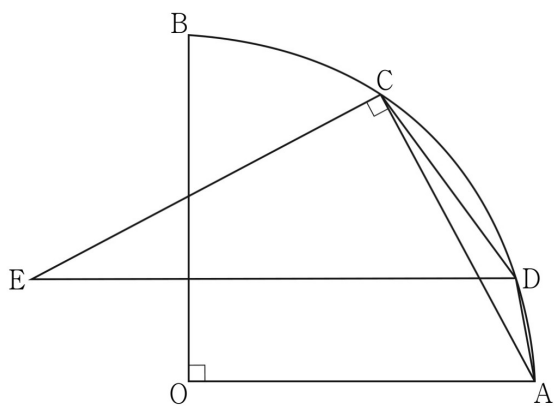


4점공략법

[출처]

2024년 교육청 고3공통 5월 공통범위 21 [4.00점]

71. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\overline{AC}=4\sqrt{2}$ 가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D에 대하여 점 D를 지나고 선분 OA에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 일 때, $\overline{AD}=p+q\sqrt{7}$ 을 만족시키는 두 유리수 p, q 에 대하여 $9 \times |p \times q|$ 의 값을 구하시오. (단, 점 D는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.)



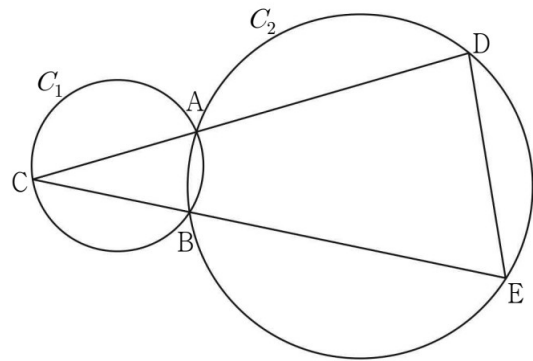
[출처]

2025년 교육청 고3공통 5월 공통범위 14 [4.00점]

72. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2 인 두 원 C_1, C_2 가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 원 C_1 위의 점 C와 원 C_2 위의 두 점 D, E에 대하여 세 점 C, A, D와 세 점 C, B, E가 각각 한 직선 위에 있다.

$$r_1 : r_2 = 1 : 2, \overline{AC}=3, \overline{AD}=5, \overline{DE}=4$$

일 때, 선분 CE의 길이는?



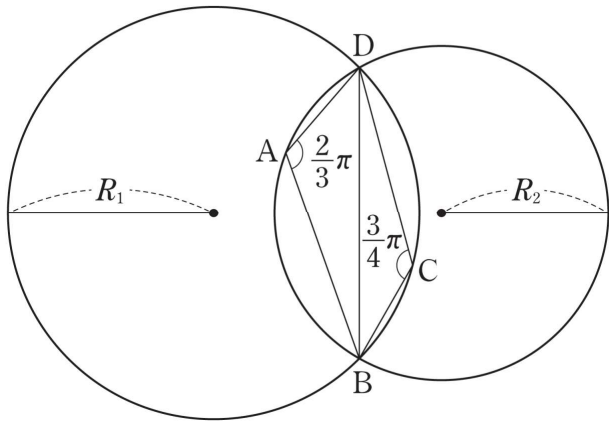
- ① $3\sqrt{7}$ ② $\sqrt{66}$ ③ $\sqrt{69}$
 ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 20 [4.00점]

73. 그림과 같이

$$\overline{AB}=2, \overline{AD}=1, \angle DAB=\frac{2}{3}\pi, \angle BCD=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1 , 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2 라 하자.



다음은 $R_1 \times R_2$ 의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{BD}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$R_2 = \boxed{(\text{가})} \times \overline{BD}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 1^2 - (\boxed{(\text{나})})$$

이므로

$$R_1 \times R_2 = \boxed{(\text{다})}$$

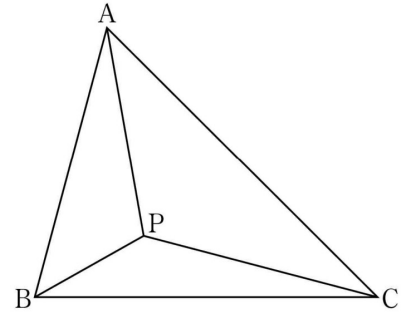
이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 이라 할 때, $9 \times (p \times q \times r)^2$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2023년 교육청 고3공통 3월 공통범위 11 [4.00점]

74. 그림과 같이 $\angle BAC=60^\circ$, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC=30^\circ$, $\angle PCB=15^\circ$ 일 때, 삼각형 APC의 넓이는?



- ① $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$
 ④ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 10 [4.00점]

75. $\angle A > \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

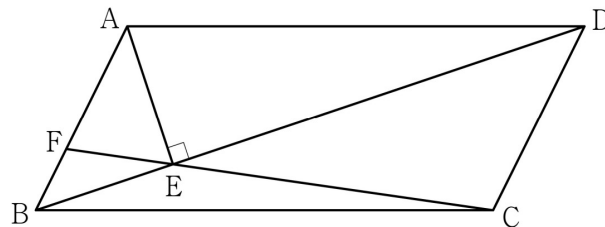
$$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1, \overline{AH} = 2$$

이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π 일 때, 선분 BH의 길이는?

- ① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$
 ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

[출처] 2023년 교육청 고3공통 7월 공통범위 13 [4.00점]

76. 그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자. $\cos(\angle AFC) = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{EC} = 10$ 이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$ 일 때, 삼각형 AFE의 넓이는?



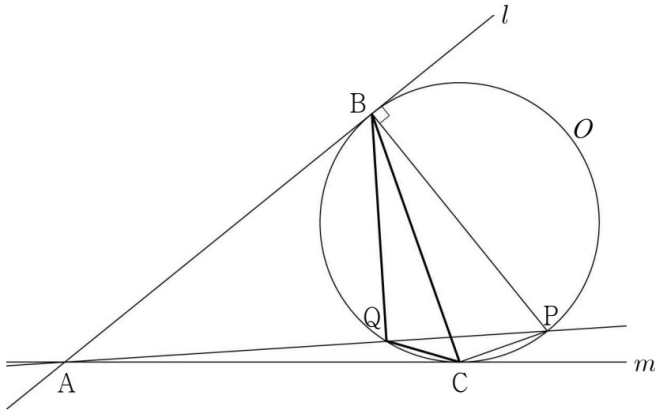
- ① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$
 ④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8

4점공략법

[출처]

2025년 교육청 고3공통 7월 공통범위 14 [4.00점]

77. 그림과 같이 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 원 O 의 외부에 있는 점 A 에서 원 O 에 그은 두 접선을 각각 l, m 이라 하고, 두 직선 l, m 이 원 O 와 만나는 점을 각각 B, C 라 하자. 점 B 를 지나고 직선 l 에 수직인 직선이 원 O 와 만나는 두 점 중에서 B 가 아닌 점을 P , 직선 AP 가 원 O 와 만나는 두 점 중에서 P 가 아닌 점을 Q 라 하면 $\overline{AB}=12$ 일 때, $\sin(\angle BPQ) : \sin(\angle QPC)=3 : 1$ 이다. 삼각형 BQC 의 넓이는?



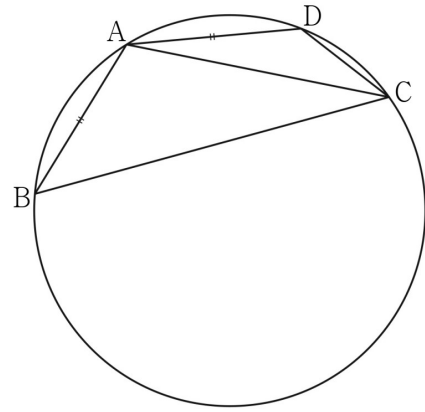
- ① $\frac{14\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ ③ $6\sqrt{2}$
 ④ $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{22\sqrt{2}}{3}$

[출처]

2022년 교육청 고3공통 4월 공통범위 15 [4.00점]

78. 그림과 같이 반지름의 길이가 $R(5 < R < 5\sqrt{5})$ 인 원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- $\overline{AB} = \overline{AD}$ 이고 $\overline{AC} = 10$ 이다.
- 사각형 $ABCD$ 의 넓이는 40이다.



다음은 선분 BD 의 길이와 R 의 비를 구하는 과정이다.

$\overline{AB} = \overline{AD} = k$ 라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD 에서 각각 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ACB) = \frac{1}{20} \left(\overline{BC} + \frac{(\text{가})}{\overline{BC}} \right),$$

$$\cos(\angle DCA) = \frac{1}{20} \left(\overline{CD} + \frac{(\text{가})}{\overline{CD}} \right)$$

이다.

이때 두 호 AB, AD 에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$$\cos(\angle ACB) = \cos(\angle DCA) \text{이다.}$$

사각형 $ABCD$ 의 넓이는

두 삼각형 ABD, BCD 의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2} k^2 \sin(\angle BAD) + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin(\pi - \angle BAD) = 40$$

에서 $\sin(\angle BAD) = (\text{나})$ 이다.

따라서 삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{BD} : R = (\text{다}) : 1 \text{이다.}$$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$ 라 하고, (나), (다)에 알맞은

수를 각각 p, q 라 할 때, $\frac{f(10p)}{q}$ 의 값은?

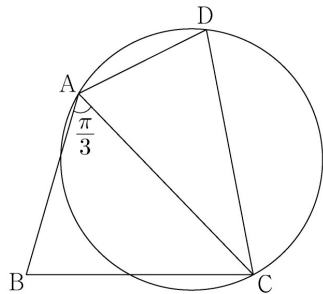
- ① $\frac{25}{2}$ ② 15 ③ $\frac{35}{2}$
 ④ 20 ⑤ $\frac{45}{2}$

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 13 [4.00점]

79. 그림과 같이

$$\overline{AB}=3, \overline{BC}=\sqrt{13}, \overline{AD}\times\overline{CD}=9, \angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1 , 삼각형 ACD의 넓이를 S_2 라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하자. $S_2 = \frac{5}{6}S_1$ 일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$ 의 값은?



- ① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$
 ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

[출처]

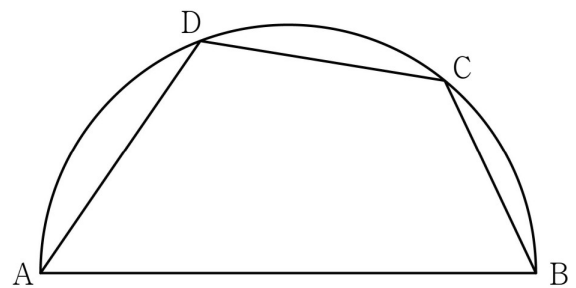
2022년 교육청 고3공통 7월 공통범위 14 [4.00점]

80. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$ 이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.)

<보 기>

ㄱ. $\sin(\angle CBA) = \frac{2\sqrt{10}}{7}$
 ㄴ. $\overline{CD}=7$ 일 때, $\overline{AD} = -3 + 2\sqrt{30}$
 ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



CONTENTS

수역

[출처] 2024년 교육청 고3공통 7월 공통범위 11 [4.00점]

81. 공차가 d ($0 < d < 1$)인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) a_5 는 자연수이다.
(나) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_8 = \frac{68}{3}$ 이다.

a_{16} 의 값은?

- ① $\frac{19}{3}$ ② $\frac{77}{12}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{79}{12}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 12 [4.00점]

82. $a_2 = -4$ 이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = a_n + a_{n+1}$ ($n \geq 1$)이라 하고,

두 집합 A, B 를

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

라 하자. $n(A \cap B) = 3$ 이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{20} 의 값의 합은?

- ① 30 ② 34 ③ 38
④ 42 ⑤ 46

4점공략법

[출처] 2023년 교육청 고3공통 4월(5/10시행) 공통범위 20 [4.00점]

83. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. S_n 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13} 의 값을 구하시오.

- (가) S_n 은 $n=7, n=8$ 에서 최솟값을 갖는다.
 (나) $|S_m| = |S_{2m}| = 162$ 인 자연수 m ($m > 8$)이 존재한다.

[출처] 2022년 교육청 고3공통 10월 공통범위 15 [4.00점]

84. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 두 자연수 p, q 에 대하여 $S_n = pm^2 - 36n + q$ 일 때, S_n 이 다음 조건을 만족시키도록 하는 p 의 최솟값을 p_1 이라 하자.

임의의 두 자연수 i, j 에 대하여 $i \neq j$ 이면 $S_i \neq S_j$ 이다.

$p = p_1$ 일 때, $|a_k| < a_1$ 을 만족시키는 자연수 k 의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q 의 값의 합은?

- ① 372 ② 377 ③ 382
 ④ 387 ⑤ 392

[출처]

2022년 교육청 고3공통 3월 공통범위 13 [4.00점]

85. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항의 합은?

- ① $\frac{31}{5}$ ② $\frac{33}{5}$ ③ 7
④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{39}{5}$

[출처]

2025년(2026학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 20 [4.00점]

86. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$0 \leq x < 4$ 일 때 $f(x) = -x^2 + 4x$ 이고,
모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이다.

방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의 0 이상인 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자.

다음은 $a_{20} + a_{21} + a_{22}$ 의 값을 구하는 과정이다.

방정식 $f(x) = x$ 의 모든 실근이 0, 3이므로
방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의 실근을 구하는 것은
방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$ 의 실근을 구하는 것과 같다.
 $0 \leq x < 4$ 일 때, 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$ 의
모든 실근은 0, $\boxed{\text{(가)}}$, 3이므로

$$a_1 = 0, a_2 = \boxed{\text{(가)}}, a_3 = 3$$

이다. 또한 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이므로
세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$ 은

첫째항이 각각 0, $\boxed{\text{(가)}}$, 3이고

공차가 모두 $\boxed{\text{(나)}}$ 인 등차수열이다.

따라서 $a_{20} + a_{21} + a_{22} = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p , q , r 라 할 때,
 $p+q+r$ 의 값을 구하시오.

4점공략법

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 21 [4.00점]

87. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. a_7 이 13의 배수이고

$\sum_{k=1}^7 S_k = 644$ 일 때, a_2 의 값을 구하시오.

[출처] 2022년 교육청 고3공통 4월 공통범위 21 [4.00점]

88. 공차가 자연수 d 이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d 의 값의 합을 구하시오.

(가) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \neq 0$ 이다.

(나) $a_{2m} = -a_m$ 이고 $\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = 128$ 인 자연수 m 이 존재한다.

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 12 [4.00점]

89. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10} 의 값은?

(가) $a_5 \times a_7 < 0$
(나) $\sum_{k=1}^6 |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^6 |a_{2k}|$

- ① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$
④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

[출처] 2023년 교육청 고3공통 3월 공통범위 10 [4.00점]

90. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10} 의 값은?

(가) $|a_4| + |a_6| = 8$
(나) $\sum_{k=1}^9 a_k = 27$

- ① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

[출처]

2023년 교육청 고3공통 7월 공통범위 12 [4.00점]

91. 모든 항이 정수이고 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 m 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \sum_{k=1}^{2m+1} a_k < 0$$

$$(나) |a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| < 13$$

$24 < a_{21} < 29$ 일 때, m 의 값은?

- ① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

[출처]

2024년 교육청 고3공통 3월 공통범위 11 [4.00점]

92. 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_6 = -2, \sum_{k=1}^8 |a_k| = \sum_{k=1}^8 a_k + 42$$

일 때, $\sum_{k=1}^8 a_k$ 의 값은?

- ① 40 ② 44 ③ 48
④ 52 ⑤ 56

[출처] 2024년 교육청 고3공통 5월 공통범위 11 [4.00점]

93. 공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 과 자연수 m ($m \geq 3$)이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1 - b_1| = 5$
(나) $a_m = b_m, a_{m+1} < b_{m+1}$

$\sum_{k=1}^m a_k = 9$ 일 때, $\sum_{k=1}^m b_k$ 의 값은?

- ① -6 ② -5 ③ -4
- ④ -3 ⑤ -2

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 11 [4.00점]

94. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$|a_6| = a_8, \sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$ 의 값은?

- ① 60 ② 65 ③ 70
- ④ 75 ⑤ 80

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 9 [4.00점]

95. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은?

- ① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$
- ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 12 [4.00점]

96. $a_1 = 2$ 인 수열 $\{a_n\}$ 과 $b_1 = 2$ 인 등차수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}n^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^5 a_k$ 의 값은?

- ① 120 ② 125 ③ 130
- ④ 135 ⑤ 140

[출처]

2025년 교육청 고3공통 5월 공통범위 10 [4.00점]

97. 모든 항이 자연수이고 공차가 같은 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k \times b_k} = \frac{n}{8n+4}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k)$ 의 값은?

- ① 100 ② 110 ③ 120
④ 130 ⑤ 140

[출처]

2023년 교육청 고3공통 10월 공통범위 9 [4.00점]

98. 자연수 n ($n \geq 2$)에 대하여 $n^2 - 16n + 48$ 의 n 제곱근 중
실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$ 의 값은?

- ① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 13 [4.00점]

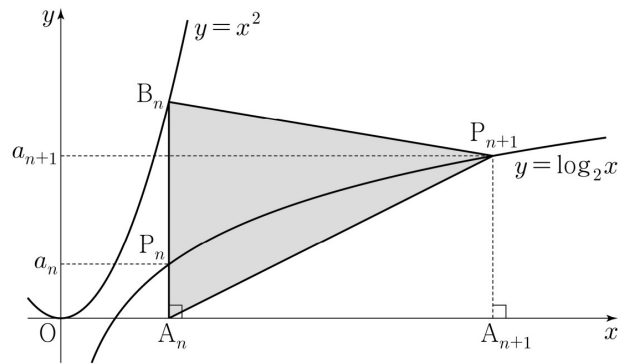
99. 자연수 m ($m \geq 2$)에 대하여 m^{12} 의 n 제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n 의 개수를

$f(m)$ 이라 할 때, $\sum_{m=2}^9 f(m)$ 의 값은?

- ① 37 ② 42 ③ 47
④ 52 ⑤ 57

[출처] 2027년(2028학년도) 평가원 고3공통 수능 예시 문항 27 [4.00점]

100. 첫째항이 1이고 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 n 에 대하여 직선 $y=a_n$ 이 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 점을 P_n 이라 하자. 점 P_n 을 지나고 x 축에 수직인 직선이 x 축 및 곡선 $y=x^2$ 과 만나는 점을 각각 A_n, B_n 이라 하고, 삼각형 $A_n B_n P_{n+1}$ 의 넓이를 T_n 이라 하자.



다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $\overline{OA_n} : \overline{OA_{n+1}} = 1 : 4$ 일 때

$\sum_{n=1}^5 T_n$ 의 값을 구하는 과정이다. (단, O 는 원점이다.)

$a_n = \log_2 x$ 일 때 $x = 2^{a_n}$ 이므로 점 A_n 의 x 좌표는 2^{a_n} 이다.

$\overline{OA_n} = 2^{a_n}$, $\overline{OA_{n+1}} = 2^{a_{n+1}}$ 이고

$\overline{OA_n} : \overline{OA_{n+1}} = 1 : 4$ 이므로

$$2^{a_n} : 2^{a_{n+1}} = 1 : 4$$

이다. 그러므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

점 B_n 의 좌표는 $(2^{a_n}, 4^{a_n})$ 이므로

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \times \overline{A_n B_n} \times \overline{A_n A_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \times 4^{a_n} \times (2^{a_{n+1}} - 2^{a_n}) \\ &= \boxed{\text{(나)}} \times 8^{a_n} \end{aligned}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1인 등차수열이므로

$$\sum_{n=1}^5 T_n = \boxed{\text{(다)}} \times (2^{30} - 1)$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때,

$\frac{p}{q \times r}$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 12 [4.00점]

101. 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$ 일 때, 수열 $\{b_n\}$ 의
첫째항부터 제9항까지의 합은?

- ① -22 ② -20 ③ -18
④ -16 ⑤ -14

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 15 [4.00점]

102. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k 에 대하여 $a_{4k} = r^k$ 이다.

(단, r 는 $0 < |r| < 1$ 인 상수이다.)

(나) $a_1 < 0$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n| \geq 5) \end{cases} \text{이다.}$$

$|a_m| \geq 5$ 를 만족시키는 100 이하의 자연수 m 의 개수를 p 라
할 때, $p + a_1$ 의 값은?

- ① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 12 [4.00점]

103. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2 + a_4 = 40$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은?

- ① 172 ② 175 ③ 178
④ 181 ⑤ 184

[출처] 2022년 교육청 고3공통 7월 공통범위 21 [4.00점]

104. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$

(나) $|a_{n+1} - a_n| = 2n - 1$

$a_2 = 9$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$ 의 값을 구하시오.

4점공략법

[출처]

2024년 교육청 고3공통 5월 공통범위 9 [4.00점]

105. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = 1 - 4 \times S_n$$

이고 $a_4 = 4$ 일 때, $a_1 \times a_6$ 의 값은?

- ① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

[출처]

2025년 교육청 고3공통 7월 공통범위 12 [4.00점]

106. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n + 1 & (n \text{이 } 3 \text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + b_n & (n \text{이 } 3 \text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $b_9 - b_3 = 27$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은?

- ① 100 ② 145 ③ 190
④ 235 ⑤ 280

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 15 [4.00점]

107. 자연수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$$a_1 = k \text{이고, 모든 자연수 } n \text{에 대하여}$$
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \leq 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

- $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$ 이 되도록 하는 모든 k 의 값의 합은?
- ① 10

② 14

③ 18

④ 22

⑤ 26

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 22 [4.00점]

108. 양수 k 에 대하여 $a_1 = k$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0 \text{ 이다.}$$

$a_5 = 0$ 이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k 에 대하여 k^2 의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2025년(2026학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 12 [4.00점]

109. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_4 의 최댓값은?

(가) $a_1 = a_3$
(나) 모든 자연수 n 에 대하여
 $(a_{n+1} - a_n + 3)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$
이다.

- ① 9 ② 12 ③ 15
- ④ 18 ⑤ 21

[출처] 2022년 교육청 고3공통 4월 공통범위 12 [4.00점]

110. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 \leq n \leq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_n + a_{n+4} = 15$ 이다.
(나) $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} - a_n = n$ 이다.

$\sum_{n=1}^4 a_n = 6$ 일 때, a_5 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 5
- ④ 7 ⑤ 9

[출처] 2027년(2028학년도) 평가원 고3공통 수능 예시 문항 14 [4.00점]

111. 실수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$$a_4 = 2 \text{ 이고, 모든 자연수 } n \text{에 대하여}$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2k & (n \leq 3) \\ ka_n + 2 & (n \geq 4) \end{cases}$$

이다.

$a_1 = a_7$ 이 되도록 하는 모든 k 에 대하여 $|a_1| + |a_2|$ 의 최댓값은?

- ① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 15

112. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_9 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

(가) $a_7 = 40$
(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1} \text{이 } 3 \text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1} \text{이 } 3 \text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

- ① 216 ② 218 ③ 220
④ 222 ⑤ 224

[출처]

2023년 교육청 고3공통 3월 공통범위 15 [4.00점]

113. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1} + a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) & (a_{n+1} + a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1 = 1$ 일 때, $a_6 = 34$ 가 되도록 하는 모든 a_2 의 값의 합은?

- ① 60 ② 64 ③ 68
④ 72 ⑤ 76

[출처]

2023년 교육청 고3공통 7월 공통범위 15 [4.00점]

114. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 < 300$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n \text{이 자연수인 경우}) \\ a_n + 6 & (\log_3 a_n \text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

이다.

$\sum_{k=4}^7 a_k = 40$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은?

- ① 315 ② 321 ③ 327
④ 333 ⑤ 339

[출처]

2023년 교육청 고3공통 10월 공통범위 15 [4.00점]

115. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n + 2n & (a_n \text{이 } 4\text{의 배수인 경우}) \\ a_n + 2n & (a_n \text{이 } 4\text{의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_3 > a_5$

$50 < a_4 + a_5 < 60$ 이 되도록 하는 a_1 의 최댓값과 최솟값을

각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

- ① 224 ② 228 ③ 232
④ 236 ⑤ 240

[출처]

2024년 교육청 고3공통 5월 공통범위 15 [4.00점]

116. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{3} & (a_n \text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \\ \frac{a_n^2 + 5}{3} & (a_n \text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4 + a_5 = 5$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은?

- ① 63 ② 66 ③ 69
④ 72 ⑤ 75

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 22 [4.00점]

117. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $|a_1|$ 의 값의 합을 구하시오.

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (|a_n| \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n = 0 \text{ 또는 } |a_n| \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) $|a_m| = |a_{m+2}|$ 인 자연수 m 의 최솟값은 3이다.

[출처] 2025년 교육청 고3공통 3월 공통범위 21 [4.00점]

118. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{n} & (a_n \geq 3) \\ 10 & (a_n < 3) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_6 = 2$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 15 [4.00점]

119. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6 + a_7 = 3$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은?

- ① 139 ② 146 ③ 153
④ 160 ⑤ 167

[출처] 2024년 교육청 고3공통 7월 공통범위 15 [4.00점]

120. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \left(\frac{1}{2}a_n \text{이 자연수인 경우}\right) \\ (a_n - 1)^2 & \left(\frac{1}{2}a_n \text{이 자연수가 아닌 경우}\right) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_7 = 1$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은?

- ① 120 ② 125 ③ 130
④ 135 ⑤ 140

[출처] 2024년 교육청 고3공통 10월 공통범위 15 [4.00점]

121. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여
- $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{n} & (n \text{이 } a_n \text{의 약수인 경우}) \\ 3a_n + 1 & (n \text{이 } a_n \text{의 약수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
- 를 만족시킬 때, $a_6 = 2$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은?
- ① 254

② 264

③ 274

④ 284

⑤ 294

[출처] 2025년 교육청 고3공통 7월 공통범위 22 [4.00점]

122. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 = 6$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합을 구하시오.
- (가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) 네 항 a_2, a_3, a_4, a_5 중 짝수인 항의 개수는 1이다.

4점공략법

[출처] 2023년 교육청 고3공통 4월(5/10시행) 공통범위 15 [4.00점]

123. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_1 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $\log_2 \frac{M}{m}$ 의 값은?

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases} \text{이다.}$$

(나) $a_5 + a_6 = 1$

- ① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

[출처] 2024년 교육청 고3공통 3월 공통범위 15

124. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & (a_n > n) \\ 3n-2-a_n & (a_n \leq n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5 = 5$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 곱은?

- ① 20 ② 30 ③ 40
④ 50 ⑤ 60

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 22 [4.00점]

125. 수열 $\{a_n\}$ 은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n} \text{이 자연수이고 } a_n > 0 \text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 곱을 구하시오.

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 15 [4.00점]

126. 자연수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$a_1 = 0$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{k+1} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_{22} = 0$ 이 되도록 하는 모든 k 의 값의 합은?

- ① 12 ② 14 ③ 16
- ④ 18 ⑤ 20

[출처]

2025년 교육청 고3공통 5월 공통범위 22 [4.00점]

127. 모든 항이 실수인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \times a_2 > 0$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 & (a_n \leq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_3 = a_5$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합이 $\frac{q}{p}$ 일 때,
 $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처]

2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 13 [4.00점]

128. 두 곡선 $y = 16^x$, $y = 2^x$ 과 한 점 $A(64, 2^{64})$ 이 있다.

점 A 를 지나며 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y = 16^x$ 과 만나는 점을 P_1 이라 하고, 점 P_1 을 지나며 y 축과 평행한 직선이 곡선 $y = 2^x$ 과 만나는 점을 Q_1 이라 하자.

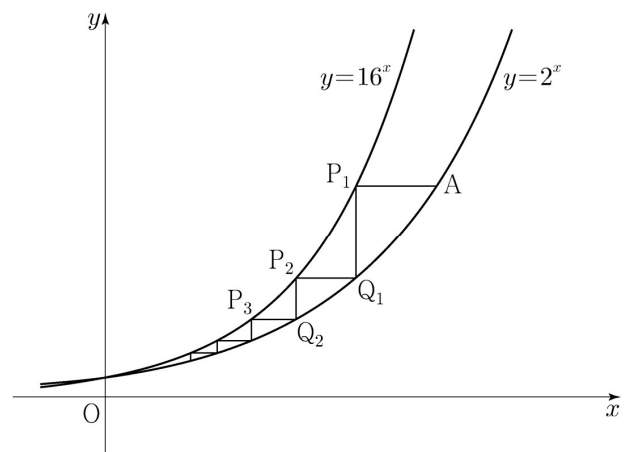
점 Q_1 을 지나며 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y = 16^x$ 과 만나는 점을 P_2 라 하고, 점 P_2 를 지나며 y 축과 평행한 직선이 곡선 $y = 2^x$ 과 만나는 점을 Q_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 두 점을 각각 P_n , Q_n 이라 하고 점 Q_n 의 x 좌표를 x_n 이라 할 때,

$x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값이 6이 되도록 하는

자연수 k 의 개수는?

- ① 48 ② 51 ③ 54
 ④ 57 ⑤ 60



[출처]

2022년 교육청 고3공통 7월 공통범위 12 [4.00점]

129. 첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{3S_k}{k+2} = S_n$$

이 성립할 때, a_{10} 의 값을 구하는 과정이다.

$n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{3S_k}{k+2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3S_k}{k+2} = \frac{3S_n}{n+2} \end{aligned}$$

이므로 $3S_n = (n+2) \times a_n$ ($n \geq 2$) 이다.

$S_1 = a_1$ 에서 $3S_1 = 3a_1$ 이므로

$3S_n = (n+2) \times a_n$ ($n \geq 1$) 이다.

$$\begin{aligned} 3a_n &= 3(S_n - S_{n-1}) \\ &= (n+2) \times a_n - (\boxed{(가)}) \times a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \boxed{(나)} \quad (n \geq 2)$$

따라서

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \cdots \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9} \\ &= \boxed{(다)} \end{aligned}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 하고,

(다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $\frac{f(p)}{g(p)}$ 의 값은?

- ① 109 ② 112 ③ 115
④ 118 ⑤ 121

CONTENTS

극한과
연속

[출처]

2022년 교육청 고3공통 10월 공통범위 20 [4.00점]

130. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(5)$ 의 최댓값을 구하시오.

(가) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)-1|}{x}$ 의 값이 존재한다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2 + x$ 이다.

[출처]

2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 15 [4.00점]

131. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x) \neq 0) \\ 3 & (f(x) = 0) \end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3) - 1$ 일 때, $g(5)$ 의 값은?

① 14

② 16

③ 18

④ 20

⑤ 22

[출처] 2025년(2026학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 21 [4.00점]

132. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$ 와 최고차항의 계수가 1인
사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$ 의 값과

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$ 의 값이 모두 존재한다.

$g(-1)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2024년 교육청 고3공통 5월 공통범위 20 [4.00점]

133. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2$$

을 만족시킨다. 상수 k ($k \neq 0$)에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)} \times \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=k$$

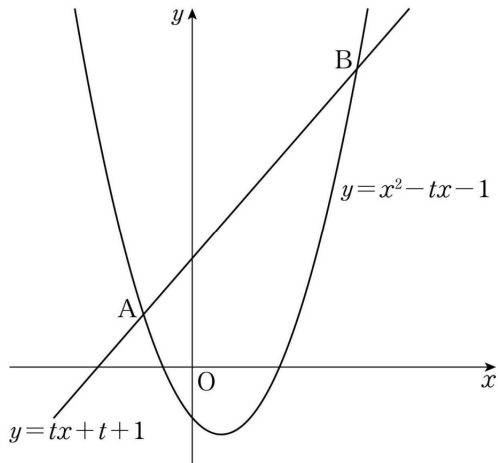
일 때, k 의 값을 구하시오.

[출처]

2023년 교육청 고3공통 10월 공통범위 10 [4.00점]

134. 실수 t ($t > 0$)에 대하여 직선 $y = tx + t + 1$ 과 곡선 $y = x^2 - tx - 1$ 이 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AB}}{t^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
 ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$



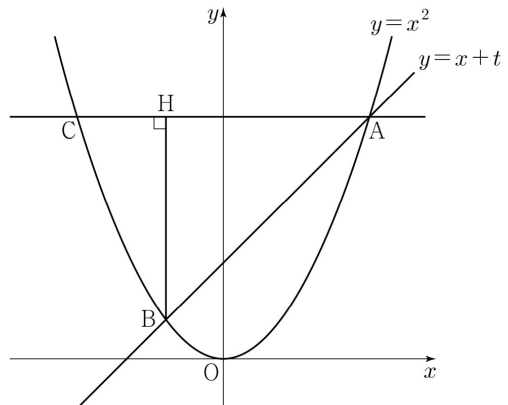
[출처]

2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 12 [4.00점]

135. 실수 t ($t > 0$)에 대하여 직선 $y = x + t$ 와 곡선 $y = x^2$ 이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = x^2$ 과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t}$ 의 값은? (단, 점 A의 x 좌표는 양수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5



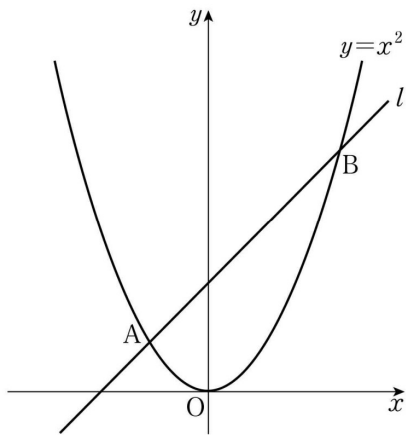
[출처]

2023년 교육청 고3공통 3월 공통범위 12 [4.00점]

136. 곡선 $y = x^2$ 과 기울기가 1인 직선 l 이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 양의 실수 t 에 대하여 선분 AB의 길이가 $2t$ 가 되도록 하는 직선 l 의 y 절편을 $g(t)$ 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

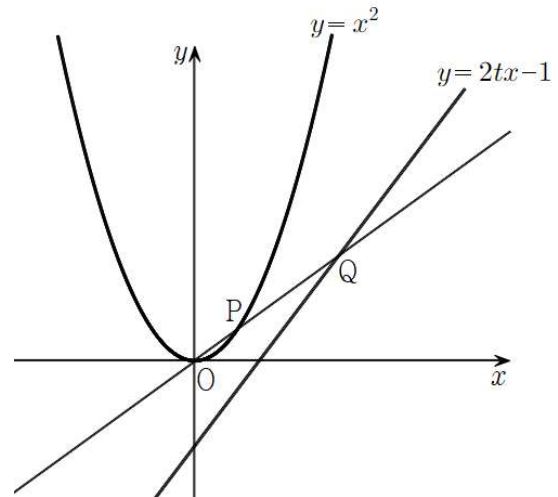


[출처]

2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 11 [4.00점]

137. 그림과 같이 실수 t ($0 < t < 1$)에 대하여 곡선 $y = x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y = 2tx - 1$ 과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y = 2tx - 1$ 과 만나는 점을 Q라

할 때, $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\overline{PQ}}{1-t}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)



- ① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
 ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

[출처]

2025년 교육청 고3공통 7월 공통범위 13 [4.00점]

138. 함수 $f(x)=x^2-4x+5$ 와 두 상수 a, b 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+a)+b & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 실수 t 에 대하여 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수를 $h(t)$ 라 하자.

$$\left| \lim_{t \rightarrow k+} h(t) - \lim_{t \rightarrow k-} h(t) \right| = 2$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k 의 값이 1, 4, 5일 때, $g(-4)$ 의 값은?

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

[출처]

2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 6 [3.00점]

139. 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x < -1) \\ x & (-1 \leq x < 3) \\ bx-2 & (x \geq 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 22 [4.00점]

140. 두 양수 a, b ($b > 3$)과 최고차항의 계수가 1인

이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} (x+3)f(x) & (x < 0) \\ (x+a)f(x-b) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$ 의 값을 구하시오.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} - |g(t)|}{(x+3)^2} \text{의 값이 존재하지 않는}$$

실수 t 의 값은 -3 과 6 뿐이다.

[출처] 2022년 교육청 고3공통 3월 공통범위 12 [4.00점]

141. $a > 2$ 인 상수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \leq 2) \\ -x^2 + ax & (x > 2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1) + h(3)$ 의 값은?

(가) $x \neq 1, x \neq a$ 일 때, $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 이다.

(나) $h(1) = h(a)$

- ① $-\frac{15}{6}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{13}{6}$
- ④ -2 ⑤ $-\frac{11}{6}$

[출처]

2024년 교육청 고3공통 7월 공통범위 22 [4.00점]

142. 두 자연수 a, b ($a < b < 8$)에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} |x+3|-1 & (x < a) \\ x-10 & (a \leq x < b) \\ |x-9|-1 & (x \geq b) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 와 양수 k 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)f(x+k)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) $f(k) < 0$

$f(a) \times f(b) \times f(k)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2023년 교육청 고3공통 7월 공통범위 14 [4.00점]

143. 최고차항의 계수가 1이고 $f(-3) = f(0)$ 인 삼차함수

$f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < -3 \text{ 또는 } x \geq 0) \\ -f(x) & (-3 \leq x < 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)g(x-3)$ 이 $x=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 값이 한 개일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

— <보 기> —

- ㄱ. 함수 $g(x)g(x-3)$ 은 $x=0$ 에서 연속이다.
ㄴ. $f(-6) \times f(3) = 0$
ㄷ. 함수 $g(x)g(x-3)$ 이 $x=k$ 에서 불연속인 실수 k 가 음수일 때 집합 $\{x | f(x) = 0, x \text{는 실수}\}$ 의 모든 원소의 합이 -1 이면 $g(-1) = -48$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처]

2022년 교육청 고3공통 10월 공통범위 11 [4.00점]

144. 두 정수 a, b 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 4$ 에서 $f(x) = ax^2 + bx - 24$ 이다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이다.

$1 < x < 10$ 일 때, 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 5이다. $a+b$ 의 값은?

- ① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

CONTENTS

目次

[출처]

2024년 교육청 고3공통 3월 공통범위 8 [3.00점]

145. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여

$$(x+1)f(x) + (1-x)g(x) = x^3 + 9x + 1, \quad f(0) = 4$$

일 때, $f'(0) + g'(0)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처]

2022년 교육청 고3공통 4월 공통범위 7 [3.00점]

146. $f(3) = 2$, $f'(3) = 1$ 인 다항함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - g(x)}{x - 3} = 1$$

을 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처]

2022년 교육청 고3공통 10월 공통범위 9 [4.00점]

147. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf'(x) - 3f(x) = 2x^2 - 8x$$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처]

2027년(2028학년도) 평가원 고3공통 수능 예시 문항 28 [4.00점]

148. 두 상수 a, k ($k > 0$)과 함수 $f(x) = x(x-1)^2(x-2)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = f(x-a)$$

이고 다음 조건을 만족시키는 함수 $h(x)$ 가 존재할 때, $a+20k^2$ 의 값을 구하시오.

- (가) 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $(|x| - k)h(x) = |g(x) - g(k)|$ 이다.

[출처]

2025년 교육청 고3공통 7월 공통범위 15 [4.00점]

149. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-x^2 & (x \leq 0) \\ \{f(x)\}^2+x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=b$ 에서만 미분가능하지 않다.
 (나) 방정식 $g(x)=0$ 은 음의 실근을 갖는다.

$g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① $\frac{183}{2}$ ② $\frac{187}{2}$ ③ $\frac{191}{2}$
 ④ $\frac{195}{2}$ ⑤ $\frac{199}{2}$

[출처]

2025년 교육청 고3공통 3월 공통범위 22 [4.00점]

150. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ |f(x)|-|2x^2-8| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(-5)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2022년 교육청 고3공통 4월 공통범위 14 [4.00점]

151. 정수 k 와 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 0) \\ x-1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (1 \leq x \leq 3) \\ -x+4 & (x > 3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = |f(x-k)|$ 라 할 때,
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

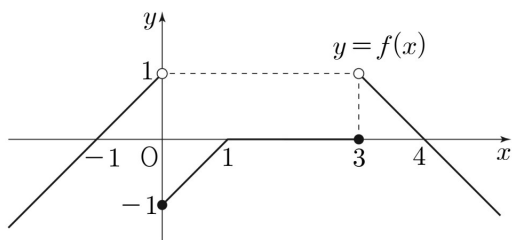
<보 기>

ㄱ. $k=-3$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이 되도록 하는
정수 k 가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하도록 하는 모든
정수 k 의 값의 합은 -5 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



[출처]

2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 11 [4.00점]

152. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-1}{x-a} = 3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의
접선의 y 절편이 4일 때, $f(1)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

- ① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 20 [4.00점]

153. $a > \sqrt{2}$ 인 실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

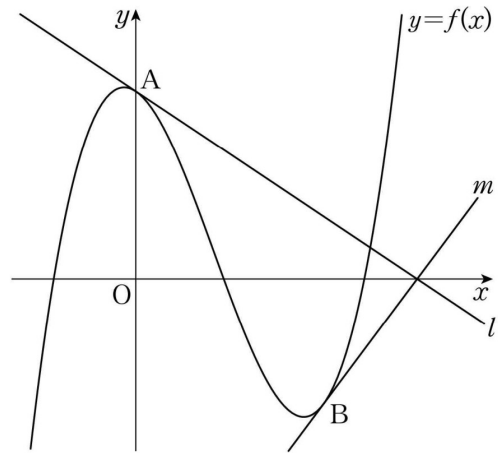
라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $O(0, 0)$ 에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점 중 O 가 아닌 점을 A 라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하자. 점 A 가 선분 OB 를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{OA} \times \overline{AB}$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2024년 교육청 고3공통 3월 공통범위 19 [3.00점]

154. 실수 a 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + 2$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $A(0, 2)$, $B(2, f(2))$ 에서의 접선을 각각 l , m 이라 하자. 두 직선 l , m 이 만나는 점이 x 축 위에 있을 때, $60 \times |f(2)|$ 의 값을 구하시오.



[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 10 [4.00점]

155. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$ 에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선이 점 $(1, 3)$ 에서 만날 때, $f(0)$ 의 값은?

- ① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

[출처] 2024년 교육청 고3공통 5월 공통범위 14 [4.00점]

156. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 y 절편을 $g(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$|f(k)| + |g(k)| = 0 \text{을 만족시키는 실수 } k \text{의 개수는 2이다.}$$

$4f(1) + 2g(1) = -1$ 일 때, $f(4)$ 의 값은?

- ① 46 ② 49 ③ 52
④ 55 ⑤ 58

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 8 [3.00점]

157. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(5)$ 의 최솟값은?

- (가) $f(1)=3$
 (나) $1 < x < 5$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 5$ 이다.

- ① 21 ② 22 ③ 23
 ④ 24 ⑤ 25

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 22 [4.00점]

158. 정수 a ($a \neq 0$)에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x^3 - 2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 곱이 -12 가 되도록 하는 a 에 대하여 $f'(10)$ 의 값을 구하시오.

함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\left\{ \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right\} \times \left\{ \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \right\} < 0$$

을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3 이 열린구간 $\left(k, k + \frac{3}{2}\right)$ 에 존재한다.

[출처]

2024년 교육청 고3공통 10월 공통범위 14 [4.00점]

159. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 1) \\ f(x-1)+2 & (x > 1) \end{cases}$$

은 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$ 에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$ 이다.

$g'(t)=2$ 인 서로 다른 모든 실수 t 의 값의 합은?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5

④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

[출처]

2023년 교육청 고3공통 3월 공통범위 9 [4.00점]

160. 함수

$$f(x) = |x^3 - 3x^2 + p|$$

는 $x=a$ 와 $x=b$ 에서 극대이다. $f(a)=f(b)$ 일 때, 실수 p 의 값은? (단, a, b 는 $a \neq b$ 인 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[출처] 2027년(2028학년도) 평가원 고3공통 수능 예시 문항 18 [4.00점]

161. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)+g(8)$ 의 값은?

(가) 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 모두 직선 $y=x$ 위의 서로 다른 두 점 A, B를 지난다.

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x)-x)(g(x)-x)}{x^3}$ 의 값과

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x)+x)(g(x)+x)}{x^3}$ 의 값이 존재한다.

- ① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 14 [4.00점]

162. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

함수 $h(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(x+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(x+t)$ 에 대하여

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 감소하고

$g(-1) = -2$ 이면 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처]

2023년 교육청 고3공통 3월 공통범위 22 [4.00점]

163. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 있다.

실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=|f(x)-t|$ 라 할 때,

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$$

의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k 의 개수를 $h(t)$ 라 하자.
함수 $h(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t \rightarrow 4+} h(t)=5$

(나) 함수 $h(t)$ 는 $t = -60$ 과 $t = 4$ 에서만 불연속이다.

$f(2)=4$ 이고 $f'(2)>0$ 일 때, $f(4)+h(4)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 13 [4.00점]

164. 두 실수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x < 0) \\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty, -1]$ 에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$ 에서 증가할 때, $a+b$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M-m$ 의 값은?

① $\frac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}+3\sqrt{2}$

[출처]

2025년 교육청 고3공통 5월 공통범위 15 [4.00점]

165. 최고차항의 계수가 1 이고 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 인 사차함수

$f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\{g(x)-x\}\{g(x)-f(x)\}=0$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든

$\frac{g(-2)}{g(3)}$ 의 값의 합은?

(가) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ 의 값은 존재하지 않는다.

(나) $x \geq a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(-x) = -g(x)$ 를 만족시키는 실수 a 의 최솟값은 4이다.

① $-\frac{41}{3}$

② -13

③ $-\frac{37}{3}$

④ $-\frac{35}{3}$

⑤ -11

[출처]

2025년 교육청 고3공통 5월 공통범위 21 [4.00점]

166. 최고차항의 계수가 1 이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 양수 a 와 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(t)+g(t-4)$ 는 $t=0$ 과 $t=a$ 에서만 불연속이다.

$f(a)$ 의 최솟값을 구하시오.

[출처]

2022년 교육청 고3공통 7월 공통범위 22 [4.00점]

167. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 할 때, 함수 $h(x)$ 를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k, 0)(k \neq 0)$ 에서의 접선의 방정식은 $y=0$ 이다.
 (나) 방정식 $h(x)=0$ 의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\frac{9}{2}$ 일 때, $k \times \{h(6)-h(11)\}$ 의 값을 구하시오.

(단, k 는 상수이다.)

[출처]

2025년(2026학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 15 [4.00점]

168. 상수 k 와 $f'(0)=6$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\leq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

- (가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ 의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.
 (나) x 에 대한 방정식 $g(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 의 최댓값은 13이다.

- ① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$
 ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 14 [4.00점]

169. 두 자연수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\leq 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\rightarrow k-}g(t)+\lim_{t\rightarrow k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k 의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 최댓값은?

- ① 51 ② 52 ③ 53
- ④ 54 ⑤ 55

[출처] 2024년 교육청 고3공통 3월 공통범위 14 [4.00점]

170. 두 정수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\frac{a^2}{4}+b^2 & (x\leq 0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

- ① 3 ② 4 ③ 5
- ④ 6 ⑤ 7

[출처]

2022년 교육청 고3공통 4월 공통범위 20 [4.00점]

171. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킨다. 양수 t 에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t, 0)$, $(0, 2t)$, $(-t, 0)$, $(0, -2t)$ 를 꼭짓점으로 하는 마름모가 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 는 $t = \alpha$, $t = 8$ 에서 불연속이다. $\alpha^2 \times f(4)$ 의 값을 구하시오.
(단, α 는 $0 < \alpha < 8$ 인 상수이다.)

[출처]

2022년 교육청 고3공통 3월 공통범위 10 [4.00점]

172. 두 함수

$$f(x) = x^2 + 2x + k, \quad g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$$

에 대하여 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k 의 최솟값은?

- ① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 22 [4.00점]

173. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여
 $f(x) = f(1) + (x-1)f'(g(x))$ 이다.
 (나) 함수 $g(x)$ 의 최솟값은 $\frac{5}{2}$ 이다.
 (다) $f(0) = -3$, $f(g(1)) = 6$

[출처] 2023년 교육청 고3공통 4월(5/10시행) 공통범위 14 [4.00점]

174. 양의 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x^3 - 3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$ 의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$ 라 하자. 함수

$$g(t) = M_1(t) + M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. $g(2) = 32$
 ㄴ. $g(t) = 2f(-t)$ 를 만족시키는 t 의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.
 ㄷ. $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = 5$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처]

2022년 교육청 고3공통 10월 공통범위 22 [4.00점]

175. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 구간 $(-\infty, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 m_1 이라 하고, 구간 $[t, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 m_2 라 할 때,

$$g(t) = m_1 - m_2$$

라 하자. $k > 0$ 인 상수 k 와 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$g(t) = k$ 를 만족시키는 모든 실수 t 의 값의 집합은 $\{t \mid 0 \leq t \leq 2\}$ 이다.

$g(4) = 0$ 일 때, $k + g(-1)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2024년 교육청 고3공통 3월 공통범위 22 [4.00점]

176. 함수 $f(x) = |x^3 - 3x + 8|$ 과 실수 t 에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $g(t)$ 는 $t = \alpha$ 와 $t = \beta$ 에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta = m + n\sqrt{6}$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 정수이다.)

[출처]

2023년 교육청 고3공통 10월 공통범위 12 [4.00점]

177. 양수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = |x^3 - 12x + k|$$

라 하자. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ ($a \geq 0$)이
만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 a 의
값이 오직 하나일 때, k 의 값은?

- ① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

[출처]

2022년 교육청 고3공통 3월 공통범위 14 [4.00점]

178. 두 함수

$$f(x) = x^3 - kx + 6, \quad g(x) = 2x^2 - 2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. $k=0$ 일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$ 은 오직 하나의
실근을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가
되도록 하는 실수 k 의 값은 4뿐이다.
ㄷ. 방정식 $|f(x)|=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 5가
되도록 하는 실수 k 가 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2024년 교육청 고3공통 7월 공통범위 20 [4.00점]

179. 두 함수 $f(x)=x^3-12x$, $g(x)=a(x-2)+2(a\neq 0)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a 의 값의 범위는 $m < a < M$ 이다.

함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k 가 존재한다.

$10\times(M-m)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2024년 교육청 고3공통 7월 공통범위 14 [4.00점]

180. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=\begin{cases} -2(x+1)^2+4 & (x\leq 0) \\ a(x-5) & (x>0) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여 $f(k)=g(k)$ 를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k 의 값이 $-2, 0, 2$ 일 때, $g(2a)$ 의 값은?

- ① 14 ② 18 ③ 22
- ④ 26 ⑤ 30

[출처] 2024년 인피니트 수학연구소 백미 수학2 2학기기말

181. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f'(a) \leq 0$ 인 실수 a 의 최댓값은 2이다.
(나) 집합 $\{x|f(x)=k\}$ 의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 의 최솟값은 $\frac{8}{3}$ 이다.

$f(0)=0, f'(1)=0$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 22 [4.00점]

182. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$ 에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 함수 $h(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속인 a 의 값이 두 개일 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오.

4점공략법

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 21 [4.00점]

183. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b 에 대하여 $f(1)$ 의 최댓값을 구하시오.

모든 실수 α 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$ 의 값이 존재한다.

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 15 [4.00점]

184. 상수 a ($a \neq 3\sqrt{5}$)와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x \leq 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) x 에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(-2)+g(2)$ 의 값은?

- ① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

[출처]

2022년 교육청 고3공통 7월 공통범위 13 [4.00점]

185. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = \frac{1}{2}$ 인 삼차함수

$f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < -2) \\ f(x) + 8 & (x \geq -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x) = f(-2)$ 의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은?

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[출처]

2024년 교육청 고3공통 10월 공통범위 22 [4.00점]

186. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + x & (f(x) \geq 0) \\ 2f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 가 $x = t$ 에서 불연속인 실수 t 의 개수는 1이다.
(나) 함수 $g(x)$ 가 $x = t$ 에서 미분가능하지 않은 실수 t 의 개수는 2이다.

$f(-2) = -2$ 일 때, $f(6)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2023년 교육청 고3공통 10월 공통범위 22 [4.00점]

187. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 구간 $(0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 8x^2 + 16x & (0 < x \leq 4) \\ f(x) & (x > 4) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(10) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

(가) $g\left(\frac{21}{2}\right) = 0$

(나) 점 $(-2, 0)$ 에서 곡선 $y = g(x)$ 에 그은, 기울기가 0이 아닌 접선이 오직 하나 존재한다.

[출처]

2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 9 [4.00점]

188. 두 함수

$$f(x) = x^3 - x + 6, \quad g(x) = x^2 + a$$

가 있다. $x \geq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$f(x) \geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a 의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 22 [4.00점]

189. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(k-1)f(k+1) < 0$$

을 만족시키는 정수 k 는 존재하지 않는다.

$f'(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$, $f'(\frac{1}{4}) < 0$ 일 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 21 [4.00점]

190. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 모든 정수 k 에 대하여

$$2k-8 \leq \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \leq 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2027년(2028학년도) 평가원 고3공통 수능 예시 문항 15 [4.00점]

191. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^3 + 3t - 5, \quad x_2 = 6t + 1$$

이다. 점 P의 속도가 점 Q의 속도의 5배가 되는 시간에서의 점 P의 가속도는?

- ① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

[출처] 2025년 교육청 고3공통 5월 공통범위 11 [4.00점]

192. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 위치 x 가

$$x = kt^3 - 6t^2 + t$$

이다. 양수 k 에 대하여 시간 $t = k$ 에서 점 P의 속도가 1일 때, 시간 $t = 2k$ 에서 점 P의 가속도는?

- ① 36 ② 48 ③ 60
④ 72 ⑤ 84

[출처]

2025년 교육청 고3공통 7월 공통범위 11 [4.00점]

193. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각

t ($t \geq 0$)에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^3 - 5t^2 + 10t, \quad x_2 = \frac{5}{2}t^2 - 2t - 10$$

이다. 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 순간 점 P의 가속도는?

- ① 8 ② 11 ③ 14
④ 17 ⑤ 20

CONTENTS

적분

[출처]

2024년 교육청 고3공통 5월 공통범위 22 [4.00점]

194. 최고차항의 계수가 4이고 서로 다른 세 극값을 갖는

사차함수 $f(x)$ 와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x) = \begin{cases} 4x+2 & (x < a) \\ -2x-3 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$|g(x)| = f(x), \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} = |f'(x)|$$

이다.

(나) 함수 $g(x)h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(0) = \frac{40}{3}$ 일 때, $g(1) \times h(3)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

[출처]

2025년 교육청 고3공통 5월 공통범위 7 [3.00점]

195. 다항함수 $f(x)$ 가

$$f'(x) = x^2 - kx + k - 1, f(0) = 2$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않을 때, $f(3)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.)

① 2

② 5

③ 8

④ 11

⑤ 14

4점공략법

[출처]

2025년 교육청 고3공통 3월 공통범위 19 [3.00점]

196. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x \{f(t)+t^2\} dt = xf(x)-x^3$$

을 만족시킬 때, $\int_0^4 f'(x) dx$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2023년 교육청 고3공통 7월 공통범위 11 [4.00점]

197. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(1+x)+f(1-x)=0$ 이다.

(나) $\int_{-1}^3 f'(x) dx = 12$

$f(4)$ 의 값은?

① 24

② 28

③ 32

④ 36

⑤ 40

[출처]

2023년 교육청 고3공통 3월 공통범위 20 [4.00점]

198. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 양의 실수 p 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad g'(0)=0$$

$$(나) \quad g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x < 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$\int_0^p g(x)dx=20$ 일 때, $f(5)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2025년 교육청 고3공통 7월 공통범위 21 [4.00점]

199. 함수 $f(x)=-x^2+kx$ ($k>0$)의 그래프 위에 있는

제1사분면 위의 점 $A(a, f(a))$ ($a > \frac{k}{2}$)에서의 접선의

방정식을 $y=g(x)$ 라 하고, 직선 $y=g(x)$ 의 x 절편을 b 라 하자. 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 삼각형 AOH 의 넓이를 S 라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad \int_a^b g(x)dx=S$$

$$(나) \quad \int_0^a \left\{ f(x) - \frac{1}{2}ax \right\} dx = \frac{32}{3}$$

$g(-k)$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, k 는 상수이다.)

[출처]

2024년 인피니트 수학연구소 백미 수학2 2학기기말

200. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 상수

k ($k \geq 0$)에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} 2x - k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x g(t) \{ |t(t-1)| + t(t-1) \} dt \geq 0 \text{이고}$$

$$\int_3^x g(t) \{ |(t-1)(t+2)| - (t-1)(t+2) \} dt \geq 0 \text{이다.}$$

$g(k+1)$ 의 최솟값은?

- ① $4 - \sqrt{6}$ ② $5 - \sqrt{6}$ ③ $6 - \sqrt{6}$
 ④ $7 - \sqrt{6}$ ⑤ $8 - \sqrt{6}$

[출처]

2025년(2026학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 9 [4.00점]

201. 함수 $f(x) = x^2 + ax$ 에 대하여

$$\int_{-3}^3 (x+1)f(x) dx = 36 + \int_{-3}^3 f(x) dx$$

일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

[출처]

2024년 교육청 고3공통 7월 공통범위 12 [4.00점]

202. 두 상수 a, b 에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $0 \leq x < 4$ 일 때, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x) + 16$ 이다.

$\int_4^7 f(x)dx$ 의 값은?

- ① $\frac{255}{4}$ ② $\frac{261}{4}$ ③ $\frac{267}{4}$
 ④ $\frac{273}{4}$ ⑤ $\frac{279}{4}$

[출처]

2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 15 [4.00점]

203. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\int_1^x tf(t)dt + \int_{-1}^x tg(t)dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$
 (나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_0^3 g(x)dx$ 의 값은?

- ① 72 ② 76 ③ 80
 ④ 84 ⑤ 88

[출처]

2025년 교육청 고3공통 5월 공통범위 9 [4.00점]

204. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf(x) = ax^3 + 2x - 3 + \int_0^1 f'(t) dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x) dx$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

- ① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

[출처]

2022년 교육청 고3공통 4월 공통범위 13 [4.00점]

205. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_1^x (x-t)f(t) dt = 3$$

을 만족시킬 때, $\int_1^2 (4x+1)f(x) dx$ 의 값은?

- ① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

[출처]

2024년 교육청 고3공통 3월 공통범위 12 [4.00점]

206. 실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x + a & (x < 0) \\ 3x + a & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수

$$g(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$$

가 $x=2$ 에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$ 의 극댓값은?

- ① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

[출처]

2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 20 [4.00점]

207. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_x^{x+1} |f(t)| dt$$

는 $x=1$ 과 $x=4$ 에서 극소이다. $f(0)$ 의

값을 구하시오.

[출처]

2024년 교육청 고3공통 10월 공통범위 20 [4.00점]

208. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\{f(x)\}^2 = 2 \int_3^x (t^2 + 2t)f(t) dt$$

를 만족시킬 때, $\int_{-3}^0 f(x) dx$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M-m$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 12 [4.00점]

209. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1 \leq x < n$ 일 때, $|f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)|$ 이다.
(단, n 은 자연수이다.)

열린구간 $(0, 4)$ 에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_x^4 f(t) dt$$

가 $x=2$ 에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x) dx$ 의 값은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처]

2023년 교육청 고3공통 10월 공통범위 14 [4.00점]

210. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(2)=0$ 인 이차함수 $f(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여

$$\int_4^n f(x)dx \geq 0$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(2) < 0$

ㄴ. $\int_4^3 f(x)dx > \int_4^2 f(x)dx$

ㄷ. $6 \leq \int_4^6 f(x)dx \leq 14$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처]

2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 14 [4.00점]

211. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$ 인

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(t)$ 를

$$g(t) = \int_t^{t+1} f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$ 이면 $g(-1) < 0$ 이다.

ㄴ. $g(-1) > 0$ 이면 $f(k)=0$ 을 만족시키는 $k < -1$ 인 실수 k 가 존재한다.

ㄷ. $g(-1) > 1$ 이면 $g(0) < -1$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처]

2022년 교육청 고3공통 4월 공통범위 22 [4.00점]

212. 양수 a 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x \{f'(t+a) \times f'(t-a)\} dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 과 $x = \frac{13}{2}$ 에서만 극값을 갖는다

$f(0) = -\frac{1}{2}$ 일 때, $a \times f(1)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2027년(2028학년도) 평가원 고3공통 수능 예시 문항 20 [4.00점]

213. 최고차항의 계수가 양수이고

$$f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0 \quad (0 < \alpha < \beta < \gamma)$$

인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad h(x) = \int_0^x |f(t)| dt$$

가 있다. 함수 $g(x)$ 의 극댓값이 0이고, $h(\beta) = 8$, $h(\gamma) = 24$ 일 때, $g(\alpha) - g(\gamma)$ 의 값은?

- ① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

[출처]

2023년 교육청 고3공통 10월 공통범위 20 [4.00점]

214. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$2x^2f(x)=3\int_0^x(x-t)\{f(x)+f(t)\}dt$$

를 만족시킨다. $f'(2)=4$ 일 때, $f(6)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 22 [4.00점]

215. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 의 한

부정적분을 $F(x)$ 라 하고 $g(x)$ 의 한 부정적분을 $G(x)$ 라 할 때,

이 함수들은 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$$

$$(나) f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$$

$\int_1^3 g(x)dx$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2023년 교육청 고3공통 7월 공통범위 22 [4.00점]

216. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 가 있다.

실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) - x - f(t) + t$$

라 할 때, 방정식 $g(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를

$h(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{t \rightarrow -1} \{h(t) - h(-1)\} = \lim_{t \rightarrow 1} \{h(t) - h(1)\} = 2$$

$$(나) \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha |f(x)| dx \text{를 만족시키는 실수 } \alpha \text{의}$$

최솟값은 -1 이다.

$$(다) \text{ 모든 실수 } x \text{에 대하여 } \frac{d}{dx} \int_0^x \{f(u) - ku\} du \geq 0 \text{이}$$

되도록 하는 실수 k 의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$ 이다.

$f(6)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 20 [4.00점]

217. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$ 의 값을 구하시오.

$x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) \geq g(4) \text{이고 } |g(x)| \geq |g(3)| \text{이다.}$$

[출처]

2025년 교육청 고3공통 3월 공통범위 14 [4.00점]

218. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$x_1 \leq x_2$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 부등식

$$\int_{x_1}^{x_2} \{f(t) - f(a)\} dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a) dt$$

를 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 범위가 $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이다.

$f(1)=15, f'(1)=1$ 일 때, $f(4)$ 의 값은?

- ① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

[출처]

2022년 교육청 고3공통 7월 공통범위 15 [4.00점]

219. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x+2) & (x < 0) \\ \int_0^x tf(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a 에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = |g(x) - g(a)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a 의 값의 곱은?

- ① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$
④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

[출처]

2022년 교육청 고3공통 10월 공통범위 14 [4.00점]

220. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$\int_t^x f(s)ds = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

— <보 기> —

- ㄱ. $f(x) = x^2(x-1)$ 일 때, $g(1) = 1$ 이다.
 ㄴ. 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이면 $g(a) = 3$ 인 실수 a 가 존재한다.
 ㄷ. $\lim_{t \rightarrow b} g(t) + g(b) = 6$ 을 만족시키는 실수 b 의 값이 0과 3뿐이면 $f(4) = 12$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처]

2022년 교육청 고3공통 3월 공통범위 22 [4.00점]

221. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$ 가 있다. 양의 상수 a 에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $x|g(x)| = \int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$ 이다.
 (나) 방정식 $g(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a} f(x)dx$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2022년 교육청 고3공통 7월 공통범위 20 [4.00점]

222. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.
 (나) 방정식 $g'(x) = 0$ 의 모든 실근은 0, 3이다.

$\int_0^3 |f(x)|dx$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 14 [4.00점]

223. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} -\int_0^x f(t)dt & (x < 0) \\ \int_0^x f(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. $f(0) = 0$
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 극댓값을 갖는다.
 ㄷ. $2 < f(1) < 4$ 일 때, 방정식 $f(x) = x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2023년 교육청 고3공통 4월(5/10시행) 공통범위 22 [4.00점]

224. 두 상수 a, b ($b \neq 1$)과 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,
도함수 $g'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
- (나) $|x| < 2$ 일 때, $g(x) = \int_0^x (-t + a)dt$ 이고
 $|x| \geq 2$ 일 때, $|g'(x)| = f(x)$ 이다.
- (다) 함수 $g(x)$ 는 $x = 1, x = b$ 에서 극값을 갖는다.

$g(k) = 0$ 을 만족시키는 모든 실수 k 의 값의 합이 $p + q\sqrt{3}$ 일 때, $p \times q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.)

[출처] 2027년(2028학년도) 평가원 고3공통 수능 예시 문항 17 [4.00점]

225. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2(x+1)$ 에 대하여 원점 O 와 점

$P(2, f(2))$ 를 지나는 직선이 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 과 만나는

점을 Q 라 하고, 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 이 x 축과 만나는 점을

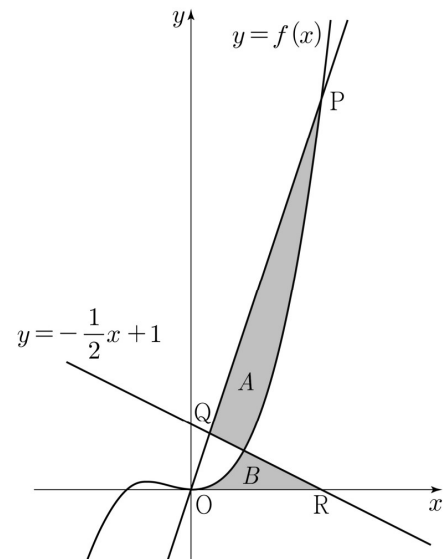
R 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 및 선분

PQ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , 곡선 $y = f(x)$ 와 직선

$y = -\frac{1}{2}x + 1$ 및 선분 OR 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라

할 때, $A - B$ 의 값은?

- ① $\frac{38}{21}$ ② $\frac{41}{21}$ ③ $\frac{44}{21}$
④ $\frac{47}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$



[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 20 [4.00점]

226. 상수 $k(k < 0)$ 에 대하여 두 함수

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 4|x| + k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하자. $30 \times S$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2023년 교육청 고3공통 3월 공통범위 14 [4.00점]

227. 세 양수 a, b, k 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} ax & (x < k) \\ -x^2 + 4bx - 3b^2 & (x \geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

— <보 기> —

ㄱ. $a=1$ 이면 $f'(k)=1$ 이다.

ㄴ. $k=3$ 이면 $a=-6+4\sqrt{3}$ 이다.

ㄷ. $f(k)=f'(k)$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로

둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

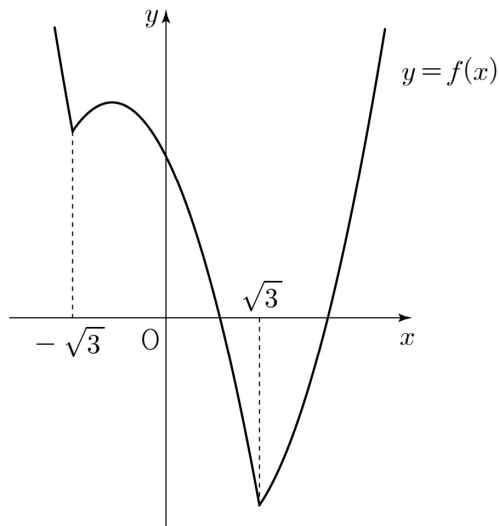
[출처]

2023년 교육청 고3공통 7월 공통범위 20 [4.00점]

228. 실수 t ($\sqrt{3} < t < \frac{13}{4}$)에 대하여 두 함수

$$f(x) = |x^2 - 3| - 2x, \quad g(x) = -x + t$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4 라 하자. $x_4 - x_1 = 5$ 일 때, 닫힌구간 $[x_3, x_4]$ 에서 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p - q\sqrt{3}$ 이다. $p \times q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이다.)



[출처]

2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 10 [4.00점]

229. 양수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

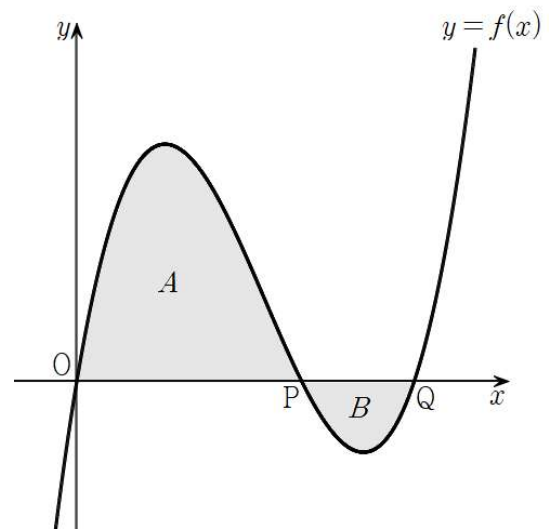
$$f(x) = kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축이 원점 O 와

두 점 P, Q ($\overline{OP} < \overline{OQ}$)에서 만난다. 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 OP 로 둘러싸인 영역을 A , 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 PQ 로 둘러싸인 영역을 B 라 하자.

$$(A \text{의 넓이}) - (B \text{의 넓이}) = 3$$

일 때, k 의 값은?



① $\frac{7}{6}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$

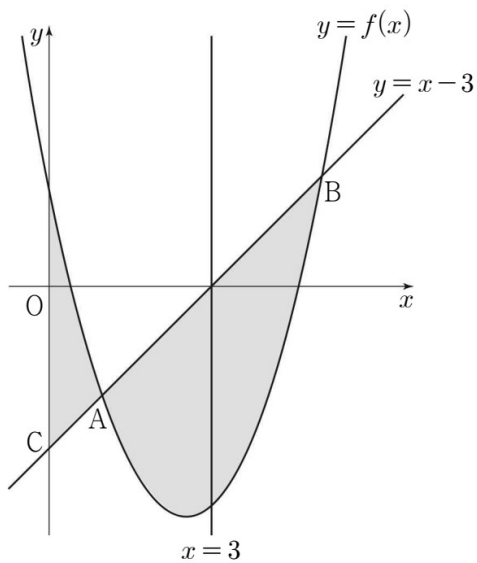
⑤ $\frac{11}{6}$

[출처]

2025년 교육청 고3공통 5월 공통범위 13 [4.00점]

230. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x-3$ 이 x 좌표가 양수인 두 점 A, B에서 만난다. 직선 $y=x-3$ 과 y 축이 만나는 점을 C라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 와 y 축 및 선분 AC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=3$ 이 이등분하고, $S_2-2S_1=6$ 일 때, $f(-1)$ 의 값은? (단, 점 A의 x 좌표는 3보다 작고, 점 B의 x 좌표는 3보다 크다.)

- ① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$
 ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$



[출처]

2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 12 [4.00점]

231. 함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$ 와 실수 t ($0 < t < 6$)에

대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t)+f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

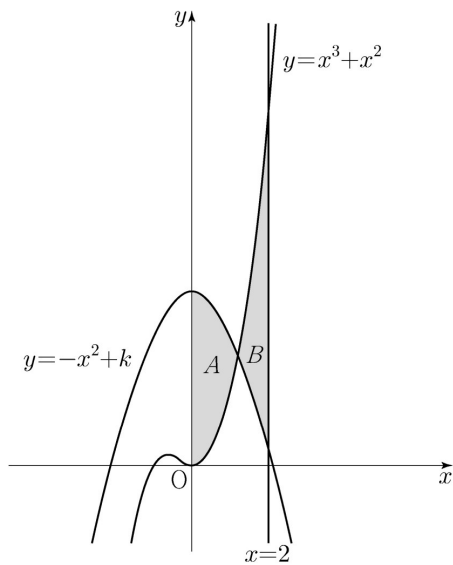
이다. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은?

- ① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$
 ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공동 11월 공통범위 10 [4.00점]

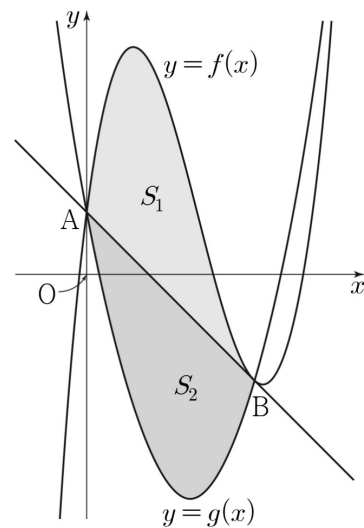
232. 두 곡선 $y = x^3 + x^2$, $y = -x^2 + k$ 와 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , 두 곡선 $y = x^3 + x^2$, $y = -x^2 + k$ 와 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하자. $A = B$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, $4 < k < 5$)

- ① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$
 ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



[출처] 2023년 교육청 고3공동 4월(5/10시행) 공통범위 12 [4.00점]

233. 다음 그림과 같이 삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$ 의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $A(0, 1)$, 점 $B(k, f(k))$ 에서 만나고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 = S_2$ 일 때, $\int_0^k g(x)dx$ 의 값은? (단, k 는 양수이다.)



- ① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8
 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

[출처]

2024년 교육청 고3공통 5월 공통범위 12 [4.00점]

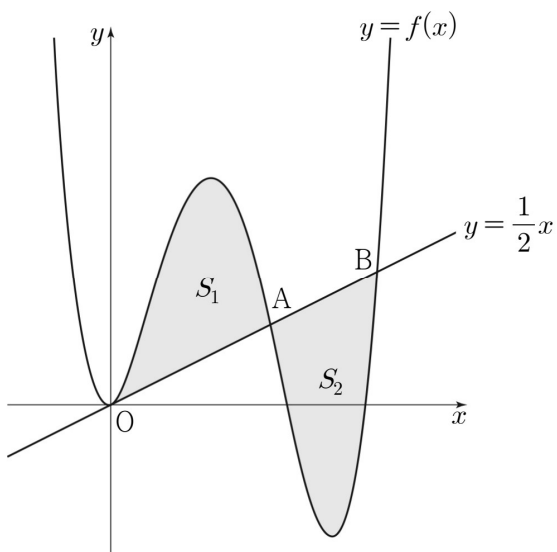
234. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선

$y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 가 원점 O 에서 접하고 x 좌표가

양수인 두 점 A, B ($\overline{OA} < \overline{OB}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 OA 로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 AB 로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2 라 하자.

$\overline{AB} = \sqrt{5}$ 이고 $S_1 = S_2$ 일 때, $f(1)$ 의 값은?

- ① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$
 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$



[출처]

2024년 교육청 고3공통 7월 공통범위 10 [4.00점]

235. 양수 a 에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각

t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 3t(a-t)$$

이다. 시각 $t=0$ 에서 점 P 의 위치는 16이고, 시각 $t=2a$ 에서 점 P 의 위치는 0이다. 시각 $t=0$ 에서 $t=5$ 까지 점 P 가 움직인 거리는?

- ① 54 ② 58 ③ 62
 ④ 66 ⑤ 70

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 14 [4.00점]

236. 실수 a ($a \geq 0$)에 대하여 수직선 위를 움직이는 점

P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 를

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$ 일 때 출발한 후 운동 방향을 한번만 바꾸도록 하는 a 에 대하여, 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$
 ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 19 [3.00점]

237. 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를

움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = \begin{cases} -t^2 + t + 2 & (0 \leq t \leq 3) \\ k(t-3) - 4 & (t > 3) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 6월 공통범위 11 [4.00점]

238. 시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 2 - t, \quad v_2(t) = 3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는?

- ① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 공통범위 10 [4.00점]

239. 시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = t^2 - 6t + 5, \quad v_2(t) = 2t - 7$$

이다. 시각 t 에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때, 함수 $f(t)$ 는 구간 $[0, a]$ 에서 증가하고, 구간 $[a, b]$ 에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$ 에서 증가한다. 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0 < a < b$)

- ① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$
④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

[출처]

2024년 교육청 고3공통 5월 공통범위 10 [4.00점]

240. 실수 m 에 대하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의
시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도를 각각

$$v_1(t) = 3t^2 + 1, v_2(t) = mt - 4$$

라 하자. 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 두 점 P, Q가 움직인
거리가 같도록 하는 모든 m 의 값의 합은?

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처]

2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 9월 공통범위 11 [4.00점]

241. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$ 일 때 각각 점 A(1)과 점
B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의
시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도는 각각

$$v_1(t) = 3t^2 + 4t - 7, v_2(t) = 2t + 4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로
4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는?

- ① 10 ② 14 ③ 19
④ 25 ⑤ 32

[출처]

2024년 교육청 고3공통 3월 공통범위 10 [4.00점]

242. 시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t-2, v_2(t)=-2t+6$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는?

- ① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

2022~2025 공통 기출 빠른정답

1. [정답] 11
2. [정답] 4
3. [정답] ②
4. [정답] ②
5. [정답] ④
6. [정답] ③
7. [정답] ④
8. [정답] ③
9. [정답] ③
10. [정답] ②
11. [정답] 13
12. [정답] 38
13. [정답] 220
14. [정답] 8
15. [정답] 36
16. [정답] ②
17. [정답] ①
18. [정답] 24
19. [정답] ⑤
20. [정답] 12
21. [정답] ③
22. [정답] ⑤
23. [정답] ⑤
24. [정답] ②
25. [정답] 13
26. [정답] ⑤
27. [정답] ②
28. [정답] 12
29. [정답] 90
30. [정답] 10
31. [정답] 110
32. [정답] 8
33. [정답] 33
34. [정답] 15
35. [정답] ③
36. [정답] ③
37. [정답] ①
38. [정답] 2
39. [정답] 110
40. [정답] 84
41. [정답] ④
42. [정답] 36
43. [정답] ③
44. [정답] ③
45. [정답] ④
46. [정답] ③
47. [정답] ③
48. [정답] ③
49. [정답] 8
50. [정답] ④
51. [정답] 15
52. [정답] 24
53. [정답] ③
54. [정답] 32
55. [정답] ③
56. [정답] ②
57. [정답] ⑤
58. [정답] ⑤
59. [정답] ⑤
60. [정답] 22
61. [정답] ④
62. [정답] ①
63. [정답] ①
64. [정답] ②
65. [정답] ⑤
66. [정답] ①
67. [정답] ④
68. [정답] ②
69. [정답] ①
70. [정답] 6
71. [정답] 64
72. [정답] ④
73. [정답] 98

74. [정답] ③
75. [정답] ①
76. [정답] ①
77. [정답] ②
78. [정답] ⑤
79. [정답] ①
80. [정답] ⑤
81. [정답] ⑤
82. [정답] ⑤
83. [정답] 30
84. [정답] ①
85. [정답] ①
86. [정답] 85
87. [정답] 19
88. [정답] 170
89. [정답] ③
90. [정답] ②
91. [정답] ③
92. [정답] ②
93. [정답] ①
94. [정답] ①
95. [정답] ①
96. [정답] ①
97. [정답] ③
98. [정답] ①
99. [정답] ③
100. [정답] 7
101. [정답] ②
102. [정답] ③
103. [정답] ①
104. [정답] 180
105. [정답] ①
106. [정답] ②
107. [정답] ②
108. [정답] 8
109. [정답] ②
110. [정답] ③

111. [정답] ③
112. [정답] ⑤
113. [정답] ③
114. [정답] ④
115. [정답] ②
116. [정답] ④
117. [정답] 64
118. [정답] 381
119. [정답] ③
120. [정답] ②
121. [정답] ④
122. [정답] 76
123. [정답] ④
124. [정답] ③
125. [정답] 231
126. [정답] ②
127. [정답] 71
128. [정답] ①
129. [정답] ①
130. [정답] 226
131. [정답] ④
132. [정답] 42
133. [정답] 25
134. [정답] ④
135. [정답] ②
136. [정답] ④
137. [정답] ③
138. [정답] ⑤
139. [정답] ⑤
140. [정답] 19
141. [정답] ③
142. [정답] 96
143. [정답] ⑤
144. [정답] ④
145. [정답] ②
146. [정답] ④
147. [정답] ③
148. [정답] 9

149. [정답] ①
 150. [정답] 154

 151. [정답] ④
 152. [정답] ⑤
 153. [정답] 25
 154. [정답] 80
 155. [정답] ③

 156. [정답] ②
 157. [정답] ③
 158. [정답] 380
 159. [정답] ③
 160. [정답] ②

 161. [정답] ②
 162. [정답] ①
 163. [정답] 729
 164. [정답] ③
 165. [정답] ⑤

 166. [정답] 200
 167. [정답] 121
 168. [정답] ①
 169. [정답] ①
 170. [정답] ③

 171. [정답] 240
 172. [정답] ⑤
 173. [정답] 13
 174. [정답] ③
 175. [정답] 82

 176. [정답] 2
 177. [정답] ⑤
 178. [정답] ②
 179. [정답] 35
 180. [정답] ④

 181. [정답] 15
 182. [정답] 58
 183. [정답] 16
 184. [정답] ②
 185. [정답] ③

186. [정답] 486
 187. [정답] 29
 188. [정답] ⑤
 189. [정답] 483
 190. [정답] 31

 191. [정답] ③
 192. [정답] ①
 193. [정답] ③
 194. [정답] 114
 195. [정답] ②

 196. [정답] 32
 197. [정답] ①
 198. [정답] 66
 199. [정답] 28
 200. [정답] ②

 201. [정답] ②
 202. [정답] ④
 203. [정답] ①
 204. [정답] ④
 205. [정답] ⑤

 206. [정답] ⑤
 207. [정답] 13
 208. [정답] 54
 209. [정답] ②
 210. [정답] ③

 211. [정답] ⑤
 212. [정답] 30
 213. [정답] ①
 214. [정답] 24
 215. [정답] 10

 216. [정답] 182
 217. [정답] 39
 218. [정답] ④
 219. [정답] ①
 220. [정답] ②

 221. [정답] 4
 222. [정답] 8
 223. [정답] ④

224. [정답] 32

225. [정답] ①

226. [정답] 80

227. [정답] ⑤

228. [정답] 54

229. [정답] ②

230. [정답] ②

231. [정답] ③

232. [정답] ④

233. [정답] ②

234. [정답] ⑤

235. [정답] ②

236. [정답] ③

237. [정답] 16

238. [정답] ⑤

239. [정답] ②

240. [정답] ⑤

241. [정답] ⑤

242. [정답] ④

2022~2025 공통 기출 해설

1) [정답] 11

[해설]

집합 X 의 원소 중 양수의 개수를 p , 음수의 개수를 q 라 하자.

$0 \notin X$ 이면 $n(A) = 2p$ 이므로 $n(A) = 9$ 를 만족시키지

않는다. 그러므로 $0 \in X$

$n(A) = 2p + 1 = 9$ 에서 $p = 4$

$n(B) = p + q + 1 = 7$ 에서 $q = 2$

따라서 집합 X 의 모든 원소의 합은

$X = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때 최대이고 그 값은

$-2 + (-1) + 0 + 2 + 3 + 4 + 5 = 11$

2) [정답] 4

[해설]

$n = 3$ 일 때 $f(3) = 1$

$n = 4$ 일 때 $2n^2 - 9n < 0$ 이므로 $f(4) = 0$

$n = 5$ 일 때 $f(5) = 1$

$n = 6$ 일 때 $2n^2 - 9n > 0$ 이므로 $f(6) = 2$

따라서

$f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 1 + 0 + 1 + 2 = 4$

3) [정답] ②

[해설]

$\sqrt{3}^{f(n)} > 0$ 이므로 $\sqrt{3}^{f(n)}$ 의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}} = 3^{\frac{f(n)}{8}}, -\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}} = -3^{\frac{f(n)}{8}}$ 이다.

조건에 의하면 실수인 것의 곱이 -9 이므로

$3^{\frac{f(n)}{8}} \times \left(-3^{\frac{f(n)}{8}}\right) = -9$, 즉 $-3^{\frac{f(n)}{4}} = -9$ 이다.

$\therefore f(n) = 8$ 이다.

함수 $f(x) = -(x-2)^2 + k$ 에 대하여 $f(n) = 8$ 을 만족하는 자연수 n 의 개수가 2이고 함수 $f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 $x = 2$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 n 은 1, 3이다.

따라서, $f(1) = 8, f(3) = 8$ 이므로 $-1 + k = 8$ 이다.

$\therefore k = 9$

4) [정답] ②

[해설]

(i) n 이 짝수일 때

$(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0$ 의 실근은 $x = \pm \sqrt[n]{8}$ 또는 $x = \pm \sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱이 양수이므로 모순

(ii) n 이 홀수일 때

$(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0$ 의 실근은 $x = \sqrt[n]{8}$ 또는 $x = \pm \sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱은

$$2^{\frac{3}{n}} \times 2^{\frac{3}{2n}} \times \left(-2^{\frac{3}{2n}}\right) = -2^{\frac{6}{n}} = -4$$

$$2^{\frac{6}{n}} = 2^2, \frac{6}{n} = 2$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $n = 3$

5) [정답] ④

[해설]

선분 $\overline{PQ}$ 를 $m : (1-m)$ 으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$$\frac{m \log_5 12 + (1-m) \log_5 3}{m + (1-m)} = 1$$

$$m(\log_5 3 + \log_5 4) + (1-m) \log_5 3 = 1$$

$$m \log_5 4 + \log_5 3 = 1, \log_5 (4^m \times 3) = 1$$

$$4^m \times 3 = 5 \text{ 이므로 } 4^m = \frac{5}{3}$$

6) [정답] ③

[해설]

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0 + 2a + (-\log_2 9)}{3}, \frac{(-\log_2 9) + \log_2 7 + a}{3} \right)$$

$$\frac{0 + 2a + (-\log_2 9)}{3} = b, 2a - \log_2 9 = 3b$$

$$b = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}\log_2 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{(-\log_2 9) + \log_2 7 + a}{3} = \log_8 7 = \frac{1}{3}\log_2 7$$

$$-\log_2 9 + \log_2 7 + a = \log_2 7$$

$$a = \log_2 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 식 ①, ②를 연립하면

$$b = \frac{2}{3}\log_2 9 - \frac{1}{3}\log_2 9 = \frac{1}{3}\log_2 9$$

$$a + 3b = \log_2 9 + \log_2 9 = \log_2 81$$

$$2^{a+3b} = 2^{\log_2 81}$$

$$2^{\log_2 81} = k \text{라 하면}$$

$$\log_2 k = \log_2 81, k = 81$$

따라서 $2^{a+3b} = 81$

7) [정답] ④

[해설]

$\log_2 \sqrt{-n^2+10n+75} - \log_4 (75-kn)$ 에서 로그의 진수 조건에 의하여

$$\sqrt{-n^2+10n+75} > 0, \quad 75-kn > 0$$

즉 $n^2-10n-75 < 0, \quad kn < 75$ 에서

$(n+5)(n-15) < 0, \quad n < \frac{75}{k}$ 이므로

$$1 \leq n < 15, \quad n < \frac{75}{k} \quad (\because n \text{ 은 자연수}) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\log_2 \sqrt{-n^2+10n+75} - \log_4 (75-kn) > 0$ 에서

$$\log_4 (-n^2+10n+75) > \log_4 (75-kn),$$

$$-n^2+10n+75 > 75-kn, \quad n(n-k-10) < 0$$

$$\therefore 1 \leq n < k+10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

(i) $k+10 > \frac{75}{k}$ 일 때

$$k(k+10)-75 > 0 \text{ 에서 } \quad k^2+10k-75 > 0,$$

$$(k+15)(k-5) > 0$$

$$\therefore k > 5 \quad (\because k \text{ 는 자연수})$$

①, ②에서 $1 \leq n < \frac{75}{k}$ 이므로 이를 만족시키는 자연수

n 의 개수가 12가 되려면

$$12 < \frac{75}{k} \leq 13, \quad \frac{75}{13} \leq k < \frac{75}{12}$$

따라서 이를 만족시키는 자연수 k 의 값은 6이다.

(ii) $k+10 \leq \frac{75}{k}$ 일 때

$$k(k+10)-75 \leq 0 \text{ 에서 } \quad k^2+10k-75 \leq 0,$$

$$(k+15)(k-5) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq k \leq 5 \quad (\because k \text{ 는 자연수})$$

①, ②에서 $1 \leq n < k+10$ 이므로 이를 만족시키는 자연수 n 의 개수가 12가 되려면

$$12 < k+10 \leq 13, \quad 2 < k \leq 3$$

따라서 이를 만족시키는 자연수 k 의 값은 3이다.

(i), (ii)에 의하여 구하려는 모든 자연수 k 의 값의 합은 $6+3=9$

8) [정답] ③

[해설]

주어진 그림에서 두 점 A, C의 x 좌표를 각각 k ($k > 0$), m ($m < 0$) 이라 하면

$$A(k, 1-2^{-k}), \quad B(k, 2^k), \quad C(m, 2^m), \quad D(m, 1-2^{-m})$$

두 점 A, C의 y 좌표가 같으므로

$$1-2^{-k} = 2^m \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{AB} = 2^k + 2^{-k} - 1, \quad \overline{CD} = 2^m + 2^{-m} - 1 \text{ 이고 } \overline{AB} = 2\overline{CD} \text{ 에서}$$

$$2^k + 2^{-k} - 1 = 2(2^m + 2^{-m} - 1) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하면

$$2^k + 2^{-k} - 1 = 2\left(1 - 2^{-k} + \frac{1}{1-2^{-k}} - 1\right)$$

$2^k = a$ ($a > 0$) 이라 하면

$$a + \frac{1}{a} - 1 = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{a}} - \frac{1}{a}\right),$$

$$\frac{a^2 - a + 1}{a} = 2 \times \frac{a^2 - a + 1}{a} \times \frac{1}{a-1}$$

이때 $a \neq 0, \quad a^2 - a + 1 \neq 0$ 이므로

$$1 = \frac{2}{a-1}, \quad a-1 = 2$$

$$\therefore a = 3$$

즉 $2^k = 3$ 에서 $k = \log_2 3$ 이고 $2^{-k} = \frac{1}{3}$ 이므로 ①에서

$$2^m = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad m = \log_2 \frac{2}{3}$$

따라서 $A\left(\log_2 3, \frac{2}{3}\right), \quad B(\log_2 3, 3), \quad C\left(\log_2 \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$

$D\left(\log_2 \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$\overline{AC} = \log_2 3 - \log_2 \frac{2}{3} = \log_2 \frac{9}{2},$$

$$\overline{AB} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3},$$

$$\overline{CD} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$$

삼각형 ABC, ACD의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \log_2 \frac{9}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \log_2 3 - \frac{7}{6},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \log_2 \frac{9}{2} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{6} \log_2 3 - \frac{7}{12}$$

따라서 구하려는 사각형 ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \left(\frac{7}{3} \log_2 3 - \frac{7}{6}\right) + \left(\frac{7}{6} \log_2 3 - \frac{7}{12}\right) \\ &= \frac{7}{2} \log_2 3 - \frac{7}{4} \end{aligned}$$

9) [정답] ③

[해설]

점 B의 좌표가 $B(0, 2^a)$ 이므로 $\overline{OB} = 2^a$

$$\overline{OB} = 3 \times \overline{OH} \text{ 에서 } \overline{OH} = \frac{2^a}{3}$$

점 A의 x좌표를 k라 하면 $A\left(k, \frac{2^a}{3}\right)$

점 A는 곡선 $y=2^{-x+a}$ 위의 점이므로

$$2^{-k+a} = \frac{2^a}{3} \text{에서 } 2^{-k} = \frac{1}{3}, 2^k = 3$$

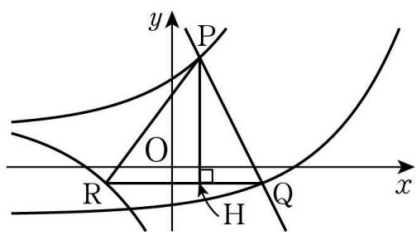
또한 점 A는 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{2^a}{3} = 2^k - 1 = 3 - 1 = 2 \text{에서 } 2^a = 6$$

따라서 $a = \log_2 6$

10) [정답] ②

[해설]



점 P에서 직선 QR에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{HQ} = t$ ($t > 0$)이라 하면 직선 PQ의 기울기가 -2 이므로

$\overline{PH} = 2t$ 이고 $\overline{HR} = 5 - t$ 이다.

직각삼각형 PRH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$(5-t)^2 + (2t)^2 = 5^2, t(t-2)=0, t=2$$

따라서 $\overline{PH} = 4$, $\overline{HR} = 3$

점 R의 x좌표를 m이라 하면 점 P의 x좌표는 $m+3$,

점 Q의 x좌표는 $m+5$ 이므로

$$P(m+3, a^{m+4}+1), Q\left(m+5, a^{m+2}-\frac{7}{4}\right),$$

$$R\left(m, -a^{m+4}+\frac{3}{2}\right)$$

점 P의 y좌표는 점 R의 y좌표보다 4만큼 크므로

$$a^{m+4}+1 = \left(-a^{m+4}+\frac{3}{2}\right)+4$$

$$a^{m+4} = \frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 Q의 y좌표와 점 R의 y좌표가 같으므로

$$a^{m+2}-\frac{7}{4} = -a^{m+4}+\frac{3}{2}$$

①을 대입하여 정리하면 $a^{m+2} = 1$

$a > 1$ 에서 $m+2=0$ 이므로 $m = -2$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a^2 = \frac{9}{4}, a > 1 \text{이므로 } a = \frac{3}{2}$$

점 P $\left(1, \frac{13}{4}\right)$ 이 직선 $y = -2x+k$ 위의 점이므로

$$\frac{13}{4} = -2 \times 1 + k, k = \frac{21}{4}$$

$$\text{따라서 } a+k = \frac{3}{2} + \frac{21}{4} = \frac{27}{4}$$

11) [정답] 13

[해설]

점 D의 좌표를 $(t, 0)$ ($t > 0$)이라 하자.

점 D는 선분 CA를 5:3으로 외분하는

점이므로 $\overline{CA} : \overline{AD} = 2 : 3$

$$\text{점 A의 x좌표는 } \frac{2}{5}t, A\left(\frac{2}{5}t, \frac{6}{5}t\right)$$

점 C의 y좌표는 $2t$, $C(0, 2t)$

$$\text{직선 BC의 방정식은 } y = -\frac{1}{3}x + 2t$$

점 B는 두 직선 $y = 3x$, $y = -\frac{1}{3}x + 2t$ 의

$$\text{교점이므로 } B\left(\frac{3}{5}t, \frac{9}{5}t\right)$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{10}}{5}t$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2 = \frac{t^2}{5} = 20$$

$t^2 = 100$ 이므로 $t = 10$

$A(4, 12)$, $B(6, 18)$ 이므로

$$12 = 2^{4-m} + n, 18 = 2^{6-m} + n$$

$$18 - 2^{6-m} = 12 - 2^{4-m}$$

$$2^{6-m} - 2^{4-m} = 6$$

$$64 \times 2^{-m} - 16 \times 2^{-m} = 6$$

$$48 \times 2^{-m} = 6, 2^{-m} = \frac{1}{8}$$

$$m = 3, n = 10$$

따라서 $m+n = 13$

12) [정답] 38

[해설]

두 곡선 $y = 2^x + \frac{k}{2}$, $y = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2$ 의 교점을 A라

하면

$$2^x + \frac{k}{2} = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$2^x = t$ 라 하면

$$t + \frac{k}{2} = \frac{k}{t} + k - 2, \quad t^2 + (2-k)t + \frac{k}{2}t - k = 0$$

$$(2t-k)(t+2) = 0$$

$$t > 0 \text{ 이므로 } t = \frac{k}{2}$$

$$2^x = t \text{ 이므로 } 2^x = \frac{k}{2} \quad \therefore x = \log_2 k - 1$$

$$\therefore A(\log_2 k - 1, k)$$

점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y = -(x - \log_2 k + 1) + k = -x + \log_2 k + k - 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

한편 ㉠에서 양변에 2를 곱하면

$$2^{x+1} + k = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2(k-2)$$

$$2^{x+1} = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + k - 4$$

점 A의 x좌표는 두 곡선 $y = 2^{x+1}$, $y = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + k - 4$

의 교점의 x좌표와 같다.

곡선 $y = 2^{x-2} - 3$ 은 $y = 2^{x+1}$ 을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. 따라서 이 두 곡선의 교점을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이 점 B의 x좌표와 같다.

$$\log_2 k - 1 + 3 = \log_2 k + 2$$

에서 점 B의 x좌표는 $\log_2 k + 2$ 이고 이 점이 직선 ㉠ 위의 점이므로

$$\therefore B(\log_2 k + 2, k - 3)$$

직선 $y = -x + \log_2 k + k - 1$ 의 y절편이 $\log_2 k + k - 1$ 이므로

삼각형 AOB의 넓이를 구하면

$$\frac{1}{2} \times (\log_2 k + k - 1) \times \{\log_2 k + 2 - (\log_2 k - 1)\}$$

$$= \frac{3}{2} \times (\log_2 k + k - 1)$$

에서

$$\frac{3}{2}(\log_2 k + k - 1) = 16$$

$$\log_2 k + k = \frac{35}{3}$$

$$\therefore p = 3, q = 35$$

$$\therefore p + q = 38$$

[다른 풀이]

두 곡선 $y = 2^x + \frac{k}{2}$, $y = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2$ 의 교점을 A라 하면

$$2^x + \frac{k}{2} = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$2^x = t$ 라 하면

$$t + \frac{k}{2} = \frac{k}{t} + k - 2, \quad t^2 + (2-k)t + \frac{k}{2}t - k = 0$$

$$(2t-k)(t+2) = 0$$

$$t > 0 \text{ 이므로 } t = \frac{k}{2}$$

$$2^x = t \text{ 이므로 } 2^x = \frac{k}{2} \quad \therefore x = \log_2 k - 1$$

$$\therefore A(\log_2 k - 1, k)$$

점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y = -(x - \log_2 k + 1) + k = -x + \log_2 k + k - 1$$

이 직선과 곡선 $y = 2^{x-2} - 3$ 의 교점의 x좌표를 m이라 하면

$$2^{m-2} - 3 = -m + \log_2 k + k - 1$$

$$\frac{2^{m-2} - \log_2 k}{(m-2) - k} = -1$$

두 점 $(m-2, 2^{m-2})$, $(k, \log_2 k)$ 를 지나는 직선의 기울기가 -1이다. 점 $(m-2, 2^{m-2})$ 는 곡선 $y = 2^x$ 위의 점이고 $(k, \log_2 k)$ 는 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 점이므로 두 점은 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

$$m-2 = \log_2 k \quad \therefore m = \log_2 k + 2$$

따라서 점 B의 좌표는 $(\log_2 k + 2, k - 3)$

삼각형 AOB의 넓이를 구하면

$$\frac{1}{2} \times (\log_2 k + k - 1) \times \{\log_2 k + 2 - (\log_2 k - 1)\}$$

$$= \frac{3}{2} \times (\log_2 k + k - 1)$$

에서

$$\frac{3}{2}(\log_2 k + k - 1) = 16$$

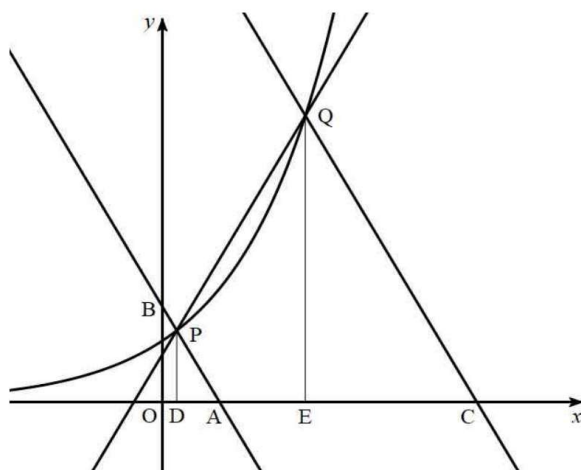
$$\log_2 k + k = \frac{35}{3}$$

$$\therefore p = 3, q = 35$$

$$\therefore p + q = 38$$

13) [정답] 220

[해설]



위 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

$\overline{PB} = k$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB} = 4\overline{PB} - \overline{PB} = 3\overline{PB} = 3k$$

이고,

$$\overline{CQ} = 3\overline{AB} = 3 \times \overline{PB} = 12\overline{PB} = 12k$$

$$\text{이므로 } \overline{AP} : \overline{CQ} = 3k : 12k = 1 : 4$$

이때 $\triangle PDA$ 와 $\triangle QEC$ 는 닮음이므로

$$\overline{PD} : \overline{QE} = \overline{AP} : \overline{CQ} = 1 : 4$$

$$\text{즉, } 2^a : 2^b = 1 : 4 \text{ 이므로 } 2^b = 4 \times 2^a = 2^{a+2} \text{에서}$$

$$b = a + 2$$

즉,

$$m = \frac{2^b - 2^a}{b - a} = \frac{2^{a+2} - 2^a}{(a+2) - a} = \frac{3 \times 2^a}{2} = 3 \times 2^{a-1}$$

이므로 직선 AB 의 방정식은

$$y - 2^a = -3 \times 2^{a-1}(x - a) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦에 $y = 0$ 을 대입하면

$$-2^a = -3 \times 2^{a-1}(x - a)$$

$$x = a + \frac{2}{3}$$

즉, 점 A 의 x 좌표가 $a + \frac{2}{3}$ 이다.

이때 원점 O 에 대하여 $\triangle APD$ 와 $\triangle ABO$ 는 닮음이므로

$$AO : \overline{DO} = AB : PB = 4 : 1$$

$$a + \frac{2}{3} : a = 4 : 1$$

$$a = \frac{2}{9}$$

$$b = a + 2 = \frac{2}{9} + 2 = \frac{20}{9}$$

따라서

$$90 \times (a + b) = 90 \times \left(\frac{2}{9} + \frac{20}{9} \right) = 90 \times \frac{22}{9} = 220$$

$$14) \overline{OA} : \overline{OB} = \sqrt{3} : \sqrt{19} \text{ 이므로}$$

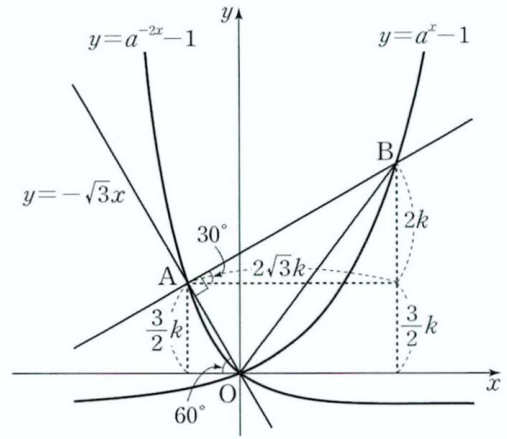
$$\overline{OA} = \sqrt{3}k, \overline{OB} = \sqrt{19}k \quad (k > 0)$$

이라 하면 직각삼각형 OAB 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AB} = \sqrt{(\sqrt{19}k)^2 - (\sqrt{3}k)^2} = 4k$$

이때 직선 $y = -\sqrt{3}x$ 의 기울기가 $-\sqrt{3}$ 이므로 직선

$y = -\sqrt{3}x$ 과 x 축이 이루는 각의 크기는 60° 이고, 다음 그림과 같이 특수각의 삼각비에 따라 길이가 결정된다.



$$\text{곧, } A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k, \frac{3}{2}k\right), B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}k, \frac{7}{2}k\right)$$

함수 $y = a^{-2x} - 1$ 에 점 A 의 좌표를 대입하면

$$a^{\sqrt{3}k} - 1 = \frac{3}{2}k \text{ 이므로}$$

$$a^{\sqrt{3}k} = \left(\frac{3}{2}k + 1\right)^3$$

함수 $y = a^x - 1$ 에 점 B 의 좌표를 대입하면

$$a^{\frac{3}{2}\sqrt{3}k} - 1 = \frac{7}{2}k \text{ 이므로}$$

$$a^{\sqrt{3}k} = \left(\frac{7}{2}k + 1\right)^2$$

$$\text{곧, } a^{\sqrt{3}k} = \left(\frac{3}{2}k + 1\right)^3 = \left(\frac{7}{2}k + 1\right)^2 \text{에서}$$

$$27k^3 - 44k^2 - 20k = 0$$

$$k(k-2)(27k+10) = 0$$

$$k > 0 \text{ 이므로}$$

$$k = 2$$

따라서

$$\overline{AB} = 4k = 8$$

15) [정답] 36

[해설]

곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 과 직선 $y = x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 k 라 하면

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$$

양변을 세제곱하면

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3k-9} = k^3$$

$$k^3 \times 5^{3k} = \left(\frac{1}{5}\right)^{3k-9} \times 5^{3k} = 5^9$$

한편, 곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}$ 이 $(2, 5)$, $(3, 1)$ 을 지나므로

$$2 < k < 3$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} \text{ 에서 } f(12) = 5^{-9} \text{ 이므로}$$

$$f(f(12)) = f(5^{-9}) = 36$$

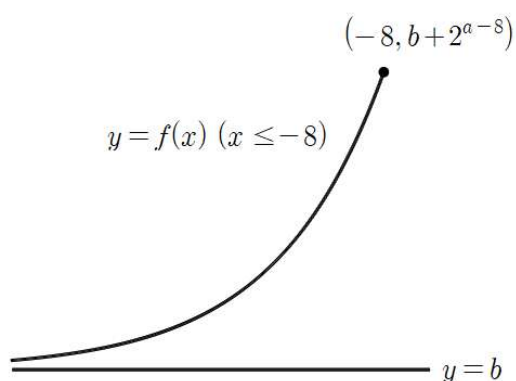
$$\therefore f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right) = f(5^{-9}) = 36$$

16) [정답] ②

[해설]

함수 $y = 2^{x+a} + b$ 는 증가함수이고, 함수 $y = 2^{x+a} + b$ 의 그래프의 점근선은 $y = b$ 이다.

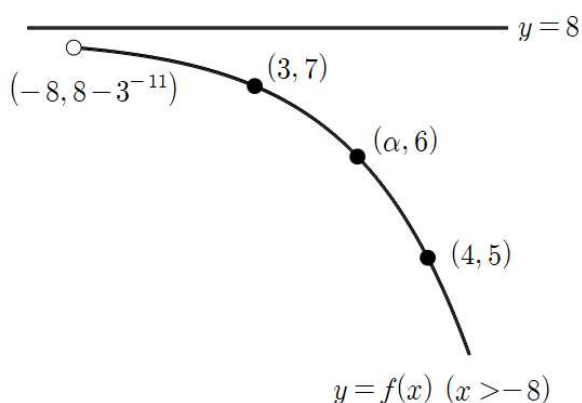
$$f(-8) = b + 2^{a-8}$$



함수 $y = -3^{x-3} + 8$ 는 감소함수이고, 함수 $y = -3^{x-3} + 8$ 의 그래프의 점근선은 $y = 8$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow -8+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -8+} (-3^{x-3} + 8) = 8 - 3^{-11}$$

$$\therefore 7 < \lim_{x \rightarrow -8+} f(x) < 8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$



집합 $\{f(x) | x \leq k\}$ 의 원소 중에서 정수인 것의 개수가 2인 실수 k 의 값의 범위는 $3 \leq k < 4$ 이다. $\dots\dots \textcircled{L}$

$$f(3) = 7, f(4) = 5$$

이때, $k \neq 4$ 이므로 $3 \leq k < 4$ 일 때, 집합 $\{f(x) | x \leq k\}$ 에서

$$5 \notin \{f(x) | x \leq k\}$$

$3 < x < 4$ 에서 $f(x) = 6$ 인 실수 x 는 오직 하나이다.

$$f(\alpha) = 6 \quad (3 < \alpha < 4)$$

이라 하자.

$f(3) = 7, f(\alpha) = 6 \quad (3 < \alpha < 4)$ 이므로 $3 \leq k < 4$ 일 때 집합

$\{f(x) | x \leq k\}$ 에서

$$\{6, 7\} \subset \{f(x) | x \leq k\}$$

②에서 k 의 최솟값이 3이고, $f(3) = 7$ 이므로 $x < 3$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 의 값이 정수인 것은 6뿐이다.

⑦에 의하여 $-8 < x < 3$ 에서 $7 < f(x) < 8$ 이므로

$x \leq -8$ 에서 $f(x) = 6$ 인 실수 x 가 존재한다.

$x \leq -8$ 에서 $f(x)$ 가 정수인 것은 6 뿐이고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선은 $y = b$ 이므로

$$b + 1 = 6 \quad \therefore b = 5$$

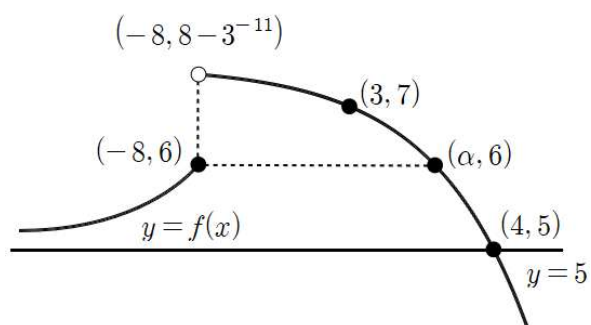
$$6 \leq f(-8) < 7, \quad 6 \leq b + 2^{a-8} < 7$$

$6 \leq b + 2^{a-8} < 7$ 에서

$$6 \leq 5 + 2^{a-8} < 7, \quad 1 \leq 2^{a-8} < 2$$

$0 \leq a - 8 < 1$ 이므로 $a = 8$ 이다.

$$\therefore a + b = 13$$



17) [정답] ①

[해설]

두 함수 $f_1(x), f_2(x)$ 를

$$f_1(x) = 2^{x+3} + b, f_2(x) = 2^{-x+5} + 3b \text{라 하자.}$$

함수 $y = f_1(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하고,

함수 $y = f_2(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

또한 두 함수 $y = f_1(x), y = f_2(x)$ 의 그래프의 점근선이 각각

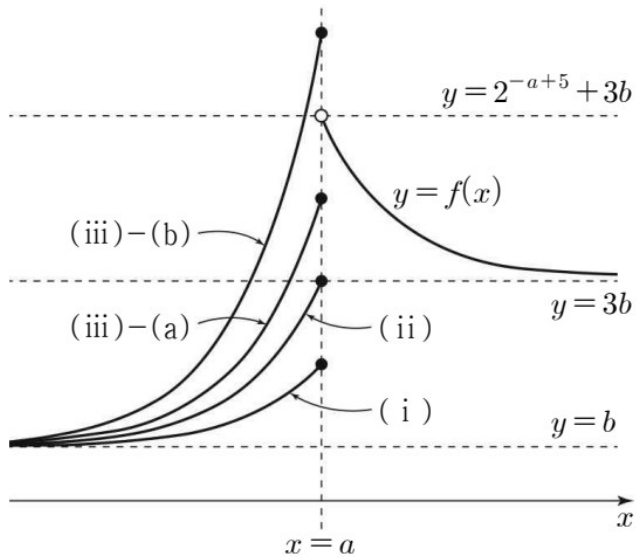
$y = b, y = 3b$ 이므로

$$\{f_1(x) | x \leq a\} = \{y | b < y \leq 2^{a+3} + b\},$$

$$\{f_2(x) | x > a\} = \{y | 3b < y < 2^{-a+5} + 3b\}$$

$2^{a+3} + b$ 와 $3b, 2^{-a+5} + 3b$ 의 대소관계에 따라 함수

$y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



(i) $2^{a+3}+b < 3b$ 일 때

$2^{a+3}+b < t < 3b$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 는 만나지 않으므로 조건을 만족시키는 실수 k 의 최댓값은 $4b+8$ 이 아니다.

(ii) $2^{a+3}+b = 3b$ 일 때

$b < t < 2^{-a+5}+3b$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 1이다. 또한 $t \geq 2^{-a+5}+3b$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 는 만나지 않는다.

(iii) $2^{a+3}+b > 3b$ 일 때

(a) $2^{a+3}+b \leq 2^{-a+5}+3b$ 일 때

$3b < t < 2^{a+3}+b$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 실수 k 의 최댓값은 $4b+8$ 이 아니다.

(b) $2^{a+3}+b > 2^{-a+5}+3b$ 일 때

$3b < t < 2^{-a+5}+3b$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 실수 k 의 최댓값은 $4b+8$ 이 아니다.

조건을 만족시키는 실수 k 의 최댓값은 $4b+8$ 이므로

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$2^{a+3}+b = 3b, \quad 2^{-a+5}+3b = 4b+8 \text{이다.}$$

두 식을 연립하여 계산하면

$$2^a - 2^{-a+3} + 2 = 0$$

$$(2^a)^2 + 2 \times 2^a - 8 = 0$$

$$(2^a + 4)(2^a - 2) = 0$$

$$2^a > 0 \text{이므로 } 2^a = 2, \quad a = 1 \text{이고 } b = 8$$

$$\text{따라서 } a+b = 9$$

18) [정답] 24

[해설]

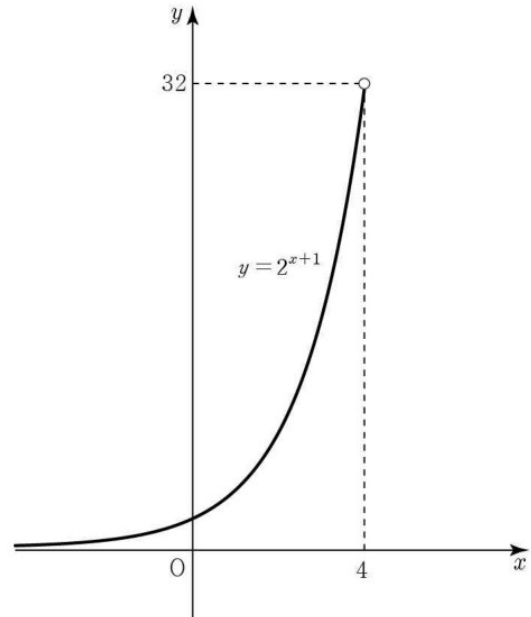
$$g(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & (x < 4) \\ 2f(x) & (x > 4) \end{cases}$$

(i) $x < 4$ 인 경우

함수 $y = 2^{x+1}$ 의 그래프는

직선 $y = 0$ 을 점근선으로 가지므로

함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

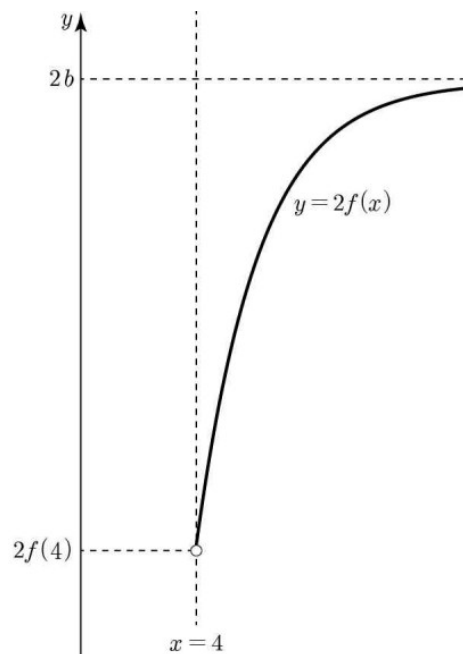


(ii) $x > 4$ 인 경우

함수 $y = 2f(x)$ 의 그래프는

직선 $y = 2b$ 를 점근선으로 가지므로

함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건을 만족시키기 위해서는

$$2b = 32, \quad b = 16$$

$$2f(4) = -2^{a-3} + 2b$$

$$= -2^{a-3} + 32 = 0$$

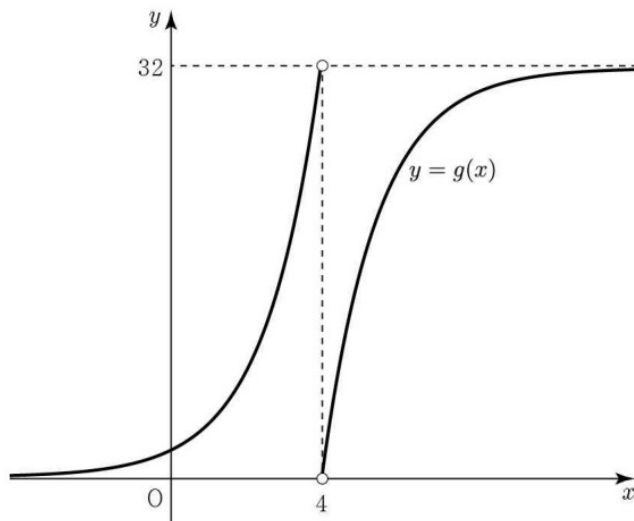
$$2^{a-3} = 2^5, \quad a = 8$$

$$g(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & (x < 4) \\ -2^{-x+9} + 32 & (x > 4) \end{cases}$$

$$\text{따라서 } g(6) = -2^3 + 32 = 24$$

[참고]

함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



19) [정답] ⑤

[해설]

두 점 A, B의 좌표를 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자.

$$-\log_2(-x) = \log_2(x+2a) \text{에서}$$

$$\log_2(x+2a) + \log_2(-x) = 0$$

$$\log_2\{-x(x+2a)\} = 0$$

$$-x(x+2a) = 1$$

$$x^2 + 2ax + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 ⑦의 두 실근이 x_1, x_2 이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1 + x_2 = -2a, \quad x_1 x_2 = 1$$

이다. 이때

$$y_1 + y_2 = -\log_2(-x_1) - \log_2(-x_2)$$

$$= -\log_2 x_1 x_2$$

$$= -\log_2 1 = 0$$

이므로 선분 AB의 중점의 좌표는 $(-a, 0)$ 이다.

선분 AB의 중점이 직선 $4x + 3y + 5 = 0$ 위에 있으므로

$$-4a + 5 = 0 \text{에서 } a = \frac{5}{4}$$

$a = \frac{5}{4}$ 를 ⑦에 대입하면

$$x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0, \quad 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$(x+2)(2x+1) = 0$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = -\frac{1}{2}$$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-2, -1), (-\frac{1}{2}, 1)$ 이고

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}$$

20) [정답] 12

[해설]

두 점 A와 B의 y 좌표는 모두 k 이므로 $A(1, k)$,

$B(\log_a k + k, k)$ 이다.

두 점 C와 D의 x 좌표는 모두 k 이므로 $C(k, 2\log_a k + k)$,

$D(k, 1)$ 이다.

두 선분 AB와 CD가 만나는 점을 E라 하면 $E(k, k)$ 이므로

$$\overline{AE} = k - 1, \quad \overline{BE} = \log_a k, \quad \overline{CE} = 2\log_a k, \quad \overline{DE} = k - 1$$

$$\text{사각형 ADBC의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CD} = \frac{85}{2} \text{ 이고,}$$

삼각형 CAD의 넓이는 35이므로

$$\text{삼각형 CBD의 넓이는 } \frac{85}{2} - 35 = \frac{15}{2} \text{ 이다.}$$

$\overline{AE} = p, \overline{BE} = q$ 라 하면 두 삼각형 CAD, CBD의 넓이의 비는

$$p : q = 35 : \frac{15}{2} = 14 : 3 \text{ 즉, } q = \frac{3}{14}p$$

이때 $\overline{CE} = 2q, \overline{DE} = p$ 이므로 삼각형 CAD의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{CD} &= \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times (\overline{CE} + \overline{DE}) \\ &= \frac{1}{2} \times p \times (2q + p) = \frac{p}{2} \times \left(\frac{3}{7}p + p\right) \\ &= \frac{5}{7}p^2 = 35 \end{aligned}$$

$$p^2 = 49 \text{이고 } p > 0 \text{이므로}$$

$$p = 7, \quad q = \frac{3}{2}$$

$$k - 1 = p, \quad \log_a k = q \text{이므로}$$

$$k = p + 1 = 8$$

$$q = \log_a k = \log_a 8 = \frac{3}{2}, \quad a^{\frac{3}{2}} = 8 \text{ 즉, } a = 4$$

$$\text{따라서 } a + k = 12$$

21) [정답] ③

[해설]

두 삼각형 OCA, ACB의 넓이가 같으므로

$$\overline{OA} = \overline{AB} \text{이다.}$$

점 A는 선분 OB의 중점이고 점 B의 x 좌표가 t 이므로

점 A의 x 좌표는 $\frac{t}{2}$ 이다.

직선 AB는 점 O를 지나므로

두 직선 OA, OB의 기울기가 같다.

그러므로 $\frac{\log_a \frac{t}{2} - 0}{\frac{t}{2} - 0} = \frac{\log_a t - 0}{t - 0}$ 에서

$$\log_a t = \log_a 4, t = 4$$

점 A는 두 곡선 $y = \log_a x, y = -2\log_a x + k$ 가

만나는 점이므로 $\log_a 2 = -2\log_a 2 + k$ 에서

$$k = 3\log_a 2$$

점 B의 좌표는 $(4, 2\log_a 2)$,

점 C의 좌표는 $(4, -\log_a 2)$ 에서

$$\overline{BC} = 2\log_a 2 - (-\log_a 2) = 3\log_a 2$$

삼각형 ACB의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times 2 = 3\log_a 2 = 2 \text{에서 } a = 2\sqrt{2}, k = 2$$

$$\text{따라서 } a \times k \times t = 2\sqrt{2} \times 2 \times 4 = 16\sqrt{2}$$

22) [정답] ⑤

[해설]

점 A의 좌표는 $(k, 2^{k-1} + 1)$ 이고 $\overline{AB} = 8$ 이므로 점 B의 좌표는 $(k, 2^{k-1} - 7)$ 이다.

직선 BC의 기울기가 -1 이고 $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ 이므로 두 점 B, C의 x 좌표의 차와 y 좌표의 차는 모두 2이다.

따라서 점 C의 좌표는 $(k-2, 2^{k-1}-5)$ 이다.

한편 점 C는 곡선 $y = 2^{x-1} + 1$ 위의 점이므로

$$2^{k-3} + 1 = 2^{k-1} - 5$$

$$\frac{1}{2} \times 2^k - \frac{1}{8} \times 2^k = 6, 2^k = 16$$

$$k = 4$$

즉, $A(4, 9), B(4, 1), C(2, 3)$ 이다.

점 B가 곡선 $y = \log_2(x-a)$ 위의 점이므로 $1 = \log_2(4-a)$,

$$4-a = 2, a = 2$$

점 D의 x 좌표는 $x-2=1$ 에서 3

사각형 ACDB의 넓이는 두 삼각형 ACB, CDB의 넓이의

합이고 $\overline{BC} \perp \overline{BD}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 10$$

23) [정답] ⑤

[해설]

두 점 A, B의 좌표를 각각

$A(a, \log_2 2a), B(b, \log_2 4b) (a < b)$ 라 하자.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{\log_2 4b - \log_2 2a}{b-a} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\log_2 4b - \log_2 2a = \frac{1}{2}(b-a)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + (\log_2 4b - \log_2 2a)^2}$$

$$= \sqrt{(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \times (b-a) = 2\sqrt{5}$$

$$b-a = 4 \dots\dots ㉠$$

$$\log_2 4b - \log_2 2a = \log_2 \frac{2b}{a} = 2, b = 2a \dots\dots ㉡$$

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a = 4, b = 8$

$A(4, 3), B(8, 5), C(4, 0)$

$$\text{따라서 삼각형 ACB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

24) [정답] ②

[해설]

함수 $y = |2^x - 4|$ 의 치역이 $\{y | y \geq 0\}$,

함수 $y = a + \log_2 x$ 의 치역이 실수 전체의 집합이고

함수 $f(x)$ 의 치역이 실수 전체의 집합이므로

$$p \leq 0 \dots\dots ㉠$$

$p < x < q$ 에서 $f(x) = a + \log_2 x$ 이고

함수 $f(x)$ 의 정의역이 실수 전체의 집합이므로

$$p \geq 0 \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $p = 0$

$$\{f(x) | x \leq 0\} = \{y | 3 \leq y < 4\}$$

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이므로

$$\{f(x) | x > 0\} = \{y | y < 3 \text{ 또는 } y \geq 4\} \text{이고}$$

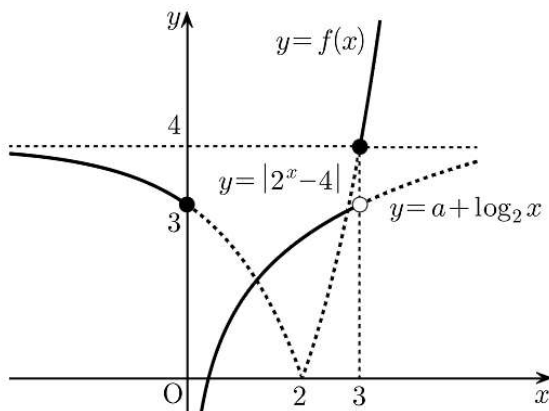
$$\{f(x) | 0 < x < q\} = \{y | y < a + \log_2 q\} = \{y | y < 3\},$$

$$\{f(x) | x \geq q\} = \{y | y \geq 4\} \text{이다.}$$

$$|2^q - 4| = 4 \text{에서 } q = 3$$

$$a + \log_2 3 = 3, a = 3 - \log_2 3$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p+q}{2}\right) &= f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 - \log_2 3 + \log_2 \frac{3}{2} \\ &= 3 - \log_2 3 + \log_2 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$



25) [정답] 13

[해설]

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 점 $C(k, \frac{19}{2})$ 라 할 때, 점 C는 선분 AB의 중점이다.

두 곡선 $y=a^x+2$, $y=\log_a x+2$ 를 y 축의 방향으로 각각 -2 만큼 평행이동한 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B를 y 축의 방향으로 각각 -2 만큼 평행이동한 두 점 A', B'도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

점 C를 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점 $C'(k, \frac{15}{2})$ 가 선분 A'B'의 중점이므로 점 C'은 직선 $y=x$ 위에 있다.

그러므로 $k=\frac{15}{2}$ 이다.

넓이가 $\frac{121}{2}\pi$ 인 원의 반지름의 길이는 $\overline{A'C'}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$ 이고

직선 A'B'의 기울기가 -1 이므로

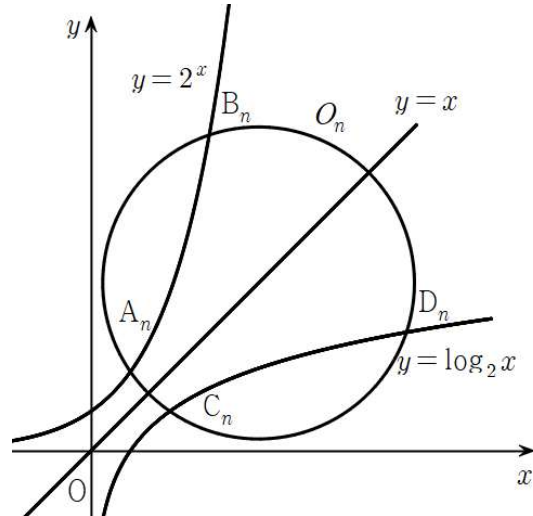
점 A'의 좌표는 $(\frac{15}{2}-\frac{11}{2}, \frac{15}{2}+\frac{11}{2})=(2, 13)$

점 A'(2, 13)이 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로 $a^2=13$

26) [정답] ⑤

[해설]

곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n 중 x 좌표가 작은 점을 A_n 이라 하고, 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n 을 지나는 원을 O_n 이라 하자. 이 원이 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 두 점을 C_n, D_n 이라 하고 이 두 점 중에서 x 좌표가 큰 점을 D_n 이라 하자. 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 와 원 O_n 네 점 A_n, B_n, C_n, D_n 은 다음과 같다.



이때, 함수 $y=2^x$ 와 함수 $y=\log_2 x$ 은 서로 역함수 관계이므로 두 점 A_n 과 C_n , 두 점 B_n 과 D_n 은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

점 A_n 의 x 좌표를 α_n 이라 하면,

$$A_n(\alpha_n, 2^{\alpha_n}), C_n(2^{\alpha_n}, \alpha_n)$$

조건 (나)에서 $\overline{A_n B_n}=n \times \sqrt{10}$ 이고, 조건 (가)에서 직선 $A_n B_n$ 의 기울기는 3이므로 점 B_n 의 좌표는

$$B_n(\alpha_n + n, 2^{\alpha_n} + 3n)$$

이고, 두 점 B_n 과 D_n 은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 점 D_n 의 좌표는

$$D_n(2^{\alpha_n} + 3n, \alpha_n + n)$$

이다. 또한 점 $B_n(\alpha_n + n, 2^{\alpha_n} + 3n)$ 은 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로

$$2^{\alpha_n} + 3n = 2^{\alpha_n + n}, \quad 2^{\alpha_n} \times (2^n - 1) = 3n$$

$$\therefore 2^{\alpha_n} = \frac{3n}{2^n - 1}$$

이때, 원 O_n 이 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 두 점 중의 x 좌표가 큰 점이 D_n 이므로

$$x_n = 2^{\alpha_n} + 3n = \frac{3n}{2^n - 1} + 3n = \frac{3n \times 2^n}{2^n - 1}$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 = 6 + 8 + \frac{72}{7} = \frac{170}{7}$$

27) [정답] ②

[해설]

곡선 $y=a^x-1$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 곡선 $y=\log_a(x+1)$ 이고 $a>1$ 이므로

점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

점 P의 좌표를 (k, k) 라 하면 점 P는 곡선 $y=\log_a(x+1)$ 위의 점이므로 $k>-1$

삼각형 OHP의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{PH} = \frac{k^2}{2}$$

$$= 2$$

에서 $k^2 = 4$, $k = 2$

따라서

곡선 $y = a^x - 1$ 이 점 $P(2, 2)$ 를 지나므로

$$2 = a^2 - 1, a^2 = 3 \text{에서 } a = \sqrt{3}$$

28) [정답] 12

[해설]

점 $A(a, b)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B 라 하면 $B(b, a)$ 이다.

조건 (가)에서 점 $A(a, b)$ 가 곡선 $y = \log_2(x+2) + k$

위의 점이므로

$$b = \log_2(a+2) + k \dots\dots \textcircled{㉠}$$

조건 (나)에서 점 $B(b, a)$ 가 곡선 $y = 4^{x+k} + 2$ 위의

점이므로

$$a = 4^{b+k} + 2 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠에서

$$b - k = \log_2(a+2), 2^{b-k} = a+2$$

$$a = 2^{b-k} - 2 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 정리하면

$$4^{b+k} + 2 = 2^{b-k} - 2$$

$$4^k \times 4^b - 2^{-k} \times 2^b + 4 = 0 \dots\dots \textcircled{㉣}$$

조건을 만족시키는 점 A 가 오직 하나이므로 방정식

㉣을 만족시키는 실수 b 는 오직 하나이고

$2^b = t (t > 0)$ 으로 놓으면 t 에 대한 이차방정식

$$4^k t^2 - 2^{-k} t + 4 = 0 \dots\dots \textcircled{㉤}$$

은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다. t 에 대한 이차방정식

㉤의 두 근의 곱은 $\frac{4}{4^k} = 4^{1-k} > 0$ 이므로 t 에 대한

이차방정식 ㉤이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 ㉤의 판별식을 D 라 할 때 $D=0$ 이어야 한다.

$$D = (-2^{-k})^2 - 4 \times 4^k \times 4$$

$$= 4^{-k} - 16 \times 4^k = 0$$

위의 방정식의 양변에 4^k 을 곱하여 정리하면

$$2^{4k+4} = 1, k = -1$$

㉤에 대입하여 정리하면

$$\frac{1}{4}t^2 - 2t + 4 = 0, \frac{1}{4}(t-4)^2 = 0$$

$$t = 4$$

즉, $2^b = 4$ 에서 $b = 2$ 이다.

$k = -1$, $b = 2$ 를 ㉡에 대입하여 정리하면

$$a = 4^{2+(-1)} + 2 = 6$$

$$\text{따라서 } a \times b = 6 \times 2 = 12$$

29) [정답] 90

[해설]

함수 $y = 6\log_3 x - b$ 의 그래프는 함수 $y = 3^{\frac{1}{6}(x+a+b)} - a$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 다음 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것과 같다.

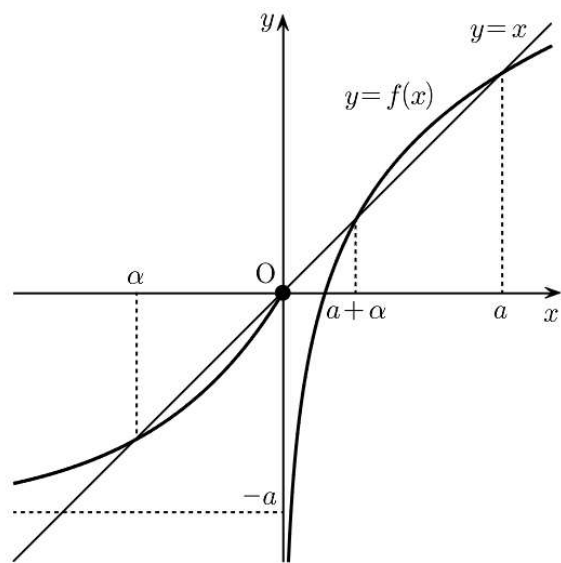
조건 (가)에서 $x \leq 0$ 에서 곡선 $y = 3^{\frac{1}{6}(x+a+b)} - a$ 가 직선 $y = x$ 와 서로 다른 두 점에서 만나고 조건 (나)에서 그 중 한 점의 x 좌표가 0이다. 다른 한 점의 x 좌표를 α

$(-a < \alpha < 0)$ 라 하면 곡선 $y = 6\log_3 x - b$ 가 직선 $y = x$ 와

만나는 두 교점의 x 좌표는 $a, a + \alpha$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 만나는 모든

점의 x 좌표의 집합은 $\{0, a, \alpha, a + \alpha\}$



(i) $b = \alpha$, $c = a + \alpha$ 일 때

$|c| = 2|b|$ 이고 $c > 0$, $b < 0$ 이므로

$$a + \alpha = -2\alpha, \quad \alpha = -\frac{1}{3}a$$

$$b = -\frac{1}{3}a, \quad a + \alpha = \frac{2}{3}a \text{이므로 두 점 } (a, a),$$

$(\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a)$ 가 곡선 $y = 6\log_3 x + \frac{1}{3}a$ 위의 점이다.

$$a = 6\log_3 a + \frac{1}{3}a, \quad \frac{2}{3}a = 6\log_3 \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a$$

$$\frac{2}{3}a = 6\log_3 a = 12\log_3 \frac{2}{3}a \text{이므로}$$

$$\frac{4}{9}a^2 = a, \quad a = \frac{9}{4}$$

이는 $\frac{2}{3}a = 6\log_3 a$ 를 만족시키지 않으므로 모순이다.

(ii) $b = a + \alpha$, $c = \alpha$ 일 때

$|c|=2|b|$ 이고 $c < 0, b > 0$ 이므로

$$-\alpha = 2a + 2\alpha, \quad \alpha = -\frac{2}{3}a$$

$b = \frac{1}{3}a, a + \alpha = \frac{1}{3}a$ 이므로 두 점 $(a, a), \left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right)$ 가

곡선 $y = 6\log_3 x - \frac{1}{3}a$ 위의 점이다.

$$a = 6\log_3 a - \frac{1}{3}a, \quad \frac{1}{3}a = 6\log_3 \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}a$$

$$\frac{4}{3}a = 6\log_3 a = 12\log_3 \frac{1}{3}a \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{9}a^2 = a, \quad a = 9$$

이는 $\frac{4}{3}a = 6\log_3 a$ 를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a = 9, b = 3$

$$\therefore a^2 + b^2 = 90$$

30) [정답] 10

[해설]

$f_1(x) = -x^2 + 6x, f_2(x) = a\log_4(x-5)$ 라 하자.

$t+1 \leq 6$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 최댓값 $g(t)$ 는 이차함수

$f_1(x) = -x^2 + 6x$ 에서 구해진다.

$f_1(x) = -x^2 + 6x$ 의 최댓값은 $x=3$ 에서 9이므로

$t+1 < 3$ 일 때, $g(t) = -(t+1)^2 + 6(t+1)$

$t-1 \leq 3 \leq t+1$ 일 때, $g(t) = 9$

$3 < t-1, t+1 \leq 6$ 일 때, $g(t) = -(t-1)^2 + 6(t-1)$

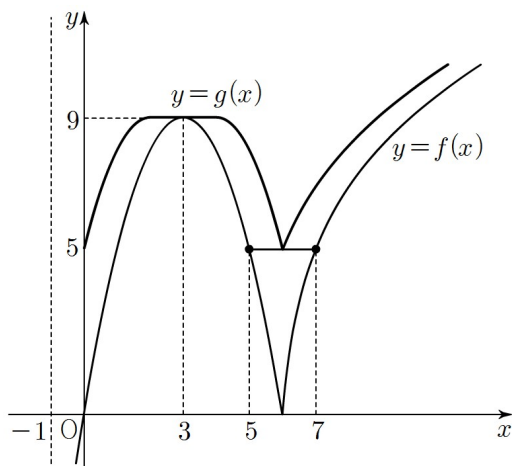
이다.

$$\therefore g(t) = \begin{cases} -t^2 + 4t + 5 & (0 \leq t < 2) \\ 9 & (2 \leq t \leq 4) \\ -t^2 + 8t - 7 & (4 < t \leq 5) \end{cases}$$

$5 < t \leq 7$ 일 때는 $f_1(t-1)$ 과 $f_2(t+1)$ 중에 큰 값이 $g(t)$ 이고,

$t > 7$ 일 때 a 가 양수이므로 $f_2(x) = a\log_4(x-5)$ 가

증가함수이고 $g(t) = f_2(t+1)$ 이다.



$0 \leq t \leq 5$ 에서 $g(t)$ 의 최솟값이 5이므로 $[0, \infty)$ 에서 $g(t)$ 의

최솟값이 5이기 위해서는 $t > 5$ 에서 $g(t)$ 의 최솟값이 5 이상이어야 한다.

$f_1(x) = -x^2 + 6x = 5$ 에서 $x=1$ 또는 $x=5$

$f_2(7) < f_1(5) = 5$ 이면 $t > 5$ 에서 $g(t)$ 의 최솟값이 5보다 작게 되므로 $f_2(7) \geq 5$ 이어야 한다.

따라서 $f_2(7) \geq 5$ 에서

$$a\log_4 2 \geq 5, \quad a \geq 10$$

따라서 구하는 양수 a 의 최솟값은 10이다.

31) [정답] 110

[해설]

ㄱ. $t=1$ 일 때, 두 곡선 $y=1-\log_2 x$ 와 $y=2^{x-1}$ 의 교점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 $f(1)=1$

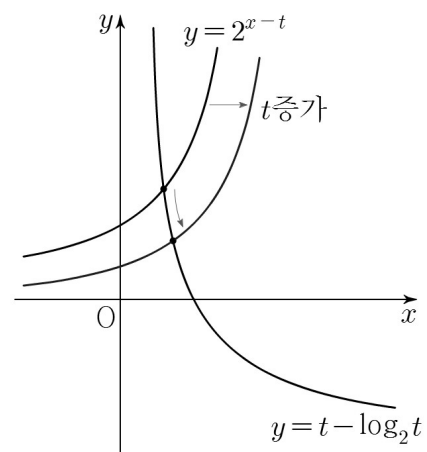
$t=2$ 일 때, 두 곡선 $y=2-\log_2 x$ 와 $y=2^{x-2}$ 의 교점의 좌표는 $(2, 1)$ 이므로 $f(2)=2$ (참)

$$\therefore A = 100$$

ㄴ. 실수 t 의 값이 증가하면 함수 $y=t-\log_2 x$ 는 y 축의

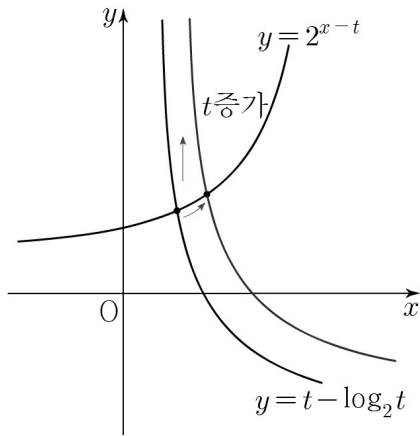
양의 방향으로 평행이동하고, 함수 $y=2^{x-t}$ 는 x 축의 양의 방향으로 평행이동한다.

$a < b$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 두 곡선 $y=a-\log_2 x$ 와 $y=2^{x-a}$ 의 교점을 P, 두 곡선 $y=a-\log_2 x$ 와 $y=2^{x-b}$ 의 교점을 Q라 하면 [그림1]과 같이 평행이동에 의해 Q의 x 좌표가 P의 x 좌표보다 크다.



[그림1]

또 두 곡선 $y=b-\log_2 x$ 와 $y=2^{x-b}$ 의 교점을 R라 하면 [그림2]와 같이 평행이동에 의해 R의 x 좌표가 Q의 x 좌표보다 크다.

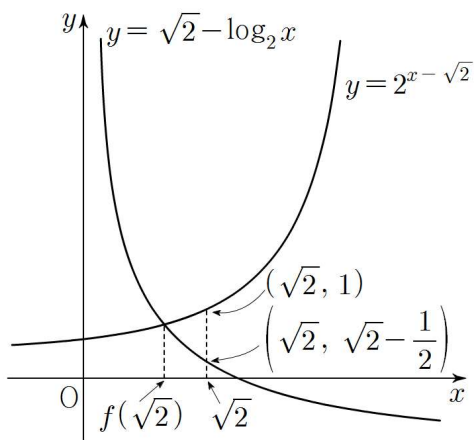


[그림2]

따라서 R의 x좌표가 P의 x좌표보다 크므로 t가 증가하면 f(t)의 값도 증가한다. (참)

$$\therefore B=10$$

ㄷ.



$t = \sqrt{2}$ 일 때, 두 함수 $y = \sqrt{2} - \log_2 x$ 와 $y = 2^{x-\sqrt{2}}$ 에서 $x = \sqrt{2}$ 에 대한 함수값은 각각

$$\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \quad 2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 1$$

이고, $\sqrt{2} - \frac{1}{2} < 1$ 이다.

즉, $\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{2} < 2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}$ 이므로 $x = \sqrt{2}$ 는 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표보다 큰 곳에 있다.

$$\therefore f(\sqrt{2}) < \sqrt{2} \quad (\text{거짓})$$

$$\therefore C=0$$

$$\text{이상에서} \quad A+B+C=100+10+0=110$$

32) [정답] 8

[해설]

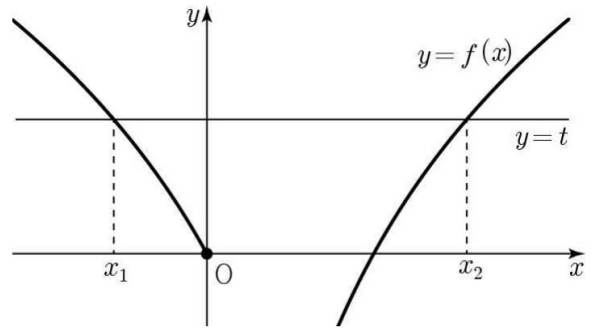
(i) $m = -10$ 인 경우

$$f(0) = |10 - 10| = 0$$

$t > 0$ 일 때,

방정식 $5\log_2(4-x) - 10 = t$ 의 실근을 x_1 ,

방정식 $5\log_2 x - 10 = t$ 의 실근을 x_2 라 하자.



$$5\log_2(4-x_1) - 10 = 5\log_2 x_2 - 10$$

$$\log_2(4-x_1) = \log_2 x_2$$

$$4-x_1 = x_2, \quad x_1 + x_2 = 4$$

$t > 0$ 인 모든 실수 t에 대하여

$g(t) = 4$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m < -10$ 인 경우

$x < 0$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α 라 하면

$$f(x) = \begin{cases} 5\log_2(4-x) + m & (x \leq \alpha) \\ -5\log_2(4-x) - m & (\alpha < x \leq 0) \\ 5\log_2 x + m & (x > 0) \end{cases}$$

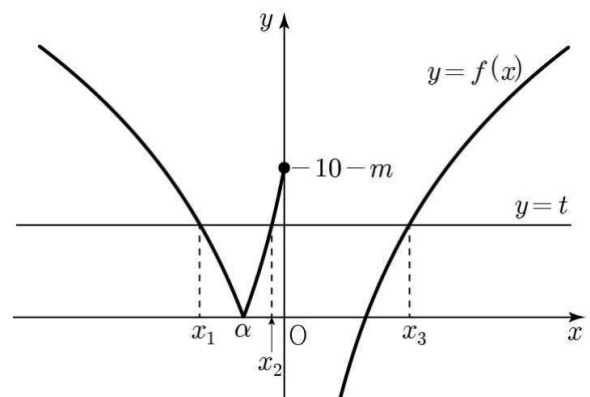
$$f(0) = |10 + m| = -10 - m$$

① $0 < t < -10 - m$ 일 때,

방정식 $5\log_2(4-x) + m = t$ 의 실근을 x_1 , 방정식

$-5\log_2(4-x) - m = t$ 의 실근을 x_2 , 방정식

$5\log_2 x + m = t$ 의 실근을 x_3 이라 하자.



$$5\log_2(4-x_1) + m = 5\log_2 x_3 + m$$

$$\log_2(4-x_1) = \log_2 x_3$$

$$4-x_1 = x_3, \quad x_1 + x_3 = 4$$

$$g(t) = x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + 4 < 4 \text{ 이고}$$

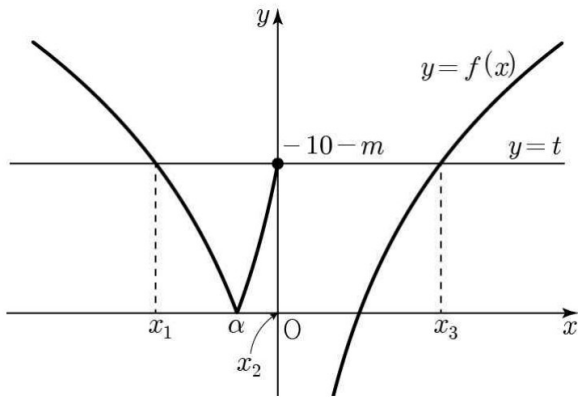
$g(t)$ 의 값은 일정하지 않다.

② $t = -10 - m$ 일 때,

방정식 $5\log_2(4-x) + m = t$ 의 실근을 x_1 , 방정식

$-5\log_2(4-x) - m = t$ 의 실근을 x_2 , 방정식

$5\log_2 x + m = t$ 의 실근을 x_3 이라 하자.



$$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2x_3+m$$

$$\log_2(4-x_1)=\log_2x_3, 4-x_1=x_3$$

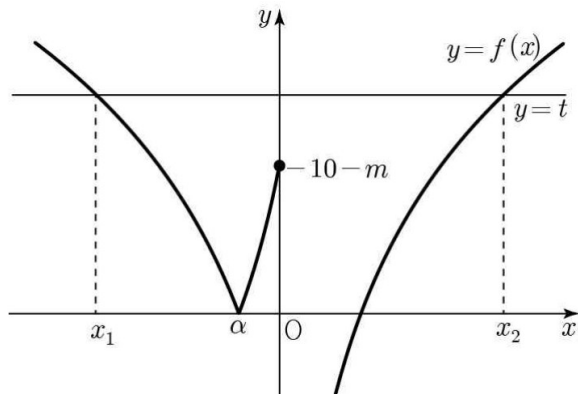
$$x_1+x_3=4, x_2=0 \text{ 이므로}$$

$$g(t)=x_1+x_2+x_3=4$$

③ $t > -10-m$ 일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$ 의 실근을 x_1 , 방정식

$5\log_2x+m=t$ 의 실근을 x_2 라 하자.



$$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2x_2+m$$

$$\log_2(4-x_1)=\log_2x_2$$

$$4-x_1=x_2, x_1+x_2=4$$

$$g(t)=x_1+x_2=4$$

①, ②, ③에 의하여 $t \geq -10-m$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $g(t)=4$

(i), (ii)에 의하여 $t \geq a$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $g(t)=g(a)$ 가 되도록 하는 a 의 최솟값은 $-10-m$ 이다.

$$-10-m=2, m=-12$$

$$\text{따라서 } f(m)=f(-12)$$

$$=|5\log_2(4+12)-12|$$

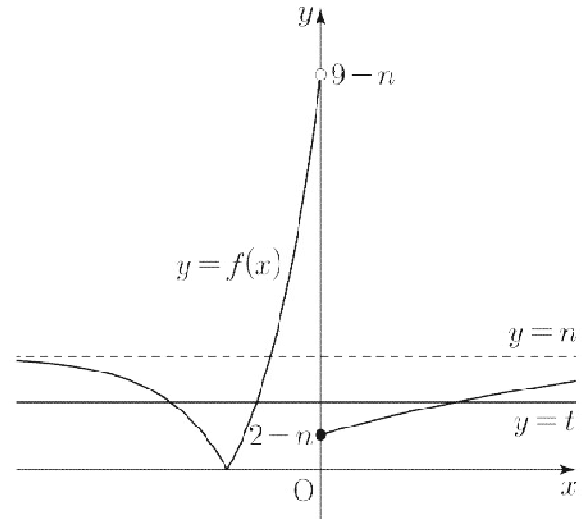
$$=8$$

33) [정답] 33

[해설]

n 의 값에 따라 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

(i) $1 \leq n \leq 2$ 일 때

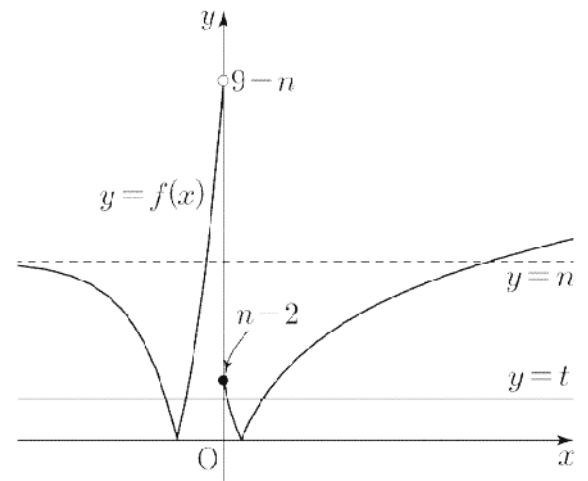


$2-n \leq t \leq n$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는

점의 개수가 최대이고, 즉 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 3이다.

(ii) $3 \leq n \leq 8$ 일 때

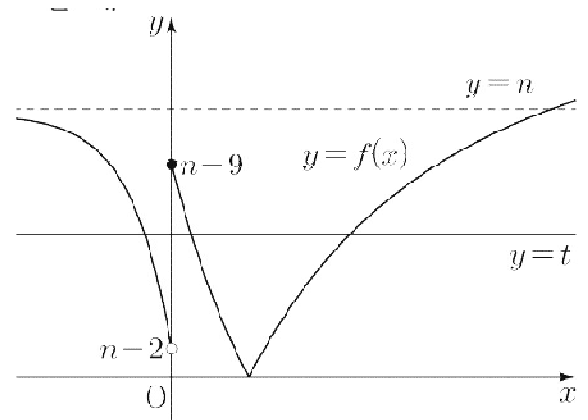


$0 < t \leq n-2$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는

점의 개수가 최대이고, 즉 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 4이다.

(iii) $n \geq 9$ 일 때



$n-9 < t \leq n-2$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는

점의 개수가 최대이고, 즉 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 3이다.

(i)~(iii)에 의하여

함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4가 되도록 하는

모든 자연수 n 의 값의 합은

$$3+4+\cdots+8=33 \text{ 이다.}$$

34) [정답] 15

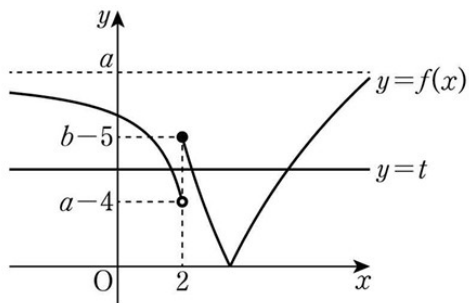
[해설]

$x < 2$ 에서 함수 $y = \frac{4}{x-3} + a$ 는 감소한다.

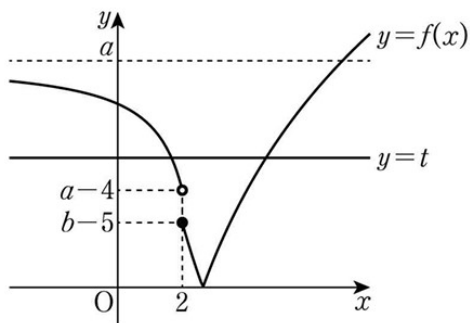
함수 $y = 5\log_2 x - b$ 는 증가하고 $f(2) = |5-b|$ 이다.

(i) $5-b < 0, b > 5$ 인 경우

$a-4 < b-5$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



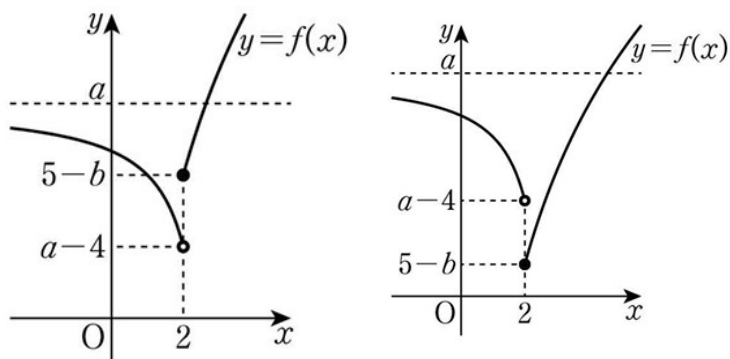
(가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 는 서로 다른 세 점에서 만나지 않아야 하므로 아래 그림과 같이 $a-4 \geq b-5, b-a \leq 1$ 을 만족시켜야 한다.



(나)에서 $g(t)=2$ 가 되도록 하는 자연수 t 는 $a-1, a-2, a-3$ 과 $b-5$ 이하의 자연수이므로 t 의 개수가 6이면 $b-5=3, b=8$ 이다. $b-a \leq 1$ 이므로 $8-a \leq 1$ 에서 $a \geq 7$ 이다. 그러므로 $a \geq 7, b=8$ 이다.

(ii) $5-b \geq 0, b \leq 5$ 인 경우

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(t)=2$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 는 $x < 2$ 에서 한 점에서 만나고, $x \geq 2$ 에서 한 점에서 만난다. 그런데 $x < 2$ 에서 $a-4 < f(x) < a$ 이고, $a-4$ 보다 크고 a 보다 작은 정수는 $a-3, a-2, a-1$ 로 3개뿐이므로 자연수 t 의 최대 개수는 3이고 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a \geq 7, b=8$ 이므로 $a+b \geq 15$

따라서 $a+b$ 의 최솟값은 15이다.

35) [정답] ③

[해설]

자연수 a, b 에 대하여 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수

$f(x) = a \cos bx + 3$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이고 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 최댓값

13을 가지므로

$$b = 6k \quad (k \text{는 자연수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 13$ 에서

$$a \cos\left(6k \times \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 13, \quad a \cos 2k\pi = 10$$

$\cos 2k\pi = 1$ 이므로 $a = 10$

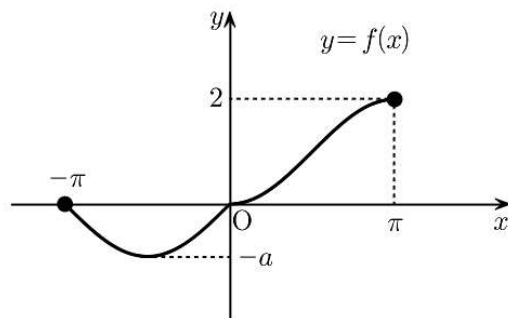
①에서 자연수 b 의 최솟값은 6이므로 $a+b$ 의 최솟값은 16이다.

36) [정답] ③

[해설]

(i) $a > 0$ 인 경우

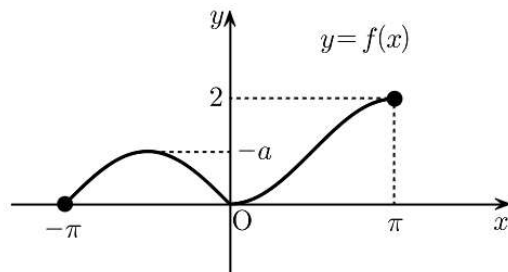
닫힌구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$M=2, m=-a$ 이므로 $M-m=4$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 $2-(-a)=4$ 에서 $a=2$

(ii) $-2 \leq a < 0$ 인 경우

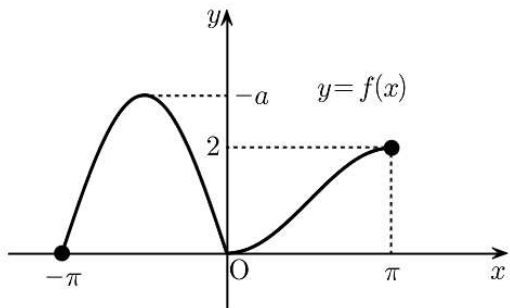
닫힌구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$M=2, m=0$ 이므로 $M-m=4$ 를 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

(iii) $a < -2$ 인 경우

단한구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$M = -a$, $m = 0$ 이므로 $M - m = 4$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 $-a = 4$ 에서 $a = -4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 a 의 값의 곱은 $2 \times (-4) = -8$

37) [정답] ①

[해설]

삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 5 = \frac{15}{2}$ 이므로 $\overline{AB} = 3$,

이때 $\overline{BC} = \overline{AB} + 6 = 9$

함수 $y=f(x)$ 의 주기가 $2b$ 이므로

$2b = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 12$, $b = 6$

선분 AB의 중점의 x 좌표가 3이므로

점 A의 좌표는 $(\frac{3}{2}, 5)$ 이다.

점 A는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(\frac{3}{2}) = 5$ 에서 $a \sin \frac{\pi}{4} + 1 = 5$, $a = 4\sqrt{2}$

따라서 $a^2 + b^2 = (4\sqrt{2})^2 + 6^2 = 32 + 36 = 68$

38) [정답] 2

[해설]

삼각함수 $y = a \sin \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, 최댓값은 a ,

최솟값은 $-a$ 이다.

삼각함수 $y = a \cos \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$,

최댓값은 a , 최솟값은 $-a$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근이므로

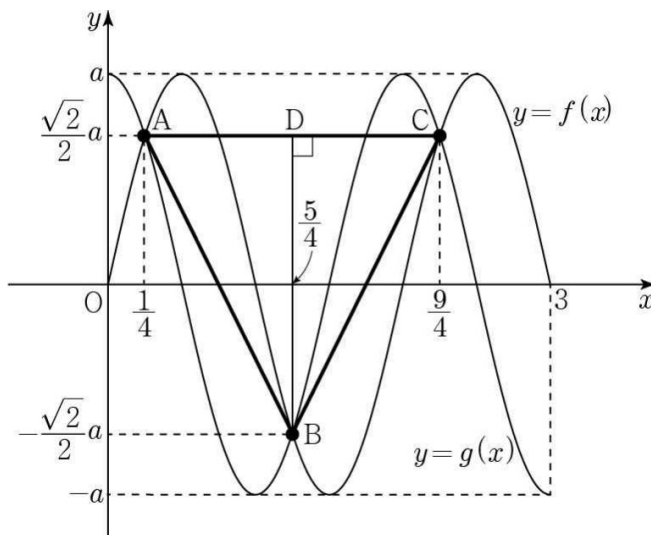
$a \sin \pi x = a \cos \pi x$, $\tan \pi x = 1$,

$\pi x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi$ ($0 \leq \pi x \leq 3\pi$)

$x = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}$

곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 서로 다른 세 점을

$A(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$, $B(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}a)$, $C(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$ 라 하고, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자.



$\overline{AC} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$

$\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a - (-\frac{\sqrt{2}}{2}a) = \sqrt{2}a$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2}a = 2$

$a = \sqrt{2}$

따라서 $a^2 = 2$

39) [정답] 110

[해설]

$0 < k < \frac{2}{t}$ 에서 $0 < tk\pi < 2\pi$

$f(k)=3k$ 에서 $\sin(tk\pi) = \sqrt{3}k > 0$ 이고

$g(k)=3k$ 에서 $\cos(tk\pi) = -k < 0$ 이므로

$\frac{\pi}{2} < tk\pi < \pi$

$f(k)=g(k)$ 에서 $\tan(tk\pi) = -\sqrt{3}$ 이므로

$tk\pi = \frac{2}{3}\pi$, $tk = \frac{2}{3}$

$f(k)=3k$ 에서 $\sqrt{3} \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2} = 3k$ 이므로

$k = \frac{1}{2}$, $t = \frac{4}{3}$

따라서 $60(t+k) = 60(\frac{4}{3} + \frac{1}{2}) = 110$

40) [정답] 84

[해설]

(가)에서 $f(x)=0$ 이고 $-\frac{1}{a} \leq x \leq \frac{1}{a}$ 인 모든 실수 x 의 값의

합이 $\frac{1}{2}$ 이 되기 위해서는

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \frac{1}{a} = \frac{1}{2}, a=1 \text{ 또는 } a=2 \text{이다.}$$

$a=1$ 이면 $b=-1$ 이고 $-\frac{1}{a} \leq x \leq \frac{1}{a}$ 에서 $f(x)=\frac{2}{5}$ 인 모든

실수 x 의 값의 합이 1이 되어 (나)를 만족시키지 않는다.

$a=2$ 이면 (나)에 의해 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선

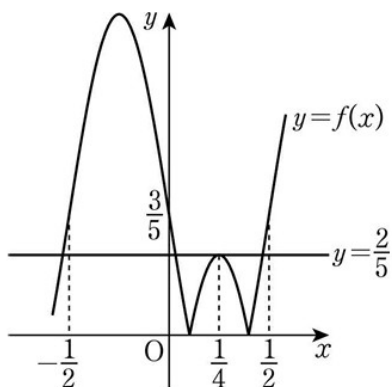
$y=\frac{2}{5}$ 가 세 점에서 만나야 하므로

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left| \sin \frac{\pi}{2} + b \right| = |1+b| = \frac{2}{5}$$

$b = -\frac{7}{5}$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나지

않으므로 $b = -\frac{3}{5}$

$$\text{따라서 } 60(a+b) = 60\left(2 - \frac{3}{5}\right) = 60 \times \frac{7}{5} = 84$$



41) [정답] ④

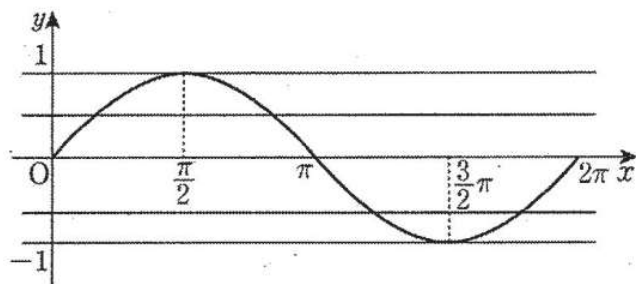
[해설]

(가)에서 $g(a\pi) = -1$ 또는 $g(a\pi) = 1$ 이다.

$$\sin(a\pi) = -1 \text{에서 } a = \frac{3}{2}, \sin(a\pi) = 1 \text{에서 } a = \frac{1}{2}$$

(나)에서 방정식 $f(g(x))=0$ 의 해가 존재하므로

$-1 \leq t \leq 1$ 이고 $f(t)=0$ 인 실수 t 가 존재한다.



$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $g(x)=t$ 의 모든 해의 합은

$t = -1$ 일 때 $\frac{3}{2}\pi$, $-1 < t \leq 0$ 일 때 3π ,

$0 < t < 1$ 일 때 π , $t=1$ 일 때 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

$0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $f(g(x))=0$ 의 모든 해의 합이

$\frac{5}{2}\pi$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 두 실근 $-1, \alpha$ 를 가지고

$0 < \alpha < 1$ 이다.

(i) $a = \frac{3}{2}$ 인 경우

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + b \text{에서 } f(-1)=0 \text{이므로}$$

$$f(-1) = b - \frac{1}{2} = 0 \text{ 즉, } b = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = (x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right) \text{에서}$$

방정식 $f(x)=0$ 의 두 근은 $x = -1$ 또는

$x = -\frac{1}{2}$ 이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a = \frac{1}{2}$ 인 경우

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + b \text{에서 } f(-1)=0 \text{이므로}$$

$$f(-1) = b + \frac{1}{2} = 0 \text{ 즉, } b = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{에서}$$

방정식 $f(x)=0$ 의 두 근은 $x = -1$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 이고 $f(2) = \frac{9}{2}$ 이다.

42) [정답] 36

[해설]

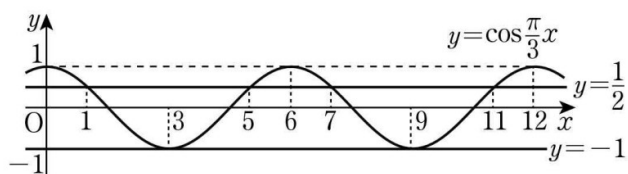
$f(g(x))=g(x)$ 에서 $g(x)=t$ ($-1 \leq t \leq 1$)이라 하면

$$f(t)=t \text{에서 } 2t^2 + 2t - 1 = t, (2t-1)(t+1)=0$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = -1 \text{이므로 } g(x) = \frac{1}{2} \text{ 또는 } g(x) = -1$$

함수 $g(x) = \cos \frac{\pi}{3}x$ 의 주기는 6이고, $g(1)=g(5)=\frac{1}{2}$,

$g(3) = -1$ 이다.



그러므로 $0 \leq x < 12$ 에서 $g(7)=g(11)=\frac{1}{2}$, $g(9) = -1$ 이다.

따라서 구하는 모든 실수 x 의 값의 합은

$$1+3+5+7+9+11=36$$

43) [정답] ③

[해설]

세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 $x_1(0 < x_1 < 1)$, x_2 , x_3 이라

하면 삼각함수 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기가 4이므로 $x_2 = 2 - x_1$,

$$x_3 = x_1 + 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (2 - x_1) + (x_1 + 4)$$

$$= x_1 + 6 = \frac{25}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 2 - x_1 = \frac{7}{4}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = x_2 - x_1 = \frac{3}{2}$$

44) [정답] ③

[해설]

$$f(x) = \cos \frac{\pi x}{6} \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$$

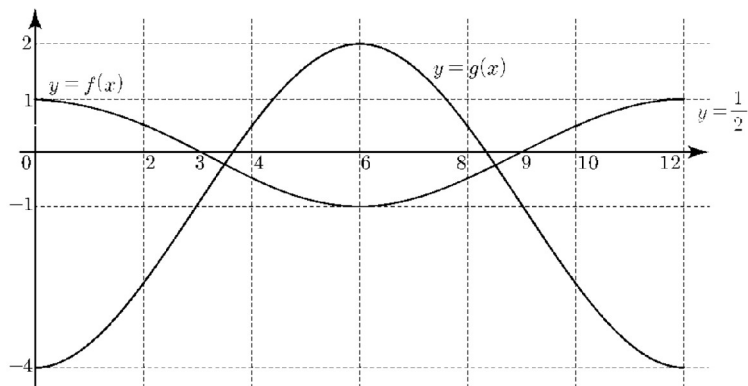
함수 $f(x)$ 는 $x=6$ 에 대하여 대칭이므로 $\alpha_1 < \alpha_2$ 라 하면

$$\alpha_2 = 12 - \alpha_1$$

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = 8 \text{에서 } |2\alpha_1 - 12| = 8$$

$$\alpha_1 = 2 \text{ 또는 } \alpha_1 = 10$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 \text{이므로 } \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 10 \text{이다.}$$



$$f(2) = f(10) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{이므로 } k = \frac{1}{2} \text{이다.}$$

곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 가 만나는 두 점의 x 좌표는

$$-3\cos \frac{\pi x}{6} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$x = 4 \text{ 또는 } x = 8$$

$$\therefore |\beta_1 - \beta_2| = 4$$

45) [정답] ④

[해설]

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = 2$ 와 만나는 점의 x 좌표는

$$0 \leq x < \frac{4\pi}{a} \text{일 때 방정식 } \left| 4\sin\left(ax - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \right| = 2 \dots\dots \textcircled{1}$$

의 실근과 같다.

$$ax - \frac{\pi}{3} = t \text{라 하면 } -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{11\pi}{3} \text{이고}$$

$$|4\sin t + 2| = 2 \dots\dots \textcircled{2}$$

에서 $\sin t = 0$ 또는 $\sin t = -1$

$$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{11\pi}{3} \text{일 때, 방정식 } \textcircled{2} \text{의 실근은}$$

$$0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, 3\pi, \frac{7\pi}{2}$$

의 6개이고 이 6개의 실근의 합은 11π 이다.

따라서 $n=6$ 이고 방정식 $\textcircled{1}$ 의 6개의 실근의 합이 39 이므로

$$39a - \frac{\pi}{3} \times 6 = 11\pi, a = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{따라서 } n \times a = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

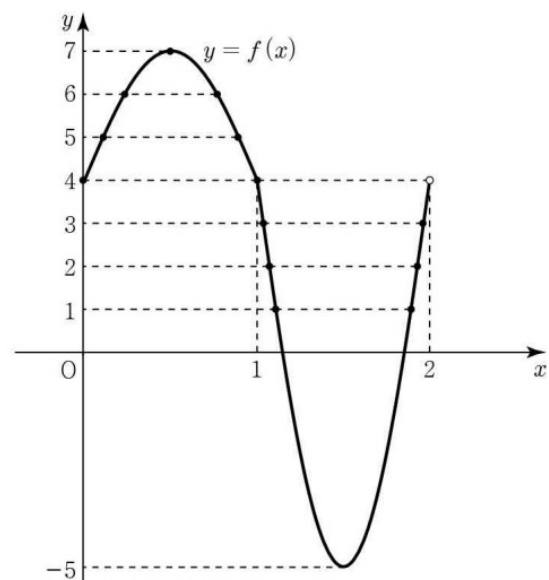
46) [정답] ③

[해설]

$$f(x) = \begin{cases} 3\sin \pi x + 4 & (0 \leq x < 1) \\ 9\sin \pi x + 4 & (1 \leq x < 2) \end{cases}$$

$$\text{두 함수 } y = 3\sin \pi x + 4, y = 9\sin \pi x + 4 \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

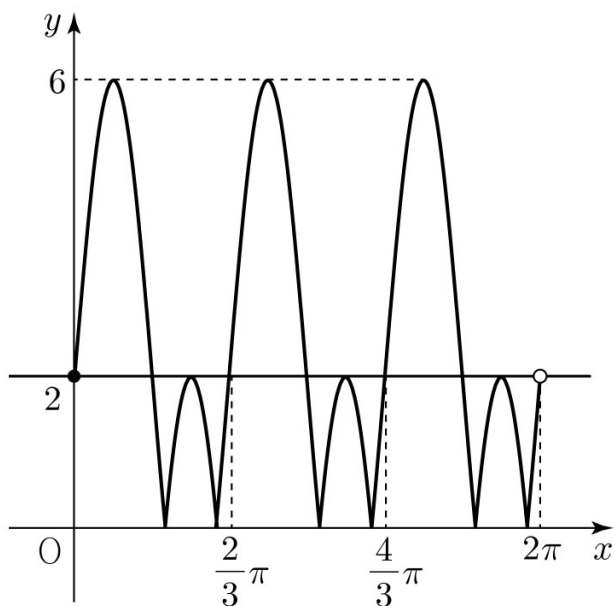


따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 중 y 좌표가 자연수인 점의 개수는 13

47) [정답] ③

[해설]

삼각함수 $y = 4\sin 3x + 2$ 는 주기가 $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값이 6, 최솟값이 -2 이므로 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 곡선 $y = |4\sin 3x + 2|$ 는 다음과 같다.



따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 곡선 $y = |4\sin 3x + 2|$ 와 직선 $y = 2$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수는 9

48) [정답] ③

[해설]

함수 $y = \sin kx$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$ 의

서로 다른 실근의 개수는

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 곡선 $y = \sin kx$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}$ 이

만나는 점의 개수와 같다.

$1 \leq l \leq k$ 인 자연수 l 에 대하여

$\frac{2(l-1)}{k}\pi \leq x < \frac{2l}{k}\pi$ 에서 곡선 $y = \sin kx$ 와

직선 $y = \frac{1}{3}$ 이 만나는 점의 개수는 2이고

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 곡선 $y = \sin kx$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}$ 이

만나는 점의 개수가 8이므로

$2k = 8$ 에서 $k = 4$

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 4x = \frac{1}{3}$ 의 서로 다른 실근을

작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_8$ 이라 하자.

함수 $y = \sin 4x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \alpha_1, \alpha_3 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1, \alpha_4 = \frac{3}{4}\pi - \alpha_1,$

$\alpha_5 = \pi + \alpha_1, \alpha_6 = \frac{5}{4}\pi - \alpha_1, \alpha_7 = \frac{3}{2}\pi + \alpha_1,$

$\alpha_8 = \frac{7}{4}\pi - \alpha_1$

따라서 구하는 모든 해의 합은 7π

49) [정답] 8

[해설]

조건 (가)에서 $f(x) \geq 0$ 이고, 조건 (나)에서 방정식

$f(x) = 0$ 의 실근이 존재하므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 0이다.

수 $f(x) = a \sin bx + 8 - a$ 의 최솟값은 $8 - 2a$ 이므로

$$8 - 2a = 0, \quad a = 4$$

조건 (나)에서 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin bx = -1$ 의 서로

다른 실근의 개수가 4이므로 방정식 $\sin bx = -1$ 의 해는

$$bx = \frac{3}{2}\pi, 2\pi + \frac{3}{2}\pi, 4\pi + \frac{3}{2}\pi, 6\pi + \frac{3}{2}\pi$$

뿐이어야 한다.

$x < 2\pi$ 이므로 $6\pi + \frac{3}{2}\pi < 2\pi b \leq 8\pi + \frac{3}{2}\pi$

따라서 $3 + \frac{3}{4} < b \leq 4 + \frac{3}{4}$ 이고 b 는 자연수이므로

$$b = 4$$

$$\therefore a + b = 8$$

50) [정답] ④

[해설]

자연수 a, b 에 대하여 $g(x) = 2\sin ax + b$ 라 하면 함수 $g(x)$ 의

최댓값, 최솟값은 $b+2, b-2$, 주기는 $\frac{2\pi}{a}$ 이다.

자연수 b 에 대하여 $b+2 \geq 3$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의

그래프와 직선 $y = 1$ 이 만나기 위해서는

$$|b-2| \leq 1, \quad \text{즉 } 1 \leq b \leq 3$$

을 만족해야 한다.

(i) $b = 1$ 일 때

함수 $f(x) = |2\sin ax + 1|$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의

그래프의 교점의 개수가 10이므로 함수

$g(x) = 2\sin ax + 1$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 또는

$y = -1$ 의 그래프의 교점의 개수가 10이어야 한다.

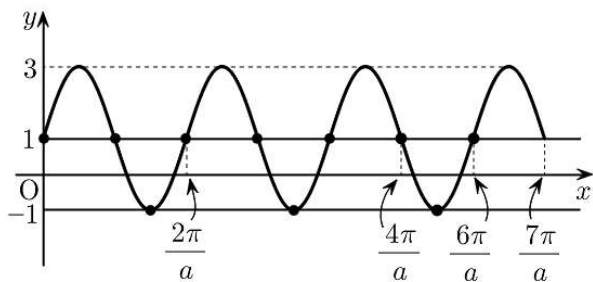
$0 \leq x < \frac{2\pi}{a}$ 에서 교점의 개수가 3이므로 다음 그림과

같이 교점의 개수가 10이 되기 위해서는

$$\frac{6\pi}{a} \leq 2\pi < \frac{7\pi}{a}, \quad \text{즉 } 3 \leq a < \frac{7}{2}$$

을 만족해야 한다.

따라서 자연수 a 의 값은 3이다.



(ii) $b=2$ 일 때

함수 $f(x) = |2\sin ax + 2| = 2\sin ax + 2$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수가 10이어야 한다.

$0 \leq x < \frac{2\pi}{a}$ 에서 교점의 개수가 2이고 교점의 x 좌표는

$$2\sin ax + 2 = 1, \quad \sin ax = -\frac{1}{2}$$

$$ax = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } ax = \frac{11}{6}\pi$$

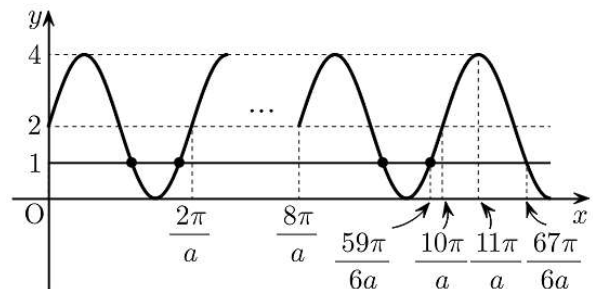
$$\therefore x = \frac{7}{6a}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6a}\pi$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수가 10이 되기 위해서는 다음 그림과 같이

$$\frac{8}{a}\pi + \frac{11}{6a}\pi \leq 2\pi < \frac{10}{a}\pi + \frac{7}{6a}\pi, \quad \text{즉} \quad \frac{59}{12} \leq a < \frac{67}{12}$$

을 만족해야 한다.

따라서 자연수 a 의 값은 5이다.



(iii) $b=3$ 일 때

함수 $f(x) = |2\sin ax + 3| = 2\sin ax + 3$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수가 10이어야 한다.

$0 \leq x < \frac{2\pi}{a}$ 에서 교점의 개수가 1이고, 교점의

x 좌표는

$$2\sin ax + 3 = 1, \quad \sin ax = -1$$

$$ax = \frac{3}{2}\pi$$

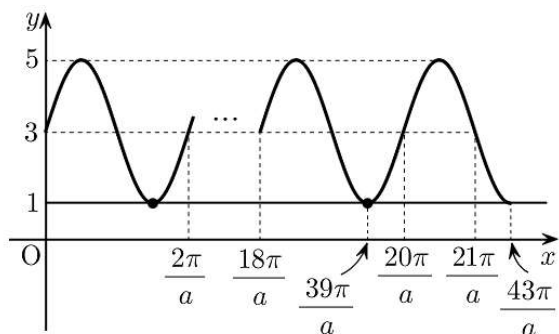
$$\therefore x = \frac{3}{2a}\pi$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수가 10이 되기 위해서는 다음 그림과 같이

$$\frac{18}{a}\pi + \frac{3}{2a}\pi \leq 2\pi < \frac{20}{a}\pi + \frac{3}{2a}\pi, \quad \text{즉} \quad \frac{39}{4} \leq a < \frac{43}{4}$$

을 만족해야 한다.

따라서 자연수 a 의 값은 10이다.



이상에서 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(3, 1), (5, 2), (10, 3)$$

이므로 $a+b$ 의 최댓값은 13, 최솟값은 4이다.

$$M=13, m=4 \text{ 이므로 } M+m=17$$

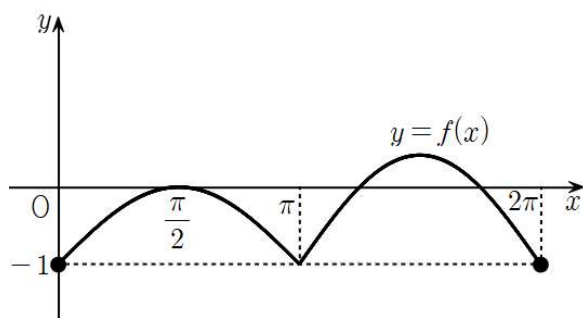
51) [정답] 15

[해설]

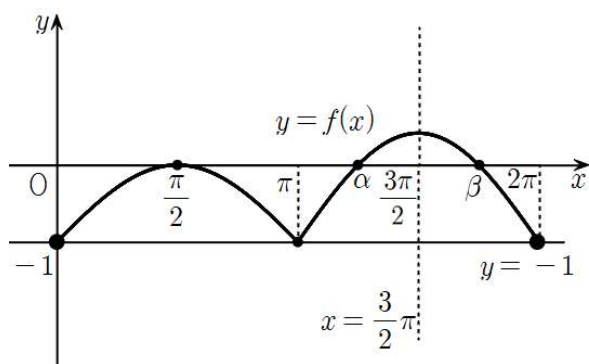
닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \leq x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x - 1 & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases}$$

에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $0 \leq x < \pi$ 에서 $y=\sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이고 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서 $y=\sqrt{2}\sin x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 실근은 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=f(t)$ 의 교점의 x 좌표이다.



교점의 개수가 3인 경우는 $f(t)=0$ 또는 $f(t)=-1$

$f(t)=-1$ 에서 $t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서 $-\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ 을 만족시키는 두 근을 α, β 라 하면 $f(t)=0$ 에서

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } t = \alpha \text{ 또는 } t = \beta$$

이때 $\alpha + \beta = 3\pi$ 이므로 모든 t 의 값의 합은

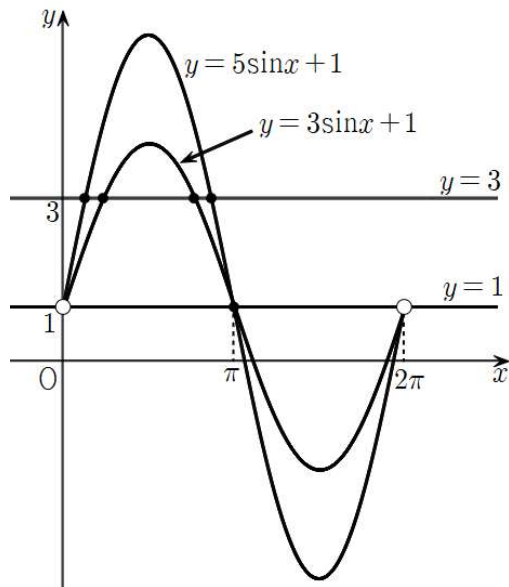
$$0 + \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi + 3\pi = \frac{13}{2}\pi$$

$$\therefore p + q = 2 + 13 = 15$$

52) [정답] 24

[해설]

(i) $b = 1$ 일 때

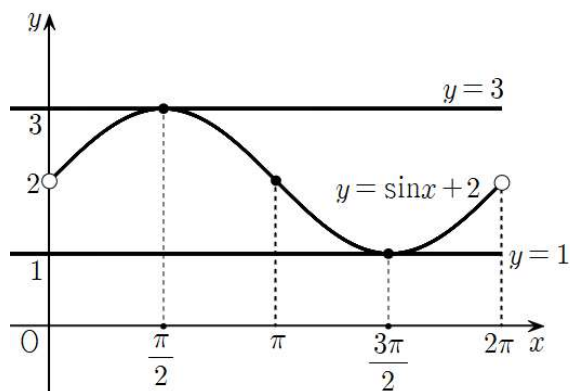


$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족하는 a 의 값의 범위는

$$3 \leq a \leq 5$$

$$\therefore 4 \leq a + b \leq 6$$

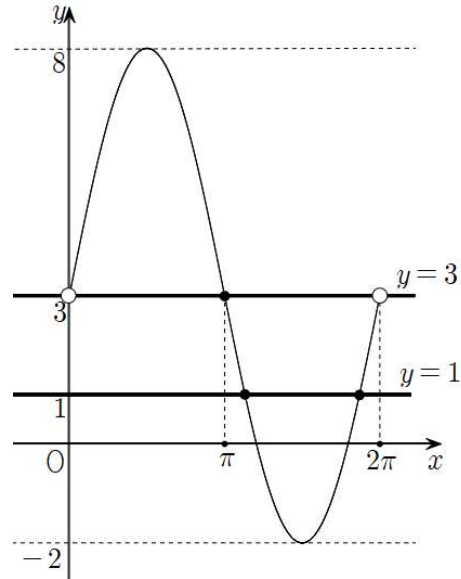
(ii) $b = 2$ 일 때



$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족하는 a 의 값은 1 이다.

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

(iii) $b = 3$ 일 때

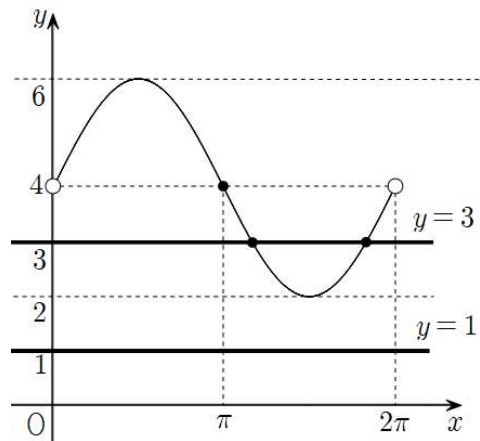


$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족하는 a 의 값의 범위는

$$3 \leq a \leq 5$$

$$\therefore 6 \leq a + b \leq 8$$

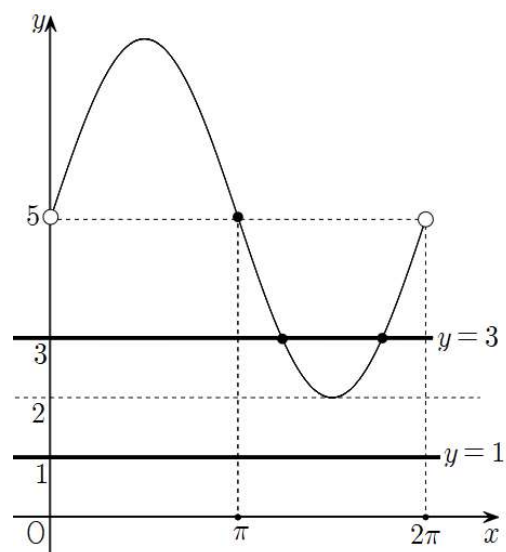
(iv) $b = 4$ 일 때



$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족하는 a 의 값은 2 이므로

$$a + b = 6$$

(v) $b = 5$ 일 때



$n(A \cup B \cup C)$ 를 만족하는 a 의 값은 3 이므로

$$a + b = 8$$

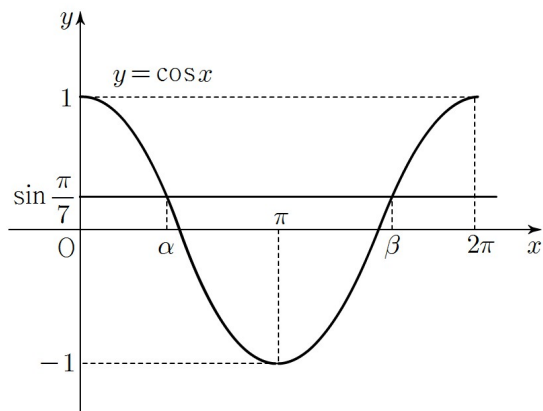
이상에서 $m = 3, M = 8$

$$\therefore M \times m = 8 \times 3 = 24$$

53) [정답] ③

[해설]

$0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때 주어진 부등식 $\cos x \leq \sin \frac{\pi}{7}$ 을 만족시키는 모든 x 의 값의 범위는 다음 그림에서와 같이 $\alpha \leq x \leq \beta$ 이다.



이때 $\sin \frac{\pi}{7} > 0$ 이고 함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 직선

$x = \pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta - \frac{3}{2}\pi = t$$

로 놓으면

$$\sin \frac{\pi}{7} = \cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \sin t \quad \therefore t = \frac{\pi}{7}$$

$$\therefore \beta - \alpha = \left(\frac{3}{2}\pi + t \right) - \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \frac{9}{7}\pi$$

[다른 풀이]

$$\sin \frac{\pi}{7} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} \right) = \cos \frac{5}{14}\pi \text{ 이므로 부등식}$$

$$\cos x \leq \sin \frac{\pi}{7} \text{ 에서}$$

$$\cos x \leq \cos \frac{5}{14}\pi$$

$$\therefore \frac{5}{14}\pi \leq x \leq 2\pi - \frac{5}{14}\pi$$

$$\alpha = \frac{5}{14}\pi, \beta = \frac{23}{14}\pi \text{ 이므로}$$

$$\beta - \alpha = \frac{9}{7}\pi$$

54) [정답] 32

[해설]

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x \text{ 이므로}$$

$$f(2+x) = \sin \frac{\pi}{4}(2+x) = \cos \frac{\pi}{4}x,$$

$$f(2-x) = \sin \frac{\pi}{4}(2-x) = \cos \frac{\pi}{4}x$$

$$\text{부등식 } f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4} \text{ 에서}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\pi}{4}x = \theta \text{ 라 하면 } 0 < x < 16 \text{ 에서 } 0 < \theta < 4\pi \text{ 이고, } \textcircled{1} \text{ 에서}$$

$$\cos^2 \theta - \frac{1}{4} < 0, \quad \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \right) \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right) < 0$$

$$-\frac{1}{2} < \cos \theta < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{7}{3}\pi < \theta < \frac{8}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{10}{3}\pi < \theta < \frac{11}{3}\pi$$

$$\frac{\pi}{4}x = \theta \text{ 이므로 } x \text{ 의 값의 범위는}$$

$$\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3} \text{ 또는 } \frac{16}{3} < x < \frac{20}{3}$$

$$\text{또는 } \frac{28}{3} < x < \frac{32}{3} \text{ 또는 } \frac{40}{3} < x < \frac{44}{3}$$

따라서 자연수 x 는 2, 6, 10, 14 이므로 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$2+6+10+14=32$$

[다른 풀이]

$$\text{함수 } f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x \text{ 의 주기가 } 2\pi \div \frac{\pi}{4} = 8 \text{ 이므로 정수 } n \text{ 에}$$

대하여 함수값 $f(n)$ 은 다음의 8개의 값이 차례로 반복된다.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$g(x) = f(2+x)f(2-x)$ 라 하면 함수 f 의 주기가 8 이므로 함수 g 의 주기도 8 이다.

$$g(1) = f(3)f(1) = \frac{1}{2}$$

$$g(2) = f(4)f(0) = 0$$

$$g(3) = f(5)f(-1) = f(5)f(7) = \frac{1}{2}$$

$$g(4) = f(6)f(-2) = f(6)f(6) = 1$$

$$g(5) = f(7)f(-3) = f(7)f(5) = \frac{1}{2}$$

$$g(6) = f(8)f(-4) = f(0)f(4) = 0$$

$$g(7) = f(9)f(-5) = f(1)f(3) = \frac{1}{2}$$

$$g(8) = f(10)f(-6) = f(2)f(2) = 1$$

이므로 $x = 1, 2, \dots, 15$ 인 자연수 x 에 대하여

$$g(x) = f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$$

인 자연수 x 는 2, 6, 10, 14 이다.

따라서 그 합은

$$2+6+10+14=32$$

55) [정답] ③

[해설]

$0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $f(x)=g(x)$ 에서

$$k\sin x = \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \frac{1}{k} \quad (\cos x \neq 0)$$

그러므로 점 A의 x좌표를 $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면

함수 $y = \tan x$ 의 주기는 π 이므로

점 B의 x좌표는 $\alpha + \pi$ 이고

두 점 A, B의 좌표는

각각 $(\alpha, \cos \alpha), (\alpha + \pi, -\cos \alpha)$

선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (\alpha + \pi) - 1 \times \alpha}{3 - 1}, \frac{3 \times (-\cos \alpha) - 1 \times \cos \alpha}{3 - 1}\right) \text{이므로}$$

$$C\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi, -2\cos \alpha\right)$$

점 C는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$$-2\cos \alpha = k\sin\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$-2\cos \alpha = k \times (-\cos \alpha)$ 에서 $k=2$ 이므로

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \text{ 이고, } \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{에서}$$

$$\text{점 D의 좌표는 } \left(\alpha + \frac{3}{2}\pi, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \frac{\sqrt{5}}{5} - \left(-2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

점 B와 직선 CD 사이의 거리는

$$\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) - (\alpha + \pi) = \frac{\pi}{2}$$

따라서

삼각형 BCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi$$

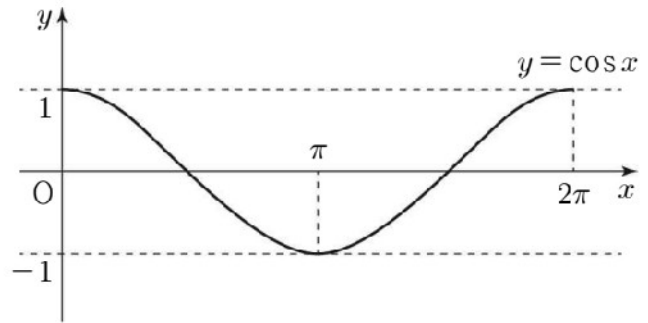
56) [정답] ②

[해설]

$$2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = k$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x + k - 2 = 0$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



상수 a 에 대하여

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 곡선 $y = \cos x$ 와 직선 $y = a$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수는

$a = -1$ 일 때 1이고, $-1 < a \leq 1$ 일 때 2이므로

$0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때,

방정식 $2\cos^2 x + 3\cos x + k - 2 = 0$ 의

서로 다른 실근의 개수가 3이려면

$x = \pi$ 가 이 방정식의 실근이어야 한다.

$$2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + k - 2 = 0 \text{에서 } k = 3$$

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 &= (2\cos x + 1)(\cos x + 1) \\ &= 0 \text{에서} \end{aligned}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = -1$$

$$x = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

또는 $x = \pi$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } k \times \alpha &= 3 \times \frac{4}{3}\pi \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

57) [정답] ⑤

[해설]

삼각형 ABE와 삼각형 DCE는 서로 닮음이고

$\overline{AB} : \overline{DC} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{BE} : \overline{CE} = 1 : 2$ 이다.

삼각형 BEC에서 $\overline{BE} = k$ ($k > 0$)이라 하면 $\overline{CE} = 2k$

원주각의 성질에 의하여 $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$ 이므로

$$\angle BEC = \alpha + \beta$$

삼각형 BEC에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{30})^2 = k^2 + 4k^2 - 2 \times k \times 2k \times \left(-\frac{5}{12}\right), k^2 = 18$$

$$k > 0 \text{ 이므로 } k = 3\sqrt{2}, \overline{BE} = 3\sqrt{2}$$

$\overline{AE} = t$ ($t > 0$)이라 하면 삼각형 ABE에서

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } t^2 + 4^2 > (3\sqrt{2})^2, t > \sqrt{2}$$

$$\cos(\pi - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{12}$$

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$$4^2 = t^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times t \times 3\sqrt{2} \times \frac{5}{12}$$

$$2t^2 - 5\sqrt{2}t + 4 = 0$$

$$(2t - \sqrt{2})(t - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$t > \sqrt{2} \text{ 이므로 } t = 2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 선분 AE의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

58) [정답] ⑤

[해설]

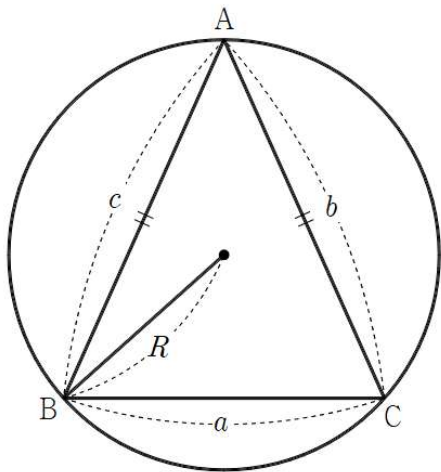
삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π 이므로 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 $R=3$

조건 (가)에서 $3\sin A = 2\sin B$ 이므로

$$\frac{3a}{2R} = \frac{2b}{2R} \quad \therefore 3a = 2b$$

조건 (나)에서 $\cos B = \cos C$ 이므로

$$\angle B = \angle C \quad \therefore b = c$$



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + b^2 - \left(\frac{2}{3}b\right)^2}{2b^2} = \frac{7}{9}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad a = 2 \times 3 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}a\right) \times \left(\frac{3}{2}a\right) \times \frac{4\sqrt{2}}{9} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2 \\ &= \frac{64\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

59) [정답] ⑤

[해설]

$\angle CED = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\triangle ECD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{CD}^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 10$$

$$\text{에서 } \overline{CD} = \sqrt{10} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

반지름을 R 라 하면 $\overline{OD} = R$, $\overline{OE} = R - 4$ 이므로 삼각형 ODE에서 코사인법칙에 의해

$$R^2 = (R - 4)^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times (R - 4) \cos \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore R = 5$$

$\angle CAD = \theta$ 라 하면 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{CD}}{\sin \theta} = 2R \text{에서 } \frac{\sqrt{10}}{\sin \theta} = 10 \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

따라서 삼각형 ACE에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \frac{3}{4}\pi} = \frac{\overline{CE}}{\sin \theta} \text{에서}$$

$$\overline{AC} = \frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{10}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } \overline{AC} \times \overline{CD} = 20\sqrt{2}$$

[다른 풀이]

$\angle CED = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\triangle ECD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{CD}^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 10$$

$$\text{에서 } \overline{CD} = \sqrt{10}$$

$\angle OCD = \alpha$ 라 하면 $\triangle ECD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\cos \alpha = \frac{4^2 + (\sqrt{10})^2 - (3\sqrt{2})^2}{2 \times 4 \times 10} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\overline{OC} = R$ 이라 하면 $\triangle OCD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$R^2 = R^2 + (\sqrt{10})^2 - 2R \times \sqrt{10} \times \frac{1}{\sqrt{10}} \text{에서 } R = 5$$

$\angle CAD = \beta$ 라 하면 $\triangle ACD$ 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\sqrt{10}}{\sin \beta} = 2R \text{에서 } \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\triangle AEC$ 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{4}{\sin \beta} = \frac{\overline{AC}}{\sin \frac{3}{4}\pi} \text{에서 } \overline{AC} = 4\sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } \overline{AC} \times \overline{CD} = 4\sqrt{5} \times \sqrt{10} = 20\sqrt{2}$$

60) [정답] 22

[해설]

$\overline{OP} = k_1$, $\overline{OQ} = k_2$ 라 하자.

삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2 = k_1^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2 \times k_1 \times 2\sqrt{15} \times \frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 OAQ에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2 = k_2^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2 \times k_2 \times 2\sqrt{15} \times \frac{\sqrt{15}}{4} \text{이므로}$$

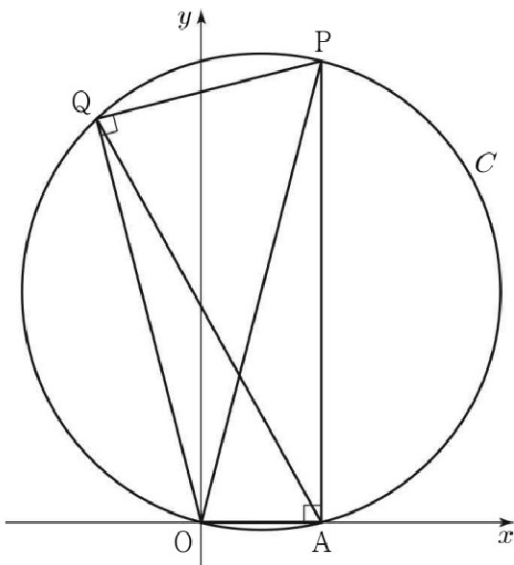
두 실수 k_1, k_2 는 이차방정식

$$2^2 = x^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2 \times x \times 2\sqrt{15} \times \frac{\sqrt{15}}{4} \text{의}$$

서로 다른 두 실근이다.

$$x^2 - 15x + 56 = (x-7)(x-8) = 0 \text{에서}$$

$$k_1 > k_2 \text{이므로 } k_1 = 8, k_2 = 7$$



$$\cos(\angle OPA) = \cos(\angle OQA) \text{이므로}$$

$$\angle OPA = \angle OQA$$

삼각형 OAP의 외접원을 C라 하면

두 점 P, Q의 y좌표가 양수이므로

점 Q도 원 C 위의 점이다.

$$\sin(\angle OPA) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \text{이므로}$$

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 OAP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OA}}{\sin(\angle OPA)} = 8 = 2R$$

그러므로 선분 OP는 원 C의 지름이다.

$$\angle PAO = \angle OQP$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\text{직각삼각형 OPQ에서 } \overline{PQ} = \sqrt{8^2 - 7^2}$$

$$= \sqrt{15}$$

사각형 OAPQ의 넓이는

두 직각삼각형 OAP, OPQ의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{15} + \frac{1}{2} \times 7 \times \sqrt{15} = \frac{11}{2} \sqrt{15} \text{에서}$$

$$p = 2, q = 11$$

$$\text{따라서 } p \times q = 22$$

61) [정답] ④

[해설]

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD의 길이를 구하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 7$$

이므로 $\overline{BD} = \sqrt{7}$ 이다.

$\angle BAD + \angle BCD = \pi$ 이므로 삼각형 BCD에서 코사인법

칙에 의하여

$$2^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times 2 \times \overline{CD} \times \cos \frac{2\pi}{3} = 7$$

이므로 $\overline{CD} = \boxed{1}$ 이다.

삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서 $\angle AEB$ 는 공통이고

$\angle EAB = \angle ECD$ 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는

닮음이다. 따라서 $\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ 이다. 즉,

$$\frac{3 + \overline{ED}}{\overline{EC}} = \frac{2 + \overline{EC}}{\overline{ED}} = \frac{2}{1}$$

$$\text{에서 } \overline{ED} = \boxed{\frac{7}{3}} \text{이다.}$$

$$\angle DCE = \pi - \angle BCD = \angle BAD = \frac{\pi}{3}$$

이므로 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\frac{7}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sin \theta}$$

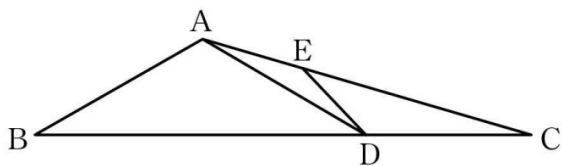
$$\text{에서 } \sin \theta = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{14}} \text{이다.}$$

$$p = 1, q = \frac{7}{3}, r = \frac{3\sqrt{3}}{14} \text{이므로}$$

$$(p+q) \times r = \left(1 + \frac{7}{3}\right) \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{7}$$

62) [정답] ①

[해설]



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABC) = \frac{2^2 + (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \times 2 \times 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이다.}$$

삼각형 ABD에서 $\sin(\angle ABD) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의

반지름의 길이는 $\frac{1}{2} \times \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)} = \boxed{2}$ 이다.

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sin(\angle CAD) &= \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \times \sin(\angle ACD) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{13} = \frac{\sqrt{39}}{26} \end{aligned}$$

이다. 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{DE} = 2 \times 2 \times \sin(\angle CAD) = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

이다.

따라서 $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $q = 2$, $r = \frac{2\sqrt{39}}{13}$ 이므로

$$p \times q \times r = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{39}}{13} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

63) [정답] ①

[해설]

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta \\ &= 5^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta \\ &= 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AC} \times \cos \theta$$

$$= 7^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 7 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta$$

$$= 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta$$

$\angle BAC = \angle CAD$ 이므로 $\overline{BC} = \overline{CD}$, 즉 $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$ 이다.

이때 $70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta$ 에서

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BC}^2 = 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 70 - 30\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 10$$

$$\overline{BC} = \sqrt{10}$$

한편, $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R 라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2R \text{ 이므로}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R$$

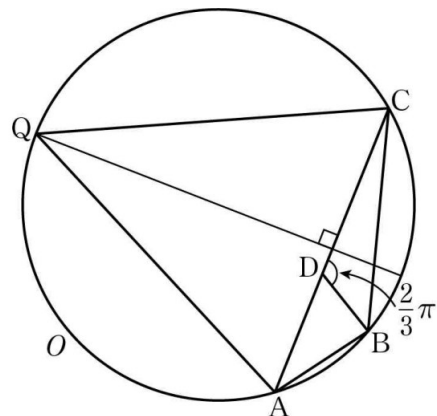
$$5\sqrt{2} = 2R$$

$$\text{따라서 } R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

64) [정답] ②

[해설]

점 B를 포함하지 않는 호 AC와 선분 AC의 수직이등분선의 교점을 R라 하자. P=R일 때, 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되므로 Q=R이다.



$$\cos(\angle ABC) = -\frac{5}{8} \text{ 이므로}$$

$$\cos(\angle CQA) = \cos(\pi - \angle ABC) = -\cos(\angle ABC) = \frac{5}{8}$$

$$\overline{QA} = \overline{QC} = 6\sqrt{10} \text{ 이므로}$$

삼각형 QAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{QA}^2 + \overline{QC}^2 - 2 \times \overline{QA} \times \overline{QC} \times \cos(\angle CQA)$$

$$= (6\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{10})^2 - 2 \times 6\sqrt{10} \times 6\sqrt{10} \times \frac{5}{8} = 270$$

$\overline{AB} = a$ ($a > 0$)이라 하면 $2\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{BC} = 2a$ 이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\angle ABC) \\ &= a^2 + (2a)^2 - 2 \times a \times 2a \times \left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{15}{2}a^2\end{aligned}$$

$$\frac{15}{2}a^2 = 270 \text{에서 } a = 6$$

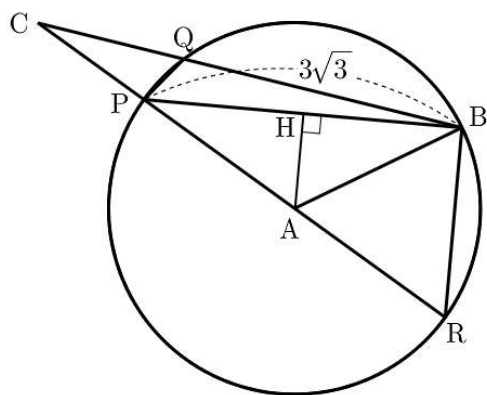
삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 삼각형 CDB에서 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)} = \frac{2a}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3}$$

따라서 $R = 4\sqrt{3}$

65) [정답] ⑤

[해설]



직선 AC가 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R, 원의 중점 A에서 선분 PB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\cos A = -\frac{1}{2} \text{이므로 } \angle A = 120^\circ$$

$$\angle BAH = 60^\circ, \overline{BH} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{이므로 } \overline{AB} \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = 3$$

$\sin B : \sin C = 5 : 3$ 이므로 삼각형 ABC에서 사인 법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}, \quad \overline{AC} = \frac{\sin B}{\sin C} \times \overline{AB} = \frac{5}{3} \times 3 = 5$$

$\overline{AB} = \overline{AP} = \overline{AR} = \overline{RB} = 3$ 이므로 삼각형 ARB는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이다.

$$\overline{CR} = \overline{AC} + \overline{AR} = 5 + 3 = 8$$

삼각형 BCR에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos 60^\circ \\ &= 49\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BC} = 7$$

두 삼각형 CPQ, CRB는 서로 닮음이므로

$$\overline{CP} : \overline{CB} = \overline{PQ} : \overline{BR}$$

$$2 : 7 = \overline{PQ} : 3$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{6}{7}$$

[다른 풀이]

$$\cos A = -\frac{1}{2} \text{이므로 } \angle A = 120^\circ$$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 삼각형 PAB에서 사인 법칙에 의해

$$\frac{\overline{PB}}{\sin A} = 2r, \quad r = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3$$

$\sin B : \sin C = 5 : 3$ 이므로 삼각형 ABC에서 사인 법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}, \quad \overline{AC} = \frac{\sin B}{\sin C} \times \overline{AB} = \frac{5}{3} \times 3 = 5$$

$$\therefore \overline{CP} = \overline{AC} - \overline{AP} = 5 - 3 = 2$$

삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의해

$$\overline{BC}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos A = 49$$

$$\therefore \overline{BC} = 7$$

삼각형 ABC에서 코사인 법칙의 변형에 의해

$$\cos C = \frac{5^2 + 7^2 - 3^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{13}{14},$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$\angle A = 120^\circ$ 이므로 원주각의 성질에 의해

$$\angle PQB = 120^\circ, \angle CQP = 60^\circ$$

따라서 삼각형 CPQ에서 사인 법칙에 의해

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin C} = \frac{\overline{CP}}{\sin Q}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \overline{CP} \times \frac{\sin C}{\sin Q} = 2 \times \frac{\frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{7}$$

66) [정답] ①

[해설]

$\overline{AB} = x$, $\overline{AD} = y$ 로 놓으면 삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$$2 = \frac{1}{2} \times x \times y \times \sin A \quad \therefore xy = \frac{4}{\sin A} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\angle BCD = \theta$ 라 하면 $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos \theta \\ &= 9 + 4 - 12 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 17 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}\end{aligned}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \times \cos A \\ &= (x+y)^2 - 2xy(1 + \cos A) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$(x+y)^2 = 17 + 2xy(1 + \cos A) \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

점 E가 선분 AC를 1:2로 내분하는 점이므로 선분 AE를 지름으로 하는 원의 반지름을 R라 하면 선분 CE를 지름으로 하는 원의 반지름은 2R이다.

또한 $\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2} = 3 : 5\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{P_1P_2} = 3k$,

$\overline{Q_1Q_2} = 5\sqrt{2}k$ 라 하면 삼각형 CQ_1Q_2 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{5\sqrt{2}k}{\sin \theta} = \frac{5\sqrt{2}k}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{15k}{2} = 2 \times 2R \quad \therefore 2R = \frac{15}{4}k$$

삼각형 AP_1P_2 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3k}{\sin A} = 2R = \frac{15}{4}k \quad \therefore \sin A = \frac{4}{5}$$

㉠에 대입하면 $xy = 5$

$\angle DAB > \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos A = -\sqrt{1 - \sin^2 A} = -\frac{3}{5}$

$xy = 5$ 와 $\cos A = -\frac{3}{5}$ 를 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= 17 + 2 \times 5 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 21 \\ \therefore x+y &= \sqrt{21}\end{aligned}$$

67) [정답] ④

[해설]

주어진 그림에서 $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$ 이므로 $\overline{AD} = 3t$ ($t > 0$)이라

하면 $\overline{DB} = 2t$, $\overline{AB} = 5t$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 14, \quad \sin A : \sin C = \overline{BC} : \overline{AB}$$

$\sin A : \sin C = 8 : 5$ 이므로 $\overline{BC} : \overline{AB} = 8 : 5$ 에서

$$\overline{BC} = 8t$$

두 삼각형 ADE, ABC의 넓이의 비가 9:35이므로

$$\frac{1}{2} \times 3t \times \overline{AE} \times \sin A : \frac{1}{2} \times 5t \times \overline{AC} \times \sin A = 9 : 35$$

$$3\overline{AE} : 5\overline{AC} = 9 : 35, \quad \overline{AE} = \frac{3}{7}\overline{AC}$$

즉 $\overline{AE} : \overline{AC} = 3 : 7$ 이고 $\overline{AD} = \overline{AE}$ 이므로

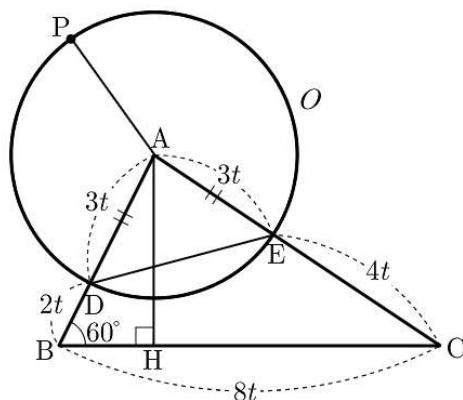
$$\overline{AE} = 3t, \quad \overline{AC} = 7t$$

라 할 수 있다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABC) = \frac{(5t)^2 + (8t)^2 - (7t)^2}{2 \times 5t \times 8t} = \frac{40t^2}{80t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ$$



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = 14, \quad 7t = 14 \times \sin 60^\circ = 7\sqrt{3}$$

즉 $t = \sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{BC} = 8t = 8\sqrt{3}, \quad \overline{AD} = \overline{AE} = 3\sqrt{3}$$

이때 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

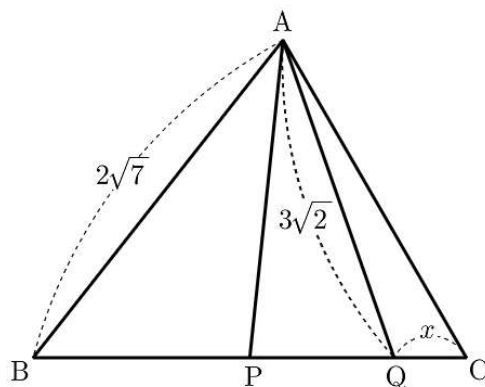
$$\overline{AH} = \overline{AB} \times \sin 60^\circ = 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}$$

따라서 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \left(3\sqrt{3} + \frac{15}{2}\right) \times 8\sqrt{3} = 36 + 30\sqrt{3}$$

68) [정답] ②

[해설]



$\overline{AB} = 2\sqrt{7}$, $\overline{AQ} = 3\sqrt{2}$ 이고 선분 BC를 5:1로 내분하는

점이 Q이므로 $\overline{CQ} = x$ 라 하면 $\overline{PQ} = 2x$, $\overline{BC} = 6x$

삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)} = \frac{3\sqrt{2}}{\sin(\angle APQ)}$$

이때 $\sin(\angle QAP) : \sin(\angle APQ) = \sqrt{2} : 3$ 이므로
 $\sin(\angle QAP) = \sqrt{2}k$, $\sin(\angle APQ) = 3k$ 라 하면

$$\frac{\overline{PQ}}{\sqrt{2}k} = \frac{3\sqrt{2}}{3k}, \quad \overline{PQ} = 2$$

$2x = 2$ 이므로 $x = 1$

$$\overline{CQ} = 1, \quad \overline{BC} = 6$$

삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABQ) = \frac{(2\sqrt{7})^2 + 5^2 - (3\sqrt{2})^2}{2 \times 2\sqrt{7} \times 5} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos(\angle ABQ) = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ 이므로}$$

$$\sin^2(\angle ABQ) + \cos^2(\angle ABQ) = 1$$

$$\text{에서 } \sin(\angle ABQ) = \frac{3}{4}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = (2\sqrt{7})^2 + 6^2 - 2 \times 2\sqrt{7} \times 6 \times \cos(\angle ABC) \\ = 22$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{22}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면
 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{22}}{\sin(\angle ABC)} = 2R, \quad \frac{\sqrt{22}}{\frac{3}{4}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{2\sqrt{22}}{3}$$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{2\sqrt{22}}{3}\right)^2 = \frac{88}{9}\pi$$

69) [정답] ①

[해설]

삼각형 ABC의 외접원을 C_1 ,

삼각형 ADC의 외접원을 C_2 라 하자.

원 C_1 의 반지름의 길이를 R 이라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\frac{36\sqrt{7}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 18 = 2R, \quad R = 9$$

원 C_2 에서 $\angle AO'D$ 는 호 AD의 중심각,

$\angle ACD$ 는 호 AD의 원주각이므로

$$\angle AO'D = 2\angle ACD = \frac{2}{3}\pi$$

이등변삼각형 $O'AD$ 에서 $\angle AO'D = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\angle DAO' = \frac{\pi}{6}$$

$$\overline{OA} = R = 9, \quad \overline{AO'} = 5\sqrt{3}$$

$$\angle OAO' = \frac{\pi}{6} \text{ 이므로}$$

삼각형 AOO'에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{OO'}^2 = 9^2 + (5\sqrt{3})^2 - 2 \times 9 \times 5\sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{6} \\ = 81 + 75 - 135 = 21$$

$$\text{따라서 } \overline{OO'} = \sqrt{21}$$

70) [정답] 6

[해설]

$$\angle CAE = \theta \text{ 라 하면 } \sin \theta = \frac{1}{4} \text{ 이고 } \overline{BC} = 4 \text{ 이므로}$$

삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CE}}{\sin \theta} = \overline{BC}, \quad \overline{CE} = 1$$

$$\overline{BF} = \overline{CE} = 1 \text{ 이므로 } \overline{FC} = 3$$

$\overline{BC} = \overline{DE}$ 에서 선분 DE도 주어진 원의 지름이므로

$$\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ \text{ 이다.}$$

$$\angle BAD = 90^\circ - \angle DAC = \theta$$

삼각형 ABF에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin(\angle ABF)} = \frac{1}{\sin \theta} = 4 \text{ 이므로 } \sin(\angle ABF) = \frac{k}{4}$$

$$\text{직각삼각형 ABC에서 } \sin(\angle ABC) = \frac{\overline{AC}}{4} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AC} = 4\sin(\angle ABC) = 4 \times \frac{k}{4} = k$$

$$\text{직각삼각형 ABC에서 } \cos(\angle BCA) = \frac{k}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형 AFC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{FC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{FC} \times \cos(\angle FCA)$$

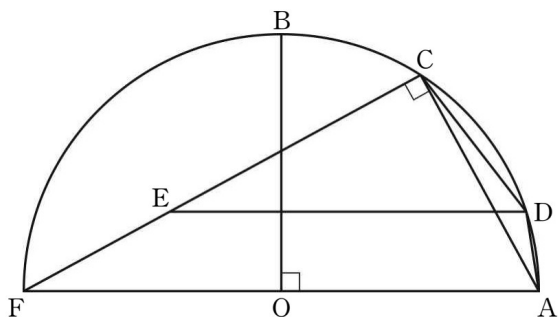
$$k^2 = k^2 + 3^2 - 2 \times k \times 3 \times \frac{k}{4}, \quad \frac{3}{2}k^2 = 9$$

$$\text{따라서 } k^2 = 6$$

71) 중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 원을 C 라 하고, 원 C 와 직선 OA가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 F라 하자.

선분 FA는 원 C 의 지름이므로 $\angle FCA = \frac{\pi}{2}$ 이다. 또한

$$\angle ECA = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 세 점 C, E, F는 한 직선 위에 있다.}$$



직선 ED가 직선 OA에 평행하므로

$$\sin(\angle DEC) = \sin(\angle AFC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

삼각형 CED에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle DEC)} = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}, \quad \overline{CD} = 4$$

사각형 ADCF가 원 C 에 내접하므로

$$\begin{aligned}\cos(\angle CDA) &= \cos(\pi - \angle AFC) \\ &= -\cos(\angle AFC) \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{3}\end{aligned}$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{2})^2 = 4^2 + \overline{AD}^2 - 2 \times 4 \times \overline{AD} \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

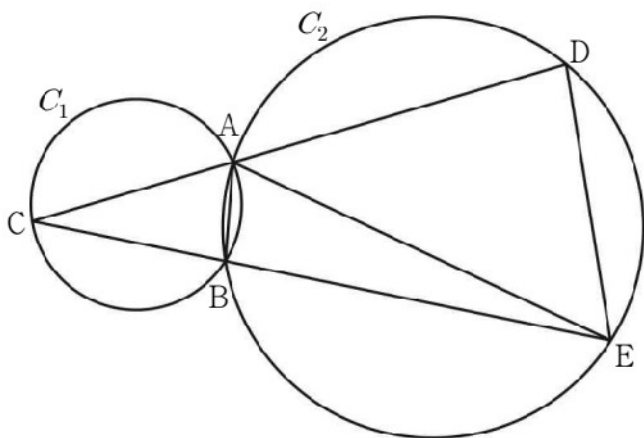
$$3 \times \overline{AD}^2 + 8\sqrt{7} \times \overline{AD} - 48 = 0$$

$$\overline{AD} > 0 \text{ 이므로 } \overline{AD} = \frac{16}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{7}$$

따라서 $p = \frac{16}{3}$, $q = -\frac{4}{3}$ 이므로 $9 \times |p \times q| = 64$

72) [정답] ④

[해설]



사각형 ABED가 원 C_2 에 내접하므로

$$\angle EBA = \pi - \angle ADE \text{ 이므로 } \angle ABC = \angle ADE$$

삼각형 ACB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = \frac{3}{\sin(\angle ABC)} = 2r_1$$

삼각형 AED에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)} = 2r_2$$

 $r_1 : r_2 = 1 : 2$ 에서

$$\frac{3}{\sin(\angle ABC)} : \frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)} = 2r_1 : 2r_2 = 1 : 2$$

이므로 $\overline{AE}=6$

삼각형 AED에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ADE) = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8}$$

삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\text{CE}}^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \times 8 \times 4 \times \frac{1}{8} = 72$$

따라서 선분 CE의 길이는 $6\sqrt{2}$

73) [정답] 98

[해설]

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{\text{BD}}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 2R_2 \text{에서}$$

$$R_2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \right] \times \overline{\text{BD}}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2^2 + 1^2 - (\boxed{-2}) \\ &= 7\end{aligned}$$

이므로

$$R_1 \times R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \overline{\text{BD}}^2 = \left\lceil \frac{7}{6} \sqrt{6} \right\rceil$$

이상에서 $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $q = -2$, $r = \frac{7}{6}\sqrt{6}$ 이므로

$$9(pqr)^2 = 9\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2) \times \frac{7\sqrt{6}}{6}\right)^2 = 98$$

74) [정답] ③

[해설]

삼각형 PBC에서

$$\angle BPC = 180^\circ - (30^\circ + 15^\circ) = 135^\circ$$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BO}$$

$$\frac{1}{2} \times 9\sqrt{2} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 12 \times 3\sqrt{2}$$

$$\overline{BD} = 4$$

$$\overline{BC} = 2 \times \overline{BD} = 8$$

원주각의 성질에 의하여

$$\angle BPQ = \angle BCQ, \angle QPC = \angle QBC$$

$$\sin(\angle BCQ) : \sin(\angle QBC) = 3 : 1$$

삼각형 BQC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin(\angle BCQ)} = \frac{\overline{QC}}{\sin(\angle QBC)}$$

$$\overline{BQ} : \overline{QC} = 3 : 1$$

$$\overline{QC} = k \ (k > 0) \text{이라 하면, } \overline{BQ} = 3k$$

삼각형 BCP는

$$\angle BCP = \frac{\pi}{2} \text{인 직각삼각형이므로}$$

$$\angle BPC = \theta \text{라 하면 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

직각삼각형 BCP에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}} = \frac{8}{6\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3}$$

사각형 BQCP는 원 O에 내접하므로

$$\angle CQB = \pi - \theta \text{이다.}$$

$$\cos(\angle CQB) = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = -\frac{1}{3}$$

삼각형 BQC에서 코사인법칙에 의하여

$$8^2 = k^2 + (3k)^2 - 2 \times k \times 3k \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$k^2 = \frac{16}{3}$$

따라서 삼각형 BQC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BQ} \times \overline{QC} \times \sin(\angle CQB)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3k \times k \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = k^2 \times \sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

78) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{AB} = \overline{AD} = k$ 라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ACB) = \frac{10^2 + \overline{BC}^2 - k^2}{2 \times 10 \times \overline{BC}}$$

$$= \frac{1}{20} \left(\overline{BC} + \frac{100 - k^2}{\overline{BC}} \right)$$

$$\cos(\angle DCA) = \frac{10^2 + \overline{CD}^2 - k^2}{2 \times 10 \times \overline{CD}}$$

$$= \frac{1}{20} \left(\overline{CD} + \frac{100 - k^2}{\overline{CD}} \right)$$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가

같으므로 $\cos(\angle ACB) = \cos(\angle DCA)$ 이다.

$$\frac{1}{20} \left(\overline{BC} + \frac{100 - k^2}{\overline{BC}} \right) = \frac{1}{20} \left(\overline{CD} + \frac{100 - k^2}{\overline{CD}} \right)$$

$$\overline{BC} - \overline{CD} = (100 - k^2) \times \left(\frac{1}{\overline{CD}} - \frac{1}{\overline{BC}} \right)$$

$$\overline{BC} - \overline{CD} = (100 - k^2) \times \frac{\overline{BC} - \overline{CD}}{\overline{BC} \times \overline{CD}}$$

$$\overline{AC} = 10 < 2R \text{이므로 } \overline{BC} \neq \overline{CD}$$

$$\text{그러므로 } \overline{BC} \times \overline{CD} = 100 - k^2$$

사각형 ABCD의 넓이는

두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2} k^2 \sin(\angle BAD) + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin(\pi - \angle BAD)$$

$$= \frac{1}{2} \{k^2 + (100 - k^2)\} \sin(\angle BAD)$$

$$= 50 \sin(\angle BAD) = 40$$

$$\text{에서 } \sin(\angle BAD) = \frac{4}{5} \text{이다.}$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)} = 2R \text{에서 } \overline{BD} = \frac{8}{5} R \text{이므로}$$

$$\overline{BD} : R = \frac{8}{5} : 1$$

$$\text{따라서 } f(k) = 100 - k^2, p = \frac{4}{5}, q = \frac{8}{5} \text{이므로}$$

$$\frac{f(10p)}{q} = (100 - 8^2) \times \frac{5}{8} = \frac{45}{2}$$

79) [정답] ①

[해설]

$$\overline{AB} = 3, \overline{BC} = \sqrt{13} \text{이고, } \angle BAC = \frac{\pi}{3} \text{이다.}$$

$\overline{AC} = x$ 라 하자. 삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의하여

$$(\sqrt{13})^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$

이므로 $x=4$ 이다.

$$\therefore \overline{AC}=4$$

삼각형 ABC의 넓이는 S_1 이다.

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$$

삼각형 ACD의 넓이는 S_2 이고, $S_2 = \frac{5}{6} S_1$ 이다.

$$\therefore S_2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$\angle ADC = \theta$ 라 하자. $\overline{AD} \times \overline{CD} = 9$ 이므로 S_2 는

$$\frac{1}{2} \times 9 \times \sin \theta = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore \sin(\angle ADC) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이가 R 이다.

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \theta} = 2R, \quad \frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}} = 2R, \quad R = \frac{18}{5\sqrt{3}}$$

이다.

$$\therefore \frac{R}{\sin(\angle ADC)} = \frac{\frac{18}{5\sqrt{3}}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}} = \frac{54}{25}$$

80) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos(\angle CBA) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{7}$$

$$\sin(\angle CBA) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{7} \quad (\text{참})$$

ㄴ. $\angle CBA = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면

$$\angle ADC = \pi - \theta$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} \times \sin \theta = 14 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} = 4\sqrt{10}$$

$\overline{AD} = k (k > 0)$ 이라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{10})^2 = k^2 + 7^2 - 2 \times k \times 7 \times \cos(\pi - \theta)$$

$$= k^2 + 49 + 14k \cos \theta$$

$$= k^2 + 6k + 49$$

$$k^2 + 6k - 111 = 0 \text{이므로}$$

$$\overline{AD} = -3 + \sqrt{9 + 111} = -3 + 2\sqrt{30}$$

ㄷ. 삼각형 ACD의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD의

넓이가 최대이므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호

AC와 만나는 점이다. 그러므로 $\overline{AD} = \overline{CD}$

$\overline{AD} = x (x > 0)$ 이라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에

의하여 $(4\sqrt{10})^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \cos(\pi - \theta)$

$$= 2x^2 + 2x^2 \times \frac{3}{7} = \frac{20}{7}x^2$$

$$x^2 = 56 \text{이므로 } \overline{AD} = 2\sqrt{14}$$

사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \sin(\pi - \theta) + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times (2\sqrt{14})^2 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} \times 6$$

$$= 8\sqrt{10} + 12\sqrt{10} = 20\sqrt{10} \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

81) [정답] ⑤

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하자.

$a_n = a + (n-1)d$ (단, n 은 자연수)

$a_5 = a + 4d$ 는 자연수이다.

$$S_8 = \frac{8(2a+7d)}{2} = 4(2a+7d) = \frac{68}{3}$$

$$2a+7d = \frac{17}{3}$$

$$2(a+4d) - d = 2a_5 - d = \frac{17}{3}$$

$$a_5 = \frac{1}{2}d + \frac{17}{6}$$

$$0 < d < 1 \text{이므로 } \frac{17}{6} < a_5 < \frac{10}{3}$$

$$a_5 = 3, d = \frac{1}{3}$$

$$a_5 = a + 4 \times \frac{1}{3} = 3, a = \frac{5}{3}$$

$$a_n = \frac{5}{3} + (n-1) \times \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a_{16} = \frac{5}{3} + 15 \times \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$$

82) [정답] ⑤

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_2 = -4$ 이므로

$$a_1 + d = -4 (d \neq 0)$$

..... ㉠

또한 수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$ 이라 하면 두 집합 A, B 를

$$A = \{a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d\}$$

$$B = \{2a_1 + d, 2a_1 + 3d, 2a_1 + 5d, 2a_1 + 7d, 2a_1 + 9d\}$$

로 놓을 수 있고 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $2a_1 + d$, 공차가 $2d$ 인 등차수열이다. 이때 $n(A \cap B) = 3$ 이 되려면 다음과 같이 세 경우를 생각해 볼 수 있다.

(i) $a_1 = b_1$ 일 때

즉, $a_1 = 2a_1 + d$ 에서 $a_1 = -d$ 이므로 조건 ㉠에 위배된다.

(ii) $a_1 = b_2$ 일 때

즉, $a_1 = 2a_1 + 3d$ 에서 $a_1 = -3d$

㉠과 연립하면 $a_1 = -6, d = 2$

$$\therefore a_{20} = -6 + 19 \times 2 = 32$$

(iii) $a_1 = b_3$ 일 때

즉, $a_1 = 2a_1 + 5d$ 에서 $a_1 = -5d$

㉠과 연립하면 $a_1 = -5, d = 1$

$$\therefore a_{20} = -5 + 19 \times 1 = 14$$

이상에서 조건을 만족하는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{20} 의 값의 합은

$$32 + 14 = 46$$

83) [정답] 30

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

조건 (가)에 의하여 $a_8 = S_8 - S_7 = 0$ 이므로

$$a_8 = a_1 + 7d = 0 \text{ 에서 } a_1 = -7d$$

S_n 의 값은 $n=8$ 에서 최소이므로 $S_9 \geq S_8$

$$a_9 = a_8 + d$$

$$= d \geq 0$$

$d=0$ 이면 $a_1=0$ 에서 모든 자연수 n 에 대하여

$S_n = 0$ 이므로 조건 (나) 를 만족시키지 않는다.

그러므로 $d > 0$

$n \geq 9$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이므로

$$m > 8 \text{ 일 때 } S_{2m} > S_m$$

조건 (나) 에 의하여

$$-S_m = S_{2m} = 162$$

$$-\frac{m\{2a_1 + (m-1)d\}}{2} = \frac{2m\{2a_1 + (2m-1)d\}}{2}$$

$$14d - (m-1)d = -28d + 2(2m-1)d$$

$$-m + 15 = 4m - 30 \text{ 에서}$$

$$m = 9$$

$$S_9 = \frac{9(-14d + 8d)}{2} = -162 \text{ 에서}$$

$$d = 6, a_1 = -42$$

따라서

$$a_{13} = a_1 + 12d$$

$$= -42 + 12 \times 6$$

$$= 30$$

84) [정답] ①

[해설]

S_n 이 주어진 조건을 만족시키면

$i \neq j$ 인 임의의 두 자연수 i, j 에 대하여

$S_i - S_j \neq 0$ 이므로

$$S_i - S_j = (\pi^2 - 36i + q) - (pj^2 - 36j + q) = (i-j)(pi + pj - 36) \neq 0$$

따라서 $i+j \neq \frac{36}{p}$

$p \leq 4$ 이면 $i+j = \frac{36}{p}$ 인 서로 다른 두 자연수 i, j 가

존재한다.

$p=5$ 이면 $i+j = \frac{36}{p}$ 인 서로 다른 두 자연수 i, j 가

존재하지 않는다.

따라서 p 의 최솟값은 5, 즉 $p_1 = 5$ 이다.

$p=5$ 일 때 $S_n = 5n^2 - 36n + q$ 이므로

$$a_1 = S_1 = q - 31$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때, } a_n = S_n - S_{n-1} = 10n - 41$$

이때 $a_2 = -21, a_3 = -11, a_4 = -1, a_5 = 9, a_6 = 19, \dots$

$|a_k| < a_1$ 을 만족시키는 자연수 k 의 개수가 3 이므로

k 의 값은 3, 4, 5 이다.

$$11 < a_1 \leq 19, 11 < q - 31 \leq 19$$

$$42 < q \leq 50 \text{ 이다.}$$

따라서 모든 q 의 값의 합은

$$43 + 44 + \dots + 50 = \frac{8 \times (43 + 50)}{2} = 372$$

85) [정답] ①

[해설]

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자. $d \geq 0$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 의

첫째항이 양수이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이 되어

조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $d < 0$ 이어야 한다.

(i) $S_3 = S_6$ 인 경우

$$\frac{3(2a_1 + 2d)}{2} = \frac{6(2a_1 + 5d)}{2} \text{ 에서}$$

$$a_1 = -4d \text{이므로}$$

$$S_3 = S_6 = -9d > 0,$$

$$S_{11} = \frac{11(2a_1 + 10d)}{2} = 11d < 0$$

$$\text{즉, } S_3 = -S_{11} - 3 \text{에서}$$

$$-9d = -11d - 3, \quad d = -\frac{3}{2}$$

$$a_1 = -4d = 6$$

(ii) $S_3 = -S_6$ 인 경우

$$\frac{3(2a_1 + 2d)}{2} = -\frac{6(2a_1 + 5d)}{2} \text{에서}$$

$$a_1 = -2d \text{이므로}$$

$$S_3 = -S_6 = -3d > 0$$

$$S_{11} = \frac{11(2a_1 + 10d)}{2} = 33d < 0$$

$$\text{즉, } S_3 = -S_{11} - 3 \text{에서}$$

$$-3d = -33d - 3, \quad d = -\frac{1}{10}$$

$$a_1 = -2d = \frac{1}{5}$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 의

첫째항의 합은 $6 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$ 이다.

86) [정답] 85

[해설]

방정식 $f(x)=x$ 의 모든 실근이 0, 3이므로 방정식 $f(f(x))=f(x)$ 의 실근을 구하는 것은 $f(x) \times (f(x)-3)=0$ 의 실근을 구하는 것과 같다.

$0 \leq x < 4$ 일 때, 방정식 $f(x) \times (f(x)-3)=0$ 에서

$$-x^2 + 4x = 0 \text{이면 } x = 0 \quad (\because 0 \leq x < 4)$$

$$-x^2 + 4x = 3 \text{이면 } x^2 - 4x + 3 = 0, \quad (x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 $0 \leq x < 4$ 에서 방정식 $f(x) \times (f(x)-3)=0$ 의 모든 실근은 0, 1, 3이므로

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \text{1}, \quad a_3 = 3$$

이다. 또한 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4)=f(x)$ 이므로

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 3$$

$$a_4 = 0+4=4, \quad a_5 = 1+4=5, \quad a_6 = 3+4=7$$

$$a_7 = 2 \times 4 = 8, \quad a_8 = 1+2 \times 4 = 9, \quad a_9 = 3+2 \times 4 = 11$$

$\vdots$

이므로 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$ 은 첫째항이 각각 0, 1, 3이고 공차가 모두 4인 등차수열이다.

$$\therefore a_{3n-2} = 0 + (n-1) \times 4,$$

$$a_{3n-1} = 1 + (n-1) \times 4,$$

$$a_{3n} = 3 + (n-1) \times 4$$

이다.

$$a_{20} = 1 + (7-1) \times 4 = 25, \quad a_{21} = 3 + (7-1) \times 4 = 27,$$

$$a_{22} = 0 + (8-1) \times 4 = 28 \text{이므로 } a_{20} + a_{21} + a_{22} = \text{80} \text{이다.}$$

이상에서 (가) 1, (나) 4, (다) 80이므로

$$p = 1, \quad q = 4, \quad r = 80$$

$$\therefore p + q + r = 1 + 4 + 80 = 85$$

87) [정답] 19

[해설]

S_n 이 등차수열의 합이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$S_n = pn^2 + qn \quad (p, q \text{는 상수})$$

$$\text{라 하면 } a_n = 2pn - p + q$$

모든 항이 자연수이므로 $2p$ 는 음이 아닌 정수이다.

$$\sum_{n=1}^7 S_n = \sum_{n=1}^7 (pn^2 + qn)$$

$$= p \times \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} + q \times \frac{7 \cdot 8}{2}$$

$$= 140p + 28q = 644$$

$$\therefore 5p + q = 23$$

$$S_1 = a_1 = p + q = -4p + 23 \geq 1 \text{에서 } p \leq \frac{11}{2}$$

$$a_7 = S_7 - S_6 = 13p + q = 8p + 23 \text{에서}$$

$$a_7 = 8p + 23 \leq 67$$

a_7 이 13의 배수이므로 가능한 수는 13, 26, 39, 52, 65이다.

이 중에서 $2p$ 가 정수인 경우는

$$a_7 = 8p + 23 = 39$$

일 때이다.

따라서 $p = 2$ 이고, $a_2 = 3p + q = -2p + 23 = 19$ 이다.

88) [정답] 170

[해설]

$$a_{2m} = -a_m \text{에서 } a_m + md = -a_m$$

$$2a_m = -md \text{이므로}$$

m 과 d 중에서 적어도 하나는 짝수이다.

m 이 짝수, 즉 $m = 2p$ (p 는 자연수)라 하면

$$a_{2m} + a_m = a_{4p} + a_{2p}$$

$$= \{a_1 + (4p-1)d\} + \{a_1 + (2p-1)d\}$$

$$= 2\{a_1 + (3p-1)d\}$$

$$= 2a_{3p} = 0$$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 m 은 홀수이고 d 는 짝수이다.

$m = 2l - 1$ (l 은 자연수)라 하면

$$a_{4l-2} = -a_{2l-1} \text{에서}$$

$$a_{3l-1} = a_{4l-2} - (l-1)d$$

$$= -a_{2l-1} - (l-1)d$$

$$= -a_{3l-2}$$

이 고 $d > 0$ 이므로

$$1 \leq n \leq 3l-2 \text{일 때 } a_n < 0,$$

$$n \geq 3l-1 \text{일 때 } a_n > 0 \text{이다.}$$

$$\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = \sum_{k=2l-1}^{4l-2} |a_k|$$

$$= -a_{2l-1} - a_{2l} - a_{2l+1} - \cdots - a_{3l-2}$$

$$+ a_{3l-1} + a_{3l} + a_{3l+1} + \cdots + a_{4l-2}$$

$$= -a_{2l-1} - (a_{2l-1} + d) - (a_{2l-1} + 2d) - \cdots - (a_{2l-1} + (l-1)d)$$

$$+ (a_{2l-1} + ld) + \{a_{2l-1} + (l+1)d\} + \cdots + \{a_{2l-1} + (2l-1)d\}$$

$$= -\{1+2+3+\cdots+(l-1)\}d$$

$$+ \{l+(l+1)+(l+2)+\cdots+(2l-1)\}d$$

$$= -\frac{l(l-1)}{2}d + \frac{l\{l+(2l-1)\}}{2}d$$

$$= l^2d = 128$$

l 은 자연수이고 d 는 짝수이므로 모든 순서쌍 (l, d) 는

$(1, 128), (2, 32), (4, 8), (8, 2)$ 이다.

따라서 모든 d 의 값의 합은 $2+8+32+128=170$

89) [정답] ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 양수이고 조건

(가)에서

$$a_5 \times a_7 < 0$$

이므로

$$a_5 < 0, a_7 > 0$$

즉, $n \leq 5$ 일 때 $a_n < 0$ 이고, $n \geq 7$ 일 때

$a_n > 0$ 이다.

이때 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^6 |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^6 |a_{2k}|$$

이므로

$$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$$

$$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$$

$$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 3이므로

$$(a_1 + 18) + (a_1 + 24) + (a_1 + 30)$$

$$= 6 - (a_1 + 3) - (a_1 + 9) + |a_1 + 15|$$

$$|a_1 + 15| = 5a_1 + 78 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①에서 $a_1 + 15 \geq 0$ 이면

$$a_1 + 15 = 5a_1 + 78$$

$$4a_1 = -63$$

$$a_1 = -\frac{63}{4} < -15$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 + 15 < 0$ 이므로 ①에서

$$-a_1 - 15 = 5a_1 + 78$$

$$6a_1 = -93$$

$$a_1 = -\frac{31}{2}$$

따라서

$$a_{10} = a_1 + 9 \times 3$$

$$= -\frac{31}{2} + 27$$

$$= \frac{23}{2}$$

90) [정답] ②

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$\text{조건 (나)에서 } \sum_{k=1}^9 a_k = \frac{9(2a+8d)}{2} = 27$$

$$a + 4d = 3 \text{ 즉, } a_5 = 3$$

$\cdots \cdots \textcircled{1}$

$$a_5 > 0 \text{이고 } d > 0 \text{이므로 } a_6 > 0$$

(i) $a_4 \geq 0$ 인 경우

$$|a_4| + |a_6| = (a + 3d) + (a + 5d) = 2a + 8d = 8$$

$$a + 4d = 4 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에 모순이다.}$$

(ii) $a_4 < 0$ 인 경우

$$|a_4| + |a_6| = -(a + 3d) + a + 5d = 2d = 8, d = 4$$

(i), (ii)에서 $d = 4$ 이므로

$$a_{10} = a_5 + 5d = 3 + 5 \times 4 = 23$$

91) [정답] ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하자.

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{2m+1} a_k = \frac{(2m+1)\{2a+5 \times (2m+1-1)\}}{2}$$

$$= (2m+1)(a+5m) < 0$$

$2m+1 > 0$ 이므로 $a+5m = a_{m+1} < 0$

(i) $a_{m+1} = -1$ 인 경우

$$|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| = 11 \text{이므로}$$

조건 (나)를 만족시킨다.

$$a_{m+1} = -1 \text{이므로}$$

$$a_{m+6} = 24, a_{m+7} = 29$$

$24 < a_{21} < 29$ 인 a_{21} 이 존재하지 않는다.

(ii) $a_{m+1} = -2$ 인 경우

$$|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| = 12 \text{이므로}$$

조건 (나)를 만족시킨다.

$$a_{m+1} = -2 \text{이므로 } a_{m+7} = 28$$

따라서 $m+7=21$ 이므로 $m=14$

(iii) $a_{m+1} \leq -3$ 인 경우

$$|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| \geq 13 \text{이므로}$$

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $m=14$

92) [정답] ②

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d < 0$)이라 하자.

a_6, d 가 모두 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 정수이다.

$$d = a_6 - a_5 = -2 - a_5 \text{이고 } d < 0 \text{이므로 } a_5 > -2$$

즉, $a_5 = -1$ 또는 a_5 는 음이 아닌 정수이다.

(i) $a_5 = -1$ 일 때

$$d = -2 - a_5 = -1 \text{이므로 } a_n = -n + 4$$

$$\sum_{k=1}^8 a_k = -4, \sum_{k=1}^8 |a_k| = 16 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^8 |a_k| = \sum_{k=1}^8 a_k + 42 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 성립하지 않는다.

(ii) a_5 는 음이 아닌 정수일 때

$$n \leq 5 \text{일 때 } a_n \geq 0 \text{이고 } |a_n| = a_n$$

$$n \geq 6 \text{일 때 } a_n < 0 \text{이고 } |a_n| = -a_n$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } -a_6 - a_7 - a_8 = a_6 + a_7 + a_8 + 42$$

$$a_6 + a_7 + a_8 = -21$$

$$a_6 + (a_6 + d) + (a_6 + 2d) = -21, a_6 + d = -7$$

$$a_6 = -2 \text{이므로 } d = -5$$

(i), (ii)에서 $d = -5$ 이고 $a_1 = a_6 - 5d = -2 + 25 = 23$ 이다.

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^8 a_k = \frac{8 \times \{2 \times 23 + 7 \times (-5)\}}{2} = 44$$

93) [정답] ①

[해설]

두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공차를 각각 d, d' 이라 하자.

조건 (나)에 의하여

$$a_{m+1} - b_{m+1} = (a_m + d) - (b_m + d')$$

$$= d - d' < 0$$

$$a_m - b_m = \{a_1 + (m-1)d\} - \{b_1 + (m-1)d'\}$$

$$= (a_1 - b_1) + (m-1)(d - d') = 0$$

에서 $a_1 - b_1 = (m-1)(d' - d)$ 이고,

$$m-1 > 0, d' - d > 0 \text{이므로 } a_1 - b_1 > 0$$

그러므로 조건 (가)에서 $a_1 - b_1 = 5$

$$(m-1)(d' - d) = 5$$

$m-1, d' - d$ 가 모두 자연수이고 $m \geq 3$ 이므로

$$m = 6$$

따라서

$$\sum_{k=1}^m b_k = \sum_{k=1}^6 b_k = \frac{6 \times (b_1 + b_6)}{2}$$

$$= \frac{6\{(a_1 - 5) + a_6\}}{2}$$

$$= \frac{6(a_1 + a_6)}{2} - 15$$

$$= \sum_{k=1}^6 a_k - 15 = 9 - 15 = -6$$

94) [정답] ①

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d \neq 0$)라 하자.

$|a_6| = a_8$ 이고, $d \neq 0$ 이므로

$$a_8 = -a_6, \quad a_6 + a_8 = 0$$

$$a_8 > 0 \text{이므로 } a_6 < 0$$

등차중항의 성질에 의하여

$$2a_7 = a_6 + a_8, \quad a_7 = 0$$

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n - a_7 = (n-7) \times d, \quad a_n = d(n-7)$$

$$\sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96} \text{이다.}$$

$$\sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{d(k-7) \times d(k-6)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{d^2} \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{k-7} - \frac{1}{k-6} \right) \\
 &= \frac{1}{d^2} \times \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) \\
 &= \frac{1}{d^2} \times \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{1} \right) \\
 &= \frac{5}{6d^2}
 \end{aligned}$$

$$\frac{5}{6d^2} = \frac{5}{96} \text{ 이므로}$$

$$d^2 = 16, \quad d = \pm 4$$

$a_6 < 0, a_8 > 0$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 4(n-7)$$

이다.

$a_7 = 0$ 이므로 등차중항의 성질에 의하여

$$a_{7-k} + a_{7+k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, 6)$$

이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{15} a_k$ 의 값은

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{15} a_k &= \{(a_1 + a_{13}) + \dots + (a_6 + a_8) + a_7\} + (a_{14} + a_{15}) \\
 &= a_{14} + a_{15} \\
 &= 4(7+8) \\
 &= 60
 \end{aligned}$$

95) [정답] ①

[해설]

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n \text{ 에 대하여}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$\frac{1}{a_1} = 1^2 + 2 \times 1 = 3$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2n-1)a_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)a_k} \\
 &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\
 &= 2n+1 \quad \dots\dots \textcircled{7}
 \end{aligned}$$

이때 $\frac{1}{a_1} = 3$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2n-1)a_n} &= 2n+1 \quad \therefore a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
 \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) \\
 &= \frac{10}{21}
 \end{aligned}$$

96) [정답] ①

[해설]

$a_1 = 2$ 인 수열 $\{a_n\}$ 과 $b_1 = 2$ 인 등차수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2} n^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 성립하므로 등식의 양변에 $n=1$ 을 대입하면

$$\frac{a_1}{b_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{b_2} = \frac{1}{2}, \quad b_2 = 4$$

이때 등차수열 $\{b_n\}$ 에서 $b_2 - b_1 = 2$ 이므로

$$b_n = 2 + 2(n-1) = 2n$$

즉 $b_{k+1} = 2(k+1)$ 이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2(k+1)} = \frac{1}{2} n^2, \quad \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} = n^2$$

$n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

즉 $a_n = (n+1)(2n-1)$ ($n \geq 2$) 이고 $a_1 = 2$ 이므로

$$a_n = (n+1)(2n-1) = 2n^2 + n - 1$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^5 a_k &= \sum_{k=1}^5 (2k^2 + k - 1) \\
 &= 2 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} - 5 \\
 &= 120
 \end{aligned}$$

97) [정답] ③

[해설]

$$\frac{1}{a_1 \times b_1} = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{a_k \times b_k} = \frac{1}{12}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_n \times b_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k \times b_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k \times b_k} \\
 &= \frac{n}{8n+4} - \frac{n-1}{8n-4} = \frac{4}{(8n+4)(8n-4)}
 \end{aligned}$$

그러므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{1}{a_n \times b_n} = \frac{4}{(8n+4)(8n-4)}$$

두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공차가 같으므로

공차를 d 라 하면

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad b_n = b_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned} a_n \times b_n &= (dn + a_1 - d)(dn + b_1 - d) \\ &= \frac{(8n+4)(8n-4)}{4} = (4n+2)(4n-2) \end{aligned}$$

에서 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 모든 항이 자연수이므로

$$a_n = 4n+2, \quad b_n = 4n-2 \quad \text{또는} \quad a_n = 4n-2, \quad b_n = 4n+2$$

따라서

$$\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^5 8k = 8 \sum_{k=1}^5 k = 8 \times \frac{5 \times 6}{2} = 120$$

98) [정답] ①

[해설]

n 이 홀수이면 $n^2 - 16n + 48$ 의 n 제곱근 중

실수인 것의 개수는 항상 1이므로

$$f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = 1$$

n 이 짝수이면 $n^2 - 16n + 48$ 의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $n^2 - 16n + 48 > 0$ 인 경우

$$(n-4)(n-12) > 0 \text{에서 } n < 4 \text{ 또는 } n > 12$$

이때 $f(n) = 2$ 이므로

$$f(2) = 2$$

(ii) $n^2 - 16n + 48 = 0$ 인 경우

$$(n-4)(n-12) = 0 \text{에서 } n = 4 \text{ 또는 } n = 12$$

이때 $f(n) = 1$ 이므로

$$f(4) = 1$$

(iii) $n^2 - 16n + 48 < 0$ 인 경우

$$(n-4)(n-12) < 0 \text{에서 } 4 < n < 12$$

이때 $f(n) = 0$ 이므로

$$f(6) = f(8) = f(10) = 0$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=2}^{10} f(n) = 4 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 3 \times 0 = 7$$

99) 2 이상 9 이하의 자연수 m 을 거듭제곱수인지 아닌지에 따라서 구별하여 나타내면 다음과 같다.

$$2, 3, 2^2, 5, 6, 7, 2^3, 3^2$$

(i) m 이 거듭제곱수가 아닌 경우

곧, m 이 2, 3, 5, 6, 7일 때

$$\sqrt[n]{m^{12}} = m^{\frac{12}{n}} \text{이 정수가 되는 2 이상의 자연수 } n \text{은}$$

2, 3, 4, 6, 12로 그 개수는 5이다.

$$\text{따라서 } f(2) = f(3) = f(5) = f(6) = f(7) = 5$$

(ii) m 이 제곱수인 경우

곧, m 이 $2^2, 3^2$ 일 때

$m = k^2$ ($k = 2, 3$)이라 하면

$$\sqrt[n]{m^{12}} = \sqrt[n]{(k^2)^{12}} = \sqrt[n]{k^{24}} = k^{\frac{24}{n}} \text{이 정수가 되는}$$

2 이상의 자연수 n 은 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24로 그 개수는 7이다.

$$\text{따라서 } f(4) = f(9) = 7$$

(iii) m 이 세제곱수인 경우

곧, m 이 2^3 일 때

$$\sqrt[n]{m^{12}} = \sqrt[n]{(2^3)^{12}} = \sqrt[n]{2^{36}} = 2^{\frac{36}{n}} \text{이 정수가 되는 2 이상의}$$

자연수 n 은 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36으로 그 개수는 8이다.

$$\text{따라서 } f(8) = 8$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 값은

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^9 f(m) &= 5 \times 5 + 2 \times 7 + 1 \times 8 \\ &= 47 \end{aligned}$$

m^{12} 의 n 제곱근은 x 에 대한 방정식

$$x^n = m^{12} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

의 근이다.

이때 m 의 값에 따라 $\textcircled{1}$ 이 정수의 근을 갖도록 하는

2 이상의 자연수 n 의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $m = 2$ 일 때

$\textcircled{1}$ 에서 $x^n = 2^{12}$ 이므로 이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은 2, 3, 4, 6, 12이다.

$$\text{곧, } f(2) = 5$$

(ii) $m = 3$ 일 때

$\textcircled{1}$ 에서 $x^n = 3^{12}$ 이므로 이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은 2, 3, 4, 6, 12이다.

$$\text{곧, } f(3) = 5$$

(iii) $m = 4$ 일 때

$\textcircled{1}$ 에서 $x^n = 4^{12} = 2^{24}$ 이므로 이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이다.

$$\text{곧, } f(4) = 7$$

(iv) $m = 5$ 일 때

$\textcircled{1}$ 에서 $x^n = 5^{12}$ 이므로 이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은 2, 3, 4, 6, 12이다.

$$\text{곧, } f(5) = 5$$

(v) $m = 6$ 일 때

$\textcircled{1}$ 에서 $x^n = 6^{12}$ 이므로 이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은 2, 3, 4, 6, 12이다.

$$\text{곧, } f(6) = 5$$

(vi) $m = 7$ 일 때

$\textcircled{1}$ 에서 $x^n = 7^{12}$ 이므로 이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은 2, 3, 4, 6, 12이다.

$$\text{곧, } f(7) = 5$$

(vii) $m=8$ 일 때

㉠에서 $x^n = 8^{12} = 2^{36}$ 이므로 이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36이다.

곧, $f(8)=8$

(viii) $m=9$ 일 때

㉠에서 $x^n = 9^{12} = 3^{24}$ 이므로 이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이다.

곧, $f(9)=7$

(i) ~ (viii)에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^9 f(m) &= f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(9) \\ &= 5 + 5 + 7 + 5 + 5 + 8 + 7 \\ &= 5 \times 5 + 7 \times 2 + 8 \\ &= 47 \end{aligned}$$

100) [정답] 7

[해설]

$a_n = \log_2 x$ 일 때 $x = 2^{a_n}$ 이므로 점 A_n 의 x 좌표는 2^{a_n} 이다.

$\overline{OA_n} = 2^{a_n}$, $\overline{OA_{n+1}} = 2^{a_{n+1}}$ 이고 $\overline{OA_n} : \overline{OA_{n+1}} = 1 : 4$ 이므로

$$2^{a_n} : 2^{a_{n+1}} = 1 : 4, \quad a^{a_{n+1}} = 4 \times 2^{a_n} = 2^{a_n+2}$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 2$$

그러므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 $\boxed{2}$ 이다.

점 B_n 의 좌표는 $(2^{a_n}, 4^{a_n})$ 이고,

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \times \overline{A_n B_n} \times \overline{A_n A_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \times 4^{a_n} \times (2^{a_{n+1}} - 2^{a_n}) \\ &= \frac{1}{2} \times 2^{2a_n} \times (2^{a_n+2} - 2^{a_n}) \\ &= \frac{1}{2} \times 2^{2a_n} \times 3 \times 2^{a_n} \\ &= \boxed{\frac{3}{2}} \times 8^{a_n} \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n = 2n - 1$$

$$\text{따라서 } \textcircled{7} \text{에서} \quad T_n = \frac{3}{2} \times 8^{2n-1}$$

수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{3}{2} \times 8 = 12$, 공비가 64인

등비수열이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 T_n &= \frac{12 \times (64^5 - 1)}{64 - 1} \\ &= \frac{12 \times (2^{30} - 1)}{63} \end{aligned}$$

$$= \boxed{\frac{4}{21}} \times (2^{30} - 1)$$

이다.

이상에서 (가) 2 (나) $\frac{3}{2}$ (다) $\frac{4}{21}$ 이다.

$$p=2, q=\frac{3}{2}, r=\frac{4}{21} \text{ 이므로 } \frac{p}{q \times r} = 7$$

101) [정답] ②

[해설]

$$b_2 = -2 \text{에서} \quad a_1 - a_2 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$b_3 + b_7 = 0 \text{에서}$$

$$(a_1 - a_2 + a_3) + (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7) = 0$$

$$\dots\dots \textcircled{8}$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\textcircled{7} \text{에서} \quad -d = -2 \text{이므로} \quad d = 2$$

$$\textcircled{8} \text{에서} \quad (a+d) + (a+3d) = 0$$

$$\therefore a = -4$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k \text{에서}$$

$$b_1 = a_1 = a$$

$$b_2 = a_1 - a_2 = -d$$

$$b_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a + d$$

$$\vdots$$

$$b_9 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9$$

$$= a + 4d$$

$$b_2 + b_3 = b_4 + b_5 = b_6 + b_7 = b_8 + b_9 = a \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^9 b_k = 5a = -20$$

102) [정답] ③

[해설]

$$a_4 = r \text{이고 } |r| < 1 \text{이므로}$$

$$a_5 = r + 3$$

$$a_6 = r + 6$$

$$a_7 = -\frac{1}{2}a_6 = \frac{r+6}{-2} \quad (\because a_5 < 5 < a_6)$$

$$a_8 = \frac{r+6}{-2} + 3 = -\frac{1}{2}r$$

$$\text{조건 (가)에서 } a_8 = r^2 \text{이므로 } r^2 = -\frac{1}{2}r \text{에서 } r = -\frac{1}{2}$$

주어진 조건에 따라 a_3, a_2, a_1 을 구하면 다음과 같다.

a_4	a_3	a_2	a_1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	7	-14

이 때,

$$|a_{4n}| = \left| \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right| < 1 \text{에서}$$

$$|a_{4n+1}| = \left| \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 3 \right| < 5$$

$$|a_{4n+2}| = \left| \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 6 \right| > 5$$

$$|a_{4n+3}| = \left| \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 3 \right| < 5$$

이므로 a_{4n+2} 만 5보다 크다.

따라서, $|a_m| \geq 5$ 를 만족하는 m 의 개수는

$m = 1, 2, 6, 10, \dots, 98$ 의 26개다. 따라서 $p = 26$,

$a_1 = -14$ 이므로 $p + a_1 = 12$ 이다.

[다른 풀이]

주어진 조건에 따라 나열을 해보면 다음 표와 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4
$-2r+3$	$-2r+6$	$r-3$	r
$4r-12$			

a_5	a_6	a_7	a_8
$r+3$	$r+6$	$\frac{r+6}{-2}$	$-\frac{1}{2}r$

$a_1 < 0$ 이고 모든 자연수 k 에 대하여 $a_{4k} = r^k$ 이므로

$$a_8 = -\frac{1}{2}r = r^2$$

따라서 $r = -\frac{1}{2}$ 이고 $a_1 = -14$ 이다.

모든 자연수 k 에 대하여 $|a_{4k-2}| \geq 5$ 이고

$$|a_1| = |-14| > 5 \text{이다.}$$

따라서, $|a_m| \geq 5$ 를 만족하는 m 의 개수는 $25 + 1 = 26$ 개다.

$p = 26$, $a_1 = -14$ 이므로 $p + a_1 = 12$ 이다.

103) [정답] ①

[해설]

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하자. 자연수 a 를 자연수 k 에 대하여 나타내면

(i) $a = 4k - 3$ 일 때

$$a_2 = 4k - 2, a_3 = 2k - 1, a_4 = 2k$$

$$a_2 + a_4 = 40 \text{ 이므로}$$

$$6k - 2 = 40, \quad k = 7$$

$$\therefore a = 25$$

(ii) $a = 4k - 2$ 일 때

$$a_2 = 2k - 1, a_3 = 2k, a_4 = k$$

$$a_2 + a_4 = 40 \text{ 이므로 } 3k - 1 = 40$$

$3k - 1 = 40$ 인 자연수 k 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a = 4k - 1$ 일 때

$$a_2 = 4k, a_3 = 2k, a_4 = k$$

$$a_2 + a_4 = 40 \text{ 이므로}$$

$$5k = 40, \quad k = 8$$

$$\therefore a = 31$$

(iv) $a = 4k$ 일 때

$$a_2 = 2k, a_3 = k$$

자연수 k 를 자연수 m 에 대하여 나타내면

(1) $k = 2m - 1$ 일 때

$$a_4 = 2m = k + 1$$

$$a_2 + a_4 = 40 \text{ 이므로}$$

$$3k + 1 = 40, \quad k = 13$$

$$\therefore a = 52$$

(2) $k = 2m$ 일 때

$$a_4 = m = \frac{k}{2}$$

$$a_2 + a_4 = 40 \text{ 이므로}$$

$$\frac{5}{2}k = 40, \quad k = 16$$

$$\therefore a = 64$$

이상에서 자연수 a 의 값은

$$25, 31, 52, 64$$

a_1 의 값은 25, 31, 52, 64 이므로 합은 172이다.

104) [정답] 180

[해설]

$$\begin{aligned} a_{2n-1} + a_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^{2(n-1)} a_k \\ &= 17n - 17(n-1) = 17 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

조건 (나)에 의하여

$$|a_{2n} - a_{2n-1}| = 2(2n-1) - 1 = 4n - 3 \quad (n \geq 1)$$

(i) $n = 2$ 인 경우

$$|a_4 - a_3| = 5 \text{ 이고 } a_3 + a_4 = 17$$

$$(a_3, a_4) = (6, 11) \text{ 또는 } (a_3, a_4) = (11, 6)$$

조건 (나)에 의하여

$$|a_3 - a_2| = |a_3 - 9| = 3 \text{ 이므로}$$

$$a_3 = 6, a_4 = 11$$

(ii) $n = 3$ 인 경우

$$|a_6 - a_5| = 9 \text{ 이고 } a_5 + a_6 = 17$$

$$(a_5, a_6) = (4, 13) \text{ 또는 } (a_5, a_6) = (13, 4)$$

조건 (나)에 의하여

$$|a_5 - a_4| = |a_5 - 11| = 7 \text{ 이므로}$$

$$a_5 = 4, a_6 = 13$$

(i), (ii)와 같은 방법을 반복하면

$$a_8 = 15, a_{10} = 17, \dots, a_{20} = 27 \text{ 이므로}$$

$\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$ 의 값은 첫째항이 9이고 공차가 2인 등차수열의

첫째항부터 제10항까지의 합과 같다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \frac{10 \times (18 + 9 \times 2)}{2} = 180$$

105) [정답] ①

[해설]

$$a_{n+1} = 1 - 4 \times S_n \text{에서 } S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} a_{n+1}$$

$$n=1 \text{일 때, } a_1 = S_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} a_2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} a_{n+1} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} a_n \right) \\ &= -\frac{1}{4} a_{n+1} + \frac{1}{4} a_n \end{aligned}$$

이므로 $a_{n+1} = -3a_n$ ($n \geq 2$)

즉, 수열 $\{a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 a_2 이고 공비가 -3 인

등비수열이다.

$$a_4 = a_2 \times (-3)^2 = 4 \text{에서 } a_2 = \frac{4}{9} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$a_6 = a_4 \times (-3)^2 = 4 \times 9 = 36$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a_1 = \frac{5}{36}$$

$$\text{따라서 } a_1 \times a_6 = \frac{5}{36} \times 36 = 5$$

106) [정답] ②

[해설]

$$b_4 = a_3 + b_3$$

$$b_5 = b_4 + 1 = a_3 + b_3 + 1$$

$$b_6 = b_5 + 1 = a_3 + b_3 + 2$$

$$b_7 = a_6 + b_6 = a_6 + a_3 + b_3 + 2$$

$$b_8 = b_7 + 1 = a_6 + a_3 + b_3 + 3$$

$$b_9 = b_8 + 1 = a_6 + a_3 + b_3 + 4$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 1 + 2d, a_6 = 1 + 5d \text{ 이므로}$$

$$b_9 - b_3 = a_6 + a_3 + 4 = 7d + 6 = 27$$

$$d = 3$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10 \times \{2 \times 1 + (10-1) \times 3\}}{2} = 145$$

[참고]

$b_1 = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$b_3 = b_1 + 2 = \alpha + 2$$

$$b_9 = a_6 + a_3 + b_1 + 6 = 2 + 7d + \alpha + 6$$

$$b_9 - b_3 = 7d + 6$$

107) [정답] ②

[해설]

주어진 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 k 는

자연수이므로

$$a_1 = k > 0$$

$$a_2 = a_1 - 2 \times 1 - k = -2 < 0$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2 - k = 2 - k$$

(i) $k=1$ 일 때,

$$a_3 = 1 \text{ 이므로}$$

$$a_4 = a_3 - 2 \times 3 - 1 = -6 < 0$$

$$a_5 = a_4 + 2 \times 4 - 1 = 1 > 0$$

$$a_6 = a_5 + 2 \times 5 - 1 = -10 > 0$$

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=2$ 일 때,

$a_3 = 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k \geq 3$ 일 때,

$$a_3 = 2 - k < 0 \text{ 이므로}$$

$$a_4 = a_3 + 6 - k = 8 - 2k$$

(1) $k=3$ 일 때,

$$a_3 = -1, a_4 = 2 \text{ 이므로}$$

$$a_5 = a_4 - 8 - 3 = -9 < 0$$

$$a_6 = a_5 + 2 \times 5 - 3 = -2 < 0$$

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(2) $k=4$ 일 때,

$a_4 = 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(3) $k \geq 5$ 일 때,

$$a_4 = 8 - 2k < 0 \text{ 이므로}$$

$$a_5 = a_4 + 8 - k = 16 - 3k$$

(a) $k=5$ 일 때,

$$a_3 = -3, a_4 = -2, a_5 = 1 > 0 \text{ 이므로}$$

$$a_6 = a_5 - 10 - 5 = -14$$

$$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0 \text{ 이므로 조건을 만족시킨다.}$$

(b) $k \geq 6$ 일 때,

$$a_5 = 16 - 3k < 0 \text{ 이므로}$$

$$a_6 = a_5 + 10 - k = 26 - 4k$$

$$a_3 < 0, a_4 < 0, a_5 < 0 \text{ 이므로}$$

$$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0 \text{ 를 만족시키기 위해서는}$$

$$26 - 4k > 0, \quad k < \frac{13}{2}$$

$$k \geq 6 \text{ 이므로 } 6 \leq k < \frac{13}{2}$$

따라서 자연수 k 는 6 이다.

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 모든 k 의 값의 합은

$$3 + 5 + 6 = 14$$

108) [정답] 8

[해설]

조건 (나)에서 모든 자연수 n 에 대하여

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0$$

이므로

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}k \text{ 또는 } a_{n+1} = -ka_n$$

$a_1 = k$ 이고 $a_2 \times a_3 < 0$ 이므로 $a_2 = -k^2$ 이면 $a_3 = k^3$ 이어야

하고, $a_2 = \frac{k}{3}$ 이면 $a_3 = -\frac{k^2}{3}$ 또는 $a_3 = -\frac{k}{3}$ 이다. 따라서

이를 표로 나타내면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
k	$-k^2$	k^3	$-k^4$	0
k	$-k^2$	k^3	$k^3 - \frac{2}{3}k$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k^2}{3}$	$\frac{k^3}{3}$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k^2}{3}$	$-\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k}{3}$	$\frac{k^2}{3}$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k}{3}$	$-k$	0

(i) $a_4 = -k^4$ 일 때

$$a_5 = k^5 \text{ 또는 } a_5 = -k^4 - \frac{2}{3}k \text{ 이므로 } a_5 = 0 \text{ 을}$$

만족시키는 k 는 존재하지 않는다.

(ii) $a_4 = k^3 - \frac{2}{3}k$ 일 때

(a) $a_5 = \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) \times (-k)$ 인 경우

$$-k^2\left(k^2 - \frac{2}{3}\right) = 0 \quad \therefore k^2 = \frac{2}{3}$$

(b) $a_5 = \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) - \frac{2}{3}k$ 인 경우

$$k^3 - \frac{4}{3}k = 0 \quad \therefore k^2 = \frac{4}{3}$$

(iii) $a_4 = \frac{k^3}{3}$ 일 때

$$\frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k = 0 \quad \therefore k^2 = 2$$

(iv) $a_4 = -\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$ 일 때

$a_5 = 0$ 을 만족시키는 k 는 존재하지 않는다.

(v) $a_4 = \frac{k^2}{3}$ 일 때

$$\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k = 0 \quad \therefore k^2 = 4$$

(vi) $a_4 = -k$ 인 경우

$a_5 = 0$ 을 만족시키는 k 는 존재하지 않는다.

이상에서 조건을 만족시키는 모든 양수 k 에 대하여 k^2 의 값의 합은

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 2 + 4 = 8$$

109) [정답] ②

[해설]

조건 (나)에서

$$a_{n+1} = a_n - 3 \text{ 또는 } a_{n+1} = 2a_n$$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $a_2 = a_1 - 3, a_3 = a_2 - 3$ 일 때

$$a_3 = (a_1 - 3) - 3 = a_1 - 6$$

조건 (가)에서 $a_1 = a_3$ 이므로 위 식에 대입하면

$$0 = -6$$

이는 모순이므로 이 경우 만족하는 수열은 존재하지 않는다.

(ii) $a_2 = a_1 - 3, a_3 = 2a_2$ 일 때

$$a_3 = 2(a_1 - 3) = 2a_1 - 6$$

조건 (가)에서 $a_1 = a_3$ 이므로 위 식에 대입하면

$$a_3 = 2a_3 - 6, \quad a_3 = 6$$

$$a_4 = a_3 - 3 \text{ 일 때 } a_4 = 3$$

$$a_4 = 2a_3 \text{ 일 때 } a_4 = 12$$

(iii) $a_2 = 2a_1$, $a_3 = a_2 - 3$ 일 때

$$a_3 = a_2 - 3 = 2a_1 - 3$$

조건 (가)에서 $a_1 = a_3$ 이므로 위 식에 대입하면

$$a_3 = 2a_3 - 3, \quad a_3 = 3$$

$$a_4 = a_3 - 3 \text{일 때} \quad a_4 = 0$$

$$a_4 = 2a_3 \text{일 때} \quad a_4 = 6$$

(iv) $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 2a_2$ 일 때

$$a_3 = 2a_2 = 4a_1$$

조건 (가)에서 $a_1 = a_3$ 이므로 위 식에 대입하면

$$a_3 = 4a_3, \quad a_3 = 0$$

$$a_4 = a_3 - 3 \text{일 때} \quad a_4 = -3$$

$$a_4 = 2a_3 \text{일 때} \quad a_4 = 0$$

이상에서 a_4 의 최댓값은 12이다.

110) [정답] ③

[해설]

조건 (가)에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 a_n &= (a_1 + a_5) + (a_2 + a_6) + (a_3 + a_7) + (a_4 + a_8) \\ &= 15 \times 4 = 60 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^4 a_n = 6 \text{이므로} \quad \sum_{n=5}^8 a_n = 54$$

조건 (나)에 의하여

$$a_6 = a_5 + 5$$

$$a_7 = a_6 + 6 = a_5 + 11$$

$$a_8 = a_7 + 7 = a_5 + 18$$

$$\text{따라서} \quad \sum_{n=5}^8 a_n = 4a_5 + 34 = 54 \text{에서} \quad a_5 = 5$$

111) [정답] ③

[해설]

$a_4 = 2$ 이고 $n \leq 3$ 일 때

$$a_4 = a_3 - 2k, \quad a_3 = 2 + 2k$$

$$a_3 = a_2 - 2k, \quad a_2 = 2 + 4k$$

$$a_2 = a_1 - 2k, \quad a_1 = 2 + 6k$$

$n \geq 4$ 일 때

$$a_5 = ka_4 + 2 = 2k + 2$$

$$a_6 = ka_5 + 2 = 2k^2 + 2k + 2$$

$$a_7 = ka_6 + 2 = 2k^3 + 2k^2 + 2k + 2$$

$$a_1 = a_7 \text{이므로} \quad 2 + 6k = 2k^3 + 2k^2 + 2k + 2$$

$$k^3 + k^2 - 2k = 0, \quad k(k+2)(k-1) = 0$$

$$k = 0 \text{ 또는 } k = -2 \text{ 또는 } k = 1$$

$$k = 0 \text{일 때} \quad |a_1| + |a_2| = |2 + 6k| + |2 + 4k| = 4$$

$$k = -2 \text{일 때} \quad |a_1| + |a_2| = |2 + 6k| + |2 + 4k| = 16$$

$$k = 1 \text{일 때} \quad |a_1| + |a_2| = |2 + 6k| + |2 + 4k| = 14$$

따라서 구하는 최댓값은 $k = -2$ 일 때 16이다.

112) [정답] ⑤

[해설]

(i) a_6 이 3의 배수인 경우

$$a_7 = 40 \text{이므로} \quad \frac{a_6}{3} = a_7$$

$$a_6 = 3a_7 = 3 \times 40 = 120$$

$a_7 = 40$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_8 = a_6 + a_7 = 120 + 40 = 160$$

$a_8 = 160$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 160 = 200$$

(ii) $a_6 = 3k - 2$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7 \text{에서}$$

$$a_5 = a_7 - a_6 = 40 - (3k - 2) = 3(14 - k)$$

a_5 는 자연수이므로 $3(14 - k) > 0$ 에서 $k < 14$

한편, a_5 는 3의 배수이므로

$$a_6 = \frac{a_5}{3} = 14 - k$$

$$\text{즉, } 3k - 2 = 14 - k \text{에서} \quad k = 4$$

따라서 $a_6 = 3 \times 4 - 2 = 10$ 이므로

$$a_8 = a_6 + a_7 = 10 + 40 = 50$$

$a_8 = 50$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 50 = 90$$

(iii) $a_6 = 3k - 1$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7 \text{에서}$$

$$a_5 = a_7 - a_6 = 40 - (3k - 1) = 41 - 3k$$

a_5 는 자연수이므로 $41 - 3k > 0$ 에서

$$k < \frac{41}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, a_5 는 3의 배수가 아니므로

$$a_4 + a_5 = a_6 \text{에서}$$

$$a_4 = a_6 - a_5 = (3k - 1) - (41 - 3k) = 3(2k - 14)$$

a_4 가 자연수이므로 $3(2k - 14) > 0$ 에서

$$k > 7 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서} \quad 7 < k < \frac{41}{3}$$

한편, a_4 는 3의 배수이므로

$$a_5 = \frac{a_4}{3} = 2k - 14$$

$$\text{즉, } 41 - 3k = \frac{3(2k - 14)}{3} \text{에서 } k = 11$$

따라서 $a_6 = 3 \times 11 - 1 = 32$ 이므로

$$a_8 = a_6 + a_7 = 32 + 40 = 72$$

$a_8 = 72$ 가 3의 배수이므로

$$a_9 = \frac{a_8}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

이상에서 a_9 의 최댓값은 $M = 200$ 이고 최솟값은 $m = 24$ 이다.

$$\therefore M + m = 200 + 24 = 224$$

113) [정답] ③

[해설]

$a_5 + a_4$ 가 홀수이면 a_6 이 홀수이므로 $a_6 = 34$ 에 모순이다.

따라서 $a_5 + a_4$ 는 짝수이고 a_4, a_5 는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.

a_4, a_5 가 모두 짝수이면 a_3 도 짝수이고 마찬가지로

a_2, a_1 도 모두 짝수이다. 이는 $a_1 = 1$ 에 모순이므로

a_4, a_5 는 모두 홀수이다.

따라서 a_1, a_4 는 모두 홀수이므로 가능한 a_2, a_3 의 값은 다음과 같다.

(i) a_2, a_3 이 모두 홀수인 경우

$$a_2 = 2l - 1 \quad (l \text{은 자연수}) \text{라 하자.}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = l$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + a_2) = \frac{3}{2}l - \frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_3) = \frac{5}{4}l - \frac{1}{4}$$

$$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{11}{8}l - \frac{3}{8} = 34$$

이므로 $l = 25$ 이다.

$$\text{따라서 } a_2 = 2 \times 25 - 1 = 49$$

(ii) a_2 는 짝수, a_3 은 홀수인 경우

$$a_2 = 2m \quad (m \text{은 자연수}) \text{라 하자.}$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2m + 1$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 4m + 1$$

$$a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_3) = 3m + 1$$

$$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{7}{2}m + 1 = 34$$

이므로 m 은 자연수가 아니다.

(iii) a_2 는 홀수, a_3 은 짝수인 경우

$$a_2 = 2n - 1 \quad (n \text{은 자연수}) \text{라 하자.}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = n$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3n - 1$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 4n - 1$$

$$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{7}{2}n - 1 = 34$$

이므로 $n = 10$ 이다.

$$\text{따라서 } a_2 = 2 \times 10 - 1 = 19$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 a_2 의 값의 합은 $49 + 19 = 68$

114) [정답] ④

[해설]

(i) $4 \leq n \leq 7$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $\log_3 a_n$ 이 자연수가 아닌 경우

$$a_5 = a_4 + 6, \quad a_6 = a_5 + 6 = a_4 + 12,$$

$$a_7 = a_6 + 6 = a_4 + 18 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=4}^7 a_k = 4a_4 + 36 = 40, \quad a_4 = 1$$

순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 은 $(27, 9, 3)$

그러므로 $a_1 = 27$

(ii) $4 \leq n \leq 7$ 인 자연수 n 에 대하여 $\log_3 a_n$ 이 자연수인 n 이 존재하는 경우

$a_n = 3^m$ (m 은 자연수)인 n ($4 \leq n \leq 7$)이 존재한다.

a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m ($m \geq 4$)가 존재하면

$$\sum_{k=4}^7 a_k > 40 \text{이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.}$$

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m ($m \geq 4$)가 존재하지 않는다.

또한 a_4, a_5, a_6, a_7 중 27이 존재하지 않으면 $n = 4, 5, 6,$

$$7 \text{에 대하여 } \sum_{k=4}^7 a_k < 40$$

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이다.

만약 a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이면 $\sum_{k=4}^7 a_k > 40$ 이므로

$$a_4 = 27$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 27 + 9 + 3 + 1 = 40$$

그러므로 $a_4 = 27$ 일 때 조건을 만족시킨다.

$a_1 < 300$ 을 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 은 $(69, 75, 81), (237, 243, 81)$ 이므로

$$a_1 = 69 \text{ 또는 } a_1 = 237$$

따라서 (i), (ii)에 의하여

모든 a_1 의 값의 합은 $27+69+237=333$

115) [정답] ②

[해설]

조건 (나)에서 $a_3 > a_5$ 이므로 a_3 이 4의 배수인 경우와 4의 배수가 아닌 경우로 나누어 생각하자.

(i) a_3 이 4의 배수인 경우

$a_3 = 4k$ (k 는 자연수)라 하면 $a_4 = 2k+6$

k 가 홀수일 때 a_4 는 4의 배수이고

$a_5 = k+11$, $a_4 + a_5 = 3k+17$ 이므로

$50 < 3k+17 < 60$, $a_3 > a_5$ 에서 $k > \frac{11}{3}$

k 는 홀수이므로 $k=13$ 이고 $a_3=52$

k 가 짝수일 때 a_4 는 4의 배수가 아니고

$a_5 = 2k+14$, $a_4 + a_5 = 4k+20$ 이므로

$50 < 4k+20 < 60$, $a_3 > a_5$ 에서 $k > 7$

k 는 짝수이므로 $k=8$ 이고 $a_3=32$

따라서 $a_3=52$ 또는 $a_3=32$

$a_3=52$ 인 경우 $a_2=96$ 이고

$a_1=94$ 또는 $a_1=188$

$a_3=32$ 인 경우 $a_2=56$ 이고

$a_1=54$ 또는 $a_1=108$

(ii) a_3 이 4의 배수가 아닌 경우

$a_3 = 4k-1$ 또는 $a_3 = 4k-3$ (k 는 자연수)일 때

a_3, a_4, a_5 는 모두 홀수이고

$a_5 = a_4 + 8 = a_3 + 14 > a_3$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 못한다.

$a_3 = 4k-2$ (k 는 자연수)일 때 $a_4 = 4k+4$,

$a_5 = 2k+10$ 이고 $a_4 + a_5 = 6k+14$ 이므로

$50 < 6k+14 < 60$, $a_3 > a_5$ 에서 $k > 6$, 이때 $k=7$ 이므로

$a_3=26$

따라서 $a_2=22$ 또는 $a_2=44$ 이다.

$a_2=22$ 인 경우 $a_1=40$

$a_2=44$ 인 경우 $a_1=42$ 또는 $a_1=84$

(i), (ii)에서 $M=188$, $m=40$ 이고 $M+m=228$

116) [정답] ④

[해설]

a_n 이 자연수라 하자. 자연수 k 에 대하여

$a_n = 3k-2$ 이면

$$a_{n+1} = \frac{(3k-2)^2 + 5}{3} = \frac{9k^2 - 12k + 9}{3} = 3k^2 - 4k + 3,$$

$a_n = 3k-1$ 이면

$$a_{n+1} = \frac{(3k-1)^2 + 5}{3} = \frac{9k^2 - 6k + 6}{3} = 3k^2 - 2k + 2,$$

$$a_n = 3k \text{ 이면 } a_{n+1} = \frac{3k}{3} = k$$

이므로 a_n 이 자연수이면 a_{n+1} 도 자연수이다.

a_1 이 자연수이므로 모든 자연수 n 에 대하여 a_n 은 자연수이다.

..... ㉠

a_4 가 3의 배수이면 $a_5 = \frac{a_4}{3}$ 이므로

$$a_4 + a_5 = 5 \text{ 에서 } a_4 + \frac{a_4}{3} = 5, a_4 = \frac{15}{4} \text{ 가 되어 ㉠을}$$

만족시키지 않는다.

그러므로 a_4 는 3의 배수가 아니다.

$$a_5 = \frac{a_4^2 + 5}{3} \text{ 이므로 } a_4 + a_5 = 5 \text{ 에서}$$

$$a_4 + \frac{a_4^2 + 5}{3} = 5$$

$$a_4^2 + 3a_4 - 10 = (a_4 + 5)(a_4 - 2) = 0$$

㉠에 의하여 $a_4 = 2$

(i) a_3 이 3의 배수인 경우

$$a_4 = \frac{a_3}{3} = 2 \text{ 이므로 } a_3 = 6$$

a_2 의 값을 구하면

㉡ a_2 가 3의 배수인 경우

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = 6 \text{ 이므로 } a_2 = 18$$

㉢ a_2 가 3의 배수가 아닌 경우

$$a_3 = \frac{a_2^2 + 5}{3} = 6 \text{ 이므로 } a_2^2 = 13 \text{ 이 되어 ㉠을}$$

만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2 = 18$

a_1 의 값을 구하면

㉡ a_1 이 3의 배수인 경우

$$a_2 = \frac{a_1}{3} = 18 \text{ 이므로 } a_1 = 54$$

㉢ a_1 이 3의 배수가 아닌 경우

$$a_2 = \frac{a_1^2 + 5}{3} = 18 \text{ 이므로 } a_1^2 = 49$$

㉠에 의하여 $a_1 = 7$

(ii) a_3 이 3의 배수가 아닌 경우

$$a_4 = \frac{a_3^2 + 5}{3} = 2 \text{이므로 } a_3^2 = 1$$

㉠에 의하여 $a_3 = 1$

a_2 의 값을 구하면

㉡ a_2 가 3의 배수인 경우

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = 1 \text{이므로 } a_2 = 3$$

㉢ a_2 가 3의 배수가 아닌 경우

$$a_3 = \frac{a_2^2 + 5}{3} = 1 \text{이므로 } a_2^2 = -2 \text{가 되어 ㉠을}$$

만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2 = 3$

a_1 의 값을 구하면

㉣ a_1 이 3의 배수인 경우

$$a_2 = \frac{a_1}{3} = 3 \text{이므로 } a_1 = 9$$

㉤ a_1 이 3의 배수가 아닌 경우

$$a_2 = \frac{a_1^2 + 5}{3} = 3 \text{이므로 } a_1^2 = 4$$

㉠에 의하여 $a_1 = 2$

(i), (ii)에 의하여 모든 a_1 의 값의 합은

$$54 + 7 + 9 + 2 = 72$$

117) [정답] 64

[해설]

조건 (나)에서 $|a_m| = |a_{m+2}|$ 인 자연수 m 의 최솟값이

3이므로 $|a_3| = |a_5|$

(i) a_3, a_5 가 홀수일 때

a_3, a_4, a_5 가 순서대로 홀수, 짝수, 홀수이므로 $a_3 = \alpha$ 라 하면

$$a_3 = \alpha, a_4 = \alpha - 3, a_5 = \frac{\alpha - 3}{2}$$

$$|\alpha| = \left| \frac{\alpha - 3}{2} \right|$$

$$\therefore \alpha = -3 \text{ 또는 } \alpha = 1$$

(ii) a_3, a_4, a_5 가 모두 짝수일 때

a_3, a_4, a_5 가 순서대로 짝수, 짝수, 짝수인 경우

$a_3 = \alpha$ 라 하면

$$a_3 = \alpha, a_4 = \frac{\alpha}{2}, a_5 = \frac{\alpha}{4}$$

$$|\alpha| = \left| \frac{\alpha}{4} \right|$$

$$\therefore \alpha = 0$$

(iii) α_3, a_5 가 짝수이고 a_4 가 홀수일 때

$a_3 = \alpha$ 라 하면

$$a_3 = \alpha, a_4 = \frac{\alpha}{2}, a_5 = \frac{\alpha}{2} - 3$$

$$|\alpha| = \left| \frac{\alpha}{2} - 3 \right|$$

$$\therefore \alpha = -6 \text{ 또는 } \alpha = 2$$

이상에서 가능한 a_3 의 값은 $-6, -3, 0, 1, 2$

(i) $a_3 = -6$ 이면 a_2 의 값은 -3 또는 -12 이다.

$a_2 = -3$ 이면 $a_1 = -6$ 이어야 하므로 모순이다.

$a_2 = -12$ 이면 가능한 a_1 의 값은 -24 또는 -9

(ii) $a_3 = -3$ 이면 $a_2 \neq 0$ 이므로 $a_2 = -6$ 이고 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) $a_3 = 2$ 이면 $a_2 = 4$ 또는 $a_2 = 5$ 이다.

$a_2 = 4$ 일 때 가능한 a_1 의 값은 7 또는 8

$a_2 = 5$ 일 때 가능한 a_1 의 값은 10

(iv) $a_3 = 1$ 이면 $a_4 = -2$ 이고 조건 (나)에 의해서

$a_2 = 2$ 이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(v) $a_3 = 0$ 일 때

조건 (나)에 의해서 $a_2 \neq 0$ 이므로 $a_2 = 3$

$a_2 = 3$ 에서 $a_1 = 6$

이상에서 모든 $|a_1|$ 의 값은

$$6, 7, 8, 9, 10, 24$$

따라서 $|a_1|$ 의 값의 합은

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 24 = 64$$

118) [정답] 381

[해설]

수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 추론한다.

$$a_6 = 2 \text{이므로 } a_6 = \frac{a_5}{5} \text{이고 } a_5 = 10$$

(i) $a_4 \geq 3$ 인 경우

$$a_5 = \frac{a_4}{4} \text{이므로 } a_4 = 4a_5 = 40$$

$$a_4 = \frac{a_3}{3} \text{이므로 } a_3 = 3a_4 = 120$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} \text{이므로 } a_2 = 2a_3 = 240$$

$$a_2 = \frac{a_1}{1} \text{이므로 } a_1 = a_2 = 240$$

(ii) $a_4 < 3$ 인 경우

$$a_4 \neq 10 \text{이므로 } a_3 \geq 3$$

$$a_4 = \frac{a_3}{3}, a_3 = 3a_4 < 9$$

그러므로 $3 \leq a_3 < 9$

$$a_3 \neq 10 \text{ 이므로 } a_3 = \frac{a_2}{2}, a_2 = 2a_3 \text{ 에서}$$

$$6 \leq a_2 < 18 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{1} \ a_1 \geq 3 \text{ 이면 } a_2 = \frac{a_1}{1}, a_1 = a_2 \text{ 이고}$$

a_1 이 자연수이므로 $\textcircled{7}$ 에서 $a_1 = 6, 7, \dots, 17$

$$\textcircled{2} \ a_1 < 3 \text{ 이면 } a_2 = 10 \text{ 이므로 } \textcircled{7} \text{ 을 만족시킨다.}$$

a_1 이 자연수이므로 $a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 2$

(i), (ii)에서 a_1 의 값은

1, 2, 6, 7, 8, $\dots$, 16, 17, 240

따라서 구하는 모든 a_1 의 값의 합은

$$1 + 2 + \sum_{n=6}^{17} n + 240 = 381$$

119) [정답] ③

[해설]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_6 + a_7 = 3$ 이다.

자연수 k 에 대하여 $a_{k+1} = 1$ 이면 $2^{a_k} = 1$ 인 홀수 a_k 는 존재하지 않는다. $a_{k+1} = 1$ 일 때 a_k 의 값이 짝수이면

$$\frac{a_k}{2} = 1, \ a_k = 2$$

따라서 자연수 k 에 대하여 $a_{k+1} = 1$ 이면 $a_k = 2$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 자연수이므로

$$a_6 = 1, a_7 = 2 \text{ 또는 } a_6 = 2, a_7 = 1$$

(i) $a_6 = 1, a_7 = 2$ 일 때

$$a_5 = 2$$

(a) a_4 가 홀수일 때

$$2^{a_4} = 2 \text{ 에서 } a_4 = 1, a_3 = 2$$

(a-1) a_2 가 홀수일 때

$$2^{a_2} = 2 \text{ 에서 } a_2 = 1$$

$$\therefore a_1 = 2$$

(a-2) a_2 가 짝수일 때

$$\frac{a_2}{2} = 2 \text{ 에서 } a_2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$2^{a_1} = 4$ 인 홀수 a_1 은 존재하지 않는다.

$$a_1 \text{ 이 짝수이면 } \frac{a_1}{2} = 4 \therefore a_1 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

(b) a_4 가 짝수일 때

$$\frac{a_4}{2} = 2 \text{ 에서 } a_4 = 4$$

$$\frac{4}{2} = 2 \text{ 에서 } a_4 = 4$$

$\textcircled{7}$ 에서 $a_2 = 4$ 일 때 $a_1 = 8$ 이므로 같은 방법으로 하면 a_3 의 값은 $a_3 = 8$

(b-1) a_2 가 홀수일 때

$$2^{a_2} = 8 \text{ 에서 } a_2 = 3$$

$2^{a_1} = 3$ 인 홀수 a_1 은 존재하지 않는다.

$$a_1 \text{ 이 짝수이면 } \frac{a_1}{2} = 3 \therefore a_1 = 6$$

(b-2) a_2 가 짝수일 때

$$\frac{a_2}{2} = 8 \text{ 에서 } a_2 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$2^{a_1} = 16$ 인 홀수 a_1 은 존재하지 않는다.

$$a_1 \text{ 이 짝수이면 } \frac{a_1}{2} = 16 \therefore a_1 = 32$$

(ii) $a_6 = 2, a_7 = 1$ 일 때

$\textcircled{7}$ 에서 $a_3 = 2$ 일 때 $a_2 = 1$ 또는 $a_2 = 4$ 이므로 같은 방법으로 하면 a_5 의 값은

$$a_5 = 1 \text{ 또는 } a_5 = 4$$

(a) $a_5 = 1$ 일 때

$$a_4 = 2$$

$\textcircled{7}$ 에서 $a_3 = 2$ 일 때 $a_2 = 1$ 또는 $a_2 = 4$ 이므로 같은 방법으로 하면 a_3 의 값은

$$a_3 = 1 \text{ 또는 } a_3 = 4$$

$$a_3 = 1 \text{ 이면 } a_2 = 2$$

$$\textcircled{7} \text{ 에 의하여 } a_3 = 4 \text{ 이면 } a_2 = 8$$

(a-1) $a_2 = 2$ 일 때

$$\textcircled{7} \text{ 에 의하여 } a_1 = 1 \text{ 또는 } a_1 = 4$$

(a-2) $a_2 = 8$ 일 때

$$\textcircled{9} \text{ 에서 } a_3 = 8 \text{ 일 때 } a_2 = 3 \text{ 또는}$$

$a_2 = 16$ 이므로 같은 방법으로 하면

$$a_1 = 3 \text{ 또는 } a_1 = 16$$

(b) $a_5 = 4$ 일 때

$$\textcircled{7} \text{ 에 의하여 } a_4 = 8$$

$$a_3 \text{ 이 홀수이면 } 2^{a_3} = 8 \text{ 에서 } a_3 = 3$$

$$a_3 \text{ 이 짝수이면 } \frac{a_3}{2} = 8 \text{ 에서 } a_3 = 16$$

$2^{a_2} = 3$ 또는 $2^{a_2} = 16$ 인 홀수 a_2 는 존재하지 않는다.

$$a_3 = 3 \text{ 에서 } a_2 \text{ 의 값이 짝수이면 } \frac{a_2}{2} = 3 \text{ 에서}$$

$$a_2 = 6$$

$a_3 = 16$ 에서 a_2 의 값이 짝수이면 $\frac{a_2}{2} = 16$ 에서

$$a_2 = 32$$

(b-1) $a_2 = 6$ 일 때

$2^{a_1} = 6$ 인 홀수 a_1 은 존재하지 않는다.

$$a_1 \text{이 짝수이면 } \frac{a_1}{2} = 6 \therefore a_1 = 12$$

(b-2) $a_2 = 32$ 일 때

$$a_1 \text{이 홀수이면 } 2^{a_1} = 32 \therefore a_1 = 5$$

$$a_1 \text{이 짝수이면 } \frac{a_1}{2} = 32 \therefore a_1 = 64$$

(i), (ii)에 의하여 a_1 의 값은

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 16, 32, 64

이다. 따라서 모든 a_1 의 값의 합은 153이다.

120) [정답] ②

[해설]

주어진 조건을 a_n 에 대해서 정리하면

$$a_n = \begin{cases} 1 & (a_{n+1} = 0) \\ 0 \text{ 또는 } 2 & (a_{n+1} = 1) \\ 2a_{n+1} \text{ 또는 } 1 + \sqrt{a_{n+1}} & (a_{n+1} = (2k)^2) \\ 2a_{n+1} & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

(단, k 는 자연수) ㉠

$a_7 = 1$ 에 대하여 ㉠에 의해 a_4, a_3, a_2, a_1 의 값을 차례대로 구해보면 다음의 표와 같다.

a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
1	0	1	0	1	0	1
					2	4
			2	4	3	6
	2	4	3	6	8	16
					12	24
			8	16	5	10
					32	64

따라서 모든 a_1 의 값의 합은

$$1 + 4 + 6 + 16 + 24 + 10 + 64 = 125$$

121) [정답] ④

[해설]

주어진 조건을 주어진 조건을 a_n 에 대하여 정리하면

$$a_n = \begin{cases} na_{n+1} \text{ 또는 } \frac{a_{n+1}-1}{3} \\ a_{n+1} \\ eq \quad (a_{n+1} \neq 3k+1 \text{ 또는 } n \text{이 } k \text{의 약수가 아닐 때}) \end{cases}$$

(단, k 는 자연수) ㉠

$a_6 = 2$ 에 대하여 ㉠에 의해 a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 의 값을

차례대로 구해보면 다음의 표와 같다.

n 이 k 의 약수인 것의 여부는 배제하고 표를 작성한 후에 $a_{n+1} = 3k+1$ 일 때 n 이 $k(=a_n)$ 의 약수가 되는 경우를 제외하도록 하겠다.

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
2	10	40	120	240	240
			13	26	26
		3	9	4	
				18	18

$a_2 = 4$ 인 경우는 2가 4의 약수이므로 $a_3 \neq 13$ 이다.

$\therefore$ 모든 a_1 의 값의 합은 $240 + 26 + 18 = 284$

122) [정답] 76

[해설]

a_n, a_{n+1} 이 모두 홀수라 가정하면

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 에서 a_{n+2} 는 짝수이므로

연속하는 세 항 중 적어도 하나의 항은 짝수이다.

.....(★)

(i) a_4 가 짝수인 경우

$$a_6 = 6 = \frac{1}{2}a_4, \quad a_4 = 12$$

a_4 가 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2, a_3, a_5 는 홀수이다.

a_2, a_3 이 홀수이므로 (★)에 의하여

a_1 은 짝수이다.

$$a_3 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 12 + \frac{1}{2}a_1$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = \frac{1}{2}a_1 + a_2 = 12$$

$$a_2 = 12 - \frac{1}{2}a_1$$

a_2 가 홀수이므로

$\frac{1}{2}a_1$ 은 11 이하의 홀수이다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	11	1	12	13	6
6	9	3	12	15	6
10	7	5	12	17	6
14	5	7	12	19	6
18	3	9	12	21	6
22	1	11	12	23	6

주어진 조건을 만족시키는 모든 a_1 의 값은

2, 6, 10, 14, 18, 22이다.

(ii) a_4 가 홀수인 경우

$$a_6 = 6 = a_5 + a_4 \text{에서}$$

a_4, a_5 가 홀수이므로 (★)에 의하여

a_3 은 짝수이다.

$$a_5 = \frac{1}{2}a_3 \text{에서 } a_4 = 6 - \frac{1}{2}a_3$$

a_3 이 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2 는 홀수이다.

$$a_4 = a_3 + a_2 \text{에서}$$

$$6 - \frac{1}{2}a_3 = a_3 + a_2 \text{이므로 } a_3 = 4 - \frac{2}{3}a_2$$

a_3 이 자연수이므로 $a_2 = 3, a_3 = 2$

a_1 이 홀수이면 $a_3 = a_2 + a_1$

$2 = 3 + a_1$ 이므로 a_1 은 자연수가 아니다.

그러므로 a_1 은 짝수이고

$$a_3 = \frac{1}{2}a_1, a_1 = 4$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
4	3	2	5	1	6

따라서 (i), (ii)에 의하여

모든 a_1 의 값의 합은

$$(2+6+10+14+18+22)+4=76$$

123) [정답] ④

[해설]

조건 (가)에서 자연수 n 에 대하여

$$a_n < 1 \text{이면 } a_{n+1} = 2^{n-2} > 0 \text{이고}$$

$$a_n \geq 1 \text{이면 } a_{n+1} = \log_2 a_n \geq 0 \text{이므로}$$

2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 0$ 이다.

조건 (가), (나)에서

a_5, a_6 의 값을 구하면

(i) $0 \leq a_5 < 1$ 일 때

$$a_6 = 2^{5-2} \text{에서 } a_5 + a_6 \geq 8 \text{이므로}$$

$a_5 + a_6 = 1$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_5 \geq 1$ 일 때

$$a_6 = \log_2 a_5 \geq 0 \text{에서 } a_5 + a_6 \geq 1$$

$a_5 + a_6 = 1$ 을 만족시키려면

$$a_5 = 1, a_6 = 0 \text{ 그러므로}$$

$$a_5 = 1, a_6 = 0$$

a_4 의 값을 구하면

(i) $0 \leq a_4 < 1$ 일 때 $a_5 = 2^{4-2} = 4$ 이므로

$a_5 = 1$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4 \geq 1$ 일 때 $a_5 = \log_2 a_4 = 1$ 이므로

$$a_4 = 2 \text{ 그러므로 } a_4 = 2$$

a_1, a_2, a_3 의 값을 구하면

(i) $0 \leq a_3 < 1$ 일 때

$$a_4 = 2^{3-2} = 2 \text{이므로 } 0 \leq a_3 < 1$$

(a) $0 \leq a_2 < 1$ 일 때 $a_3 = 2^{2-2} = 1$ 이므로

$0 \leq a_3 < 1$ 을 만족시키지 않는다.

(b) $a_2 \geq 1$ 일 때 $a_3 = \log_2 a_2$ 에서

$$1 \leq a_2 < 2a_1 < 1 \text{이면 } a_2 = 2^{1-2} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$1 \leq a_2 < 2$ 를 만족시키지 않는다.

$$a_1 \geq 1 \text{이면 } a_2 = \log_2 a_1 \text{에서 } 2 \leq a_1 < 4$$

(ii) $a_3 \geq 1$ 일 때

$$a_4 = \log_2 a_3 \text{에서 } a_3 = 2^2 = 4$$

(a) $0 \leq a_2 < 1$ 일 때

$$a_3 = 2^{2-2} = 1 \text{이므로 } a_3 = 4 \text{를}$$

만족시키지 않는다.

(b) $a_2 \geq 1$ 일 때

$$a_3 = \log_2 a_2 \text{에서 } a_2 = 2^4 = 16$$

$$a_1 < 1 \text{이면 } a_2 = 2^{1-2} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$a_2 = 16$ 을 만족시키지 않는다.

$$a_1 \geq 1 \text{이면 } a_2 = \log_2 a_1 \text{에서 } a_1 = 2^{16}$$

따라서

a_1 의 값은 $2 \leq a_1 < 4$ 또는 $a_1 = 2^{16}$ 이므로

$$M = 2^{16}, m = 2 \text{이고 } \log_2 \frac{M}{m} = \log_2 2^{15} = 15$$

124) [정답] ③

[해설]

$a_4 \leq 4$ 이면 $a_5 = 10 - a_4 = 5$ 에서 $a_4 = 5$ 이므로 $a_4 \leq 4$ 를

만족시키지 않는다. 그러므로 $a_4 > 4$ 이고 $a_4 = a_5$ 에서

$a_4 = 5$ 이다.

$a_3 > 3$ 일 때, $a_3 = a_4$ 에서 $a_3 = 5$ 이고

$a_3 \leq 3$ 일 때, $a_4 = 7 - a_3 = 5$ 에서 $a_3 = 2$ 이다.

(i) $a_3 = 5$ 인 경우

① $a_2 > 2$ 이면 $a_2 = a_3$ 에서 $a_2 = 5$ 이다.

$a_1 > 1$ 일 때, $a_1 = a_2$ 에서 $a_1 = 5$ 이고

$a_1 \leq 1$ 일 때, $a_2 = 1 - a_1 = 5$ 에서 $a_1 = -4$ 이다.

② $a_2 \leq 2$ 이면 $a_3 = 4 - a_2 = 5$ 에서 $a_2 = -1$ 이다.

$a_1 > 1$ 일 때, $a_1 = a_2 = -1$ 이므로 $a_1 > 1$ 을

만족시키지 않는다.

$a_1 \leq 1$ 일 때, $a_2 = 1 - a_1 = -1$ 에서 $a_1 = 2$ 이므로

$a_1 \leq 1$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3 = 2$ 인 경우

① $a_2 > 2$ 이면 $a_2 = a_3$ 에서 $a_2 = 2$ 이므로 $a_2 > 2$ 를

만족시키지 않는다.

② $a_2 \leq 2$ 이면 $a_3 = 4 - a_2 = 2$ 에서 $a_2 = 2$ 이다.

$a_1 > 1$ 일 때, $a_1 = a_2$ 에서 $a_1 = 2$ 이고

$a_1 \leq 1$ 일 때, $a_2 = 1 - a_1 = 2$ 에서 $a_1 = -1$ 이다.

(i), (ii)에서 $a_1 = 5$ 또는 $a_1 = -4$ 또는 $a_1 = 2$

또는 $a_1 = -1$ 이다. 따라서 구하는 모든 a_1 의 값의 곱은

$$5 \times (-4) \times 2 \times (-1) = 40$$

125) [정답] 231

[해설]

$a_1 = -\alpha$, $a_2 = \alpha$ 라 하면

$$a_3 = \alpha + 1, a_4 = \alpha + 2$$

(i) $a_4 \leq 0$, $a_9 \leq 0$ 인 경우

$$a_4 = \alpha + 2 \quad (\alpha \leq -2) \text{이므로} \quad a_9 = \alpha + 7 \quad (\alpha \leq -7)$$

$$a_{15} = \alpha + 13$$

$$a_{15} = 1 \text{이므로} \quad \alpha + 13 = 1$$

$$\alpha = -12 \text{이므로} \quad a_1 = 12$$

(ii) $a_4 \leq 0$, $a_9 > 0$ 인 경우

$$a_4 = \alpha + 2 \quad (\alpha \leq -2) \text{이므로} \quad a_9 = \alpha + 7$$

$$a_9 > 0 \text{이므로} \quad \alpha > -7$$

$$a_{10} = a_9 - 3a_3 = \alpha + 7 - 3(\alpha + 1) = -2\alpha + 4$$

$$\therefore a_{15} = -2\alpha + 9$$

$$a_{15} = 1 \text{이므로} \quad -2\alpha + 9 = 1$$

$$\therefore \alpha = 4$$

그런데 $\alpha \leq -2$ 이므로 모순이다.

(iii) $a_4 > 0$, $a_9 \leq 0$ 인 경우

$$a_4 = \alpha + 2 \text{이므로} \quad \alpha > -2$$

$$a_5 = a_4 - 2a_2 = \alpha + 2 - 2\alpha = -\alpha + 2$$

$$a_9 = -\alpha + 6 \text{이므로} \quad \alpha \geq 6$$

$$\therefore a_{15} = -\alpha + 12$$

$$a_{15} = 1 \text{이므로} \quad -\alpha + 12 = 1$$

$$\therefore \alpha = 11$$

$$\therefore a_1 = -11$$

(iv) $a_4 > 0$, $a_9 > 0$ 인 경우

$$a_4 = \alpha + 2 \text{에서} \quad \alpha > -2$$

$$a_5 = a_4 - 2a_2 = \alpha + 2 - 2\alpha = -\alpha + 2$$

$$a_9 = -\alpha + 6 \text{이므로} \quad \alpha < 6$$

$$a_{10} = a_9 - 3a_3 = -\alpha + 6 - 3(\alpha + 1) = -4\alpha + 3$$

$$\therefore a_{15} = -4\alpha + 8$$

$$a_{15} = 1 \text{이므로} \quad -4\alpha + 8 = 1$$

$$\therefore \alpha = \frac{7}{4}$$

$$\therefore a_1 = -\frac{7}{4}$$

이상에서 조건을 만족시키는 a_1 은 12, -11, $-\frac{7}{4}$ 이므로

모든 a_1 의 값의 곱은

$$12 \times (-11) \times \left(-\frac{7}{4}\right) = 231$$

126) [정답] ②

[해설]

$a_1 = 0$ 이므로

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

$a_2 > 0$ 이므로

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$$

$a_3 < 0$ 이므로

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{k+1} = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k(k+1)}$$

이때 $k=1$ 이면 $a_4=0$ 이므로 $n=3m-2$ (m 은 자연수)일 때

$a_n=0$ 이다. 즉, $a_{22}=0$ 이므로 $k=1$ 은 조건을 만족시킨다.

한편 $k>1$ 이면 $a_4>0$ 이므로

$$a_5 = a_4 - \frac{1}{k} = \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

$a_5 < 0$ 이므로

$$a_6 = a_5 + \frac{1}{k+1} = \frac{3}{k+1} - \frac{2}{k} = \frac{k-2}{k(k+1)}$$

이때 $k=2$ 이면 $a_6=0$ 이므로

$n=5m-4$ (m 은 자연수)일 때 $a_n=0$ 이다.

즉, $a_{22} \neq 0$ 이므로 $k=2$ 는 조건을 만족시키지 않는다.

한편 $k>2$ 이면 $a_6>0$ 이므로

$$a_7 = a_6 - \frac{1}{k} = \frac{3}{k+1} - \frac{3}{k}$$

$a_7 < 0$ 이므로

$$a_8 = \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k(k+1)}$$

마찬가지 방법으로 계속하면

$k=3$ 이면 $a_8=0$ 이고 이때 $a_{22}=0$ 이다.

$k=4$ 이면 $a_{10}=0$ 이고 이때 $a_{22} \neq 0$ 이다.

$5 \leq k \leq 9$ 이면 $a_{22} \neq 0$ 이다.

$k=10$ 이면 $a_{22}=0$ 이다.

$k \geq 11$ 이면 $a_{22} \neq 0$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 k 의 값은 1, 3, 10이므로
구하는 모든 k 의 값의 합은

$$1+3+10=14$$

127) [정답] 71

[해설]

조건 (가)에서 $a_1 \times a_2 > 0$ 이므로

$$a_1 > 0, a_2 > 0 \text{ 또는 } a_1 < 0, a_2 < 0$$

$a_1 < 0$ 이면 $a_2 = a_1^2 > 0$ 이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$$a_1 > 0 \text{ 이므로 } a_2 = -2a_1 + 3$$

$$a_2 > 0 \text{ 이므로 } a_3 = -2a_2 + 3 = 4a_1 - 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(i) $a_3 < 0$ 일 때

$$a_4 = a_3^2 > 0 \text{ 이므로}$$

$$a_5 = -2a_3^2 + 3 = a_3 \text{ 에서 } (2a_3 + 3)(a_3 - 1) = 0$$

$$a_3 < 0 \text{ 이므로 } a_3 = -\frac{3}{2}$$

$$\textcircled{7} \text{에 의하여 } a_1 = \frac{3}{8}$$

(ii) $a_3 = 0$ 일 때

$$a_4 = a_3^2 = 0, a_5 = a_4^2 = 0 \text{ 이므로 } a_3 = a_5 = 0$$

$$\textcircled{7} \text{에 의하여 } a_1 = \frac{3}{4}$$

(iii) $a_3 > 0$ 일 때

$$(a) 0 < a_3 < \frac{3}{2} \text{ 일 때}$$

$$a_4 = -2a_3 + 3 > 0 \text{ 이므로}$$

$$a_5 = -2a_4 + 3 = 4a_3 - 3 = a_3 \text{ 에서 } a_3 = 1$$

$$\textcircled{7} \text{에 의하여 } a_1 = 1$$

$$(b) a_3 \geq \frac{3}{2} \text{ 일 때}$$

$$a_4 = -2a_3 + 3 \leq 0 \text{ 이므로}$$

$$a_5 = a_4^2 = (-2a_3 + 3)^2 = a_3 \text{ 에서}$$

$$(4a_3 - 9)(a_3 - 1) = 0$$

$$a_3 \geq \frac{3}{2} \text{ 이므로 } a_3 = \frac{9}{4}$$

$$\textcircled{7} \text{에 의하여 } a_1 = \frac{21}{16}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 a_1 의 값의 합은

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{21}{16} = \frac{55}{16} \text{ 이므로 } p=16, q=55$$

$$\text{따라서 } p+q=71$$

128) [정답] ①

[해설]

점 A의 x 좌표는 64이고 점 Q_1 의 x 좌표는 x_1 이다.

이때 두 점 A와 P_1 의 y 좌표가 같으므로

$$2^{64} = 16^{x_1} \text{에서}$$

$$2^{64} = 2^{4x_1}$$

$$4x_1 = 64 \text{에서}$$

$$x_1 = 16$$

같은 방법으로 모든 자연수 n 에 대하여

두 점 P_n, Q_n 의 x 좌표는 x_n 으로 서로

같고, 두 점 Q_n, P_{n+1} 의 y 좌표는 같으므로

$$2^{x_n} = 16^{x_{n+1}}$$

즉,

$$2^{x_n} = 2^{4x_{n+1}}$$

이므로

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$$

따라서 수열 $\{x_n\}$ 은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인

등비수열이므로

$$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^4 \times 2^{-2n+2} = 2^{6-2n}$$

한편,

$x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값이 6이므로

$$x_5 \geq \frac{1}{k} \text{이고 } x_6 < \frac{1}{k}$$

이어야 한다.

$$x_5 \geq \frac{1}{k} \text{에서 } 2^{-4} \geq \frac{1}{k},$$

$$\text{즉 } \frac{1}{16} \geq \frac{1}{k} \text{에서 } k \geq 16 \dots \textcircled{7}$$

$$x_6 < \frac{1}{k} \text{에서 } 2^{-6} < \frac{1}{k},$$

$$\text{즉 } \frac{1}{64} < \frac{1}{k} \text{에서 } k < 64 \dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $16 \leq k < 64$ 이므로 자연수 k

의 개수는 $64 - 16 = 48$ 이다.

129) [정답] ①

[해설]

$n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{3S_k}{k+2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3S_k}{k+2} = \frac{3S_n}{n+2} \end{aligned}$$

이므로 $3S_n = (n+2) \times a_n$ ($n \geq 2$)이다.

$S_1 = a_1$ 에서 $3S_1 = 3a_1$ 이므로

$3S_n = (n+2) \times a_n$ ($n \geq 1$)이다.

$$\begin{aligned} 3a_n &= 3(S_n - S_{n-1}) \\ &= (n+2) \times a_n - (n+1) \times a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$(n-1) \times a_n = (n+1) \times a_{n-1}$ 이고 $a_1 \neq 0$ 이므로

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \neq 0$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1} \quad (n \geq 2)$$

따라서

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \cdots \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9} \\ &= 2 \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \cdots \times \frac{10}{8} \times \frac{11}{9} = \boxed{110} \end{aligned}$$

$$f(n) = n+1, \quad g(n) = \frac{n+1}{n-1}, \quad p = 110$$

$$\text{따라서 } \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{111}{\frac{111}{109}} = 109$$

130) [정답] 226

[해설]

조건 (가)에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - 1| = 0$$

이므로 삼차식 $f(x) - 1$ 은 x 를 인수로 갖는다.

이차식 $g(x)$ 에 대하여 $f(x) - 1 = xg(x)$ 라 하자.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|f(x) - 1|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|xg(x)|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x||g(x)|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} |g(x)| = |g(0)| \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|f(x) - 1|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|xg(x)|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x||g(x)|}{x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0-} |g(x)| = -|g(0)| \end{aligned}$$

$|g(0)| = -|g(0)|$ 에서 $g(0) = 0$

이차식 $g(x)$ 도 x 를 인수로 가지므로

$f(x) - 1 = x^2(x+a)$ (a 는 실수)라 하면

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 1$$

$$xf(x) \geq -4x^2 + x \text{에서}$$

$$x(x^3 + ax^2 + 1) \geq -4x^2 + x$$

$$x^4 + ax^3 + 4x^2 \geq 0$$

$$x^2(x^2 + ax + 4) \geq 0$$

$x^2 \geq 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$x^2 + ax + 4 \geq 0$ 이 성립한다.

이차방정식 $x^2 + ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 16 \leq 0$$

$$-4 \leq a \leq 4$$

$f(5) = 25a + 126$ 이므로 구하는 $f(5)$ 의 최댓값은

$a = 4$ 일 때 226이다.

131) [정답] ④

[해설]

$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3) - 1$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x = 3$ 에서 불연속이다.

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$f(k) \neq 0$ 인 임의의 실수 k 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow k} g(x) = \lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} = \frac{f(k+3)\{f(k)+1\}}{f(k)}$$

$\lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x = k$ 에서 연속이다.

$$\therefore f(3) = 0$$

$g(3) = 3$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} = 2$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} [f(x+3)\{f(x)+1\}] = 0$$

$$f(6) = 0 \text{ 또는 } f(3) = -1 \quad \therefore f(6) = 0$$

$f(3) = 0, f(6) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-3)(x-6)(x+a) \quad (a \text{는 상수})$$

라 하자. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} = 2$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x+a+3)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-3)(x-6)(x+a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+a+3)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-6)(x+a)} \end{aligned}$$

(i) $a = -3$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+a+3)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-6)(x+a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2\{(x-3)^2(x-6)+1\}}{(x-6)(x-3)}$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, (분자) $\rightarrow 9$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} \text{의 값이 존재하지 않는다.}$$

(ii) $a \neq -3$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+a+3)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-6)(x+a)}$$

$$= \frac{3(a+6)}{-3(a+3)}$$

$$= -\frac{a+6}{a+3}$$

$$-\frac{a+6}{a+3} = 2 \text{ 이므로 } a = -4$$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = (x-3)(x-6)(x-4)$$

$f(5) \neq 0$ 이므로

$$g(5) = \frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)} = 20$$

132) [정답] 42

[해설]

$f(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 이고, 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} \text{의 값이 존재한다.}$$

(i) $a=1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x)f(x)}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)\{-f(x)\}}{f(x)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$$

에서

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = -\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$$

(ii) $a=2$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)\{-f(x)\}}{f(x)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 2-} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)f(x)}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} g(x)$$

에서

$$-\lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$$

$g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 (i), (ii)에 의해

$$g(1) = g(2) = 0$$

따라서

$$g(x) = (x-1)(x-2)h(x)$$

$$= f(x)h(x)$$

라 놓을 수 있다.

$$\text{모든 실수 } a \text{에 대하여 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} \text{의 값이}$$

존재해야하고

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)h(x)-f(x)|}{f(x)h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| |h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

이므로

(i) $a=1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) |h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-f(x) |h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

에서

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|h(x)-1|}{h(x)} = -\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|h(x)-1|}{h(x)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$h(1)=0$ 이면 $\textcircled{1}$ 의 값이 존재하지 않으므로

$$h(1) \neq 0 \quad \therefore h(1)=1$$

(ii) $a=2$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-f(x) |h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) |h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

에서

$$-\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|h(x)-1|}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|h(x)-1|}{h(x)} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$h(2)=0$ 이면 $\textcircled{2}$ 의 값이 존재하지 않으므로

$$h(2) \neq 0 \quad \therefore h(2)=1$$

(i), (ii)에서 $h(1)=1$, $h(2)=1$ 이고 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차식이므로

$$h(x)=(x-1)(x-2)+1$$

$g(x)=f(x)h(x)$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)(x-2)\{(x-1)(x-2)+1\} \\ &= (x-1)^2(x-2)^2 + (x-1)(x-2) \\ \therefore g(-1) &= 36+6=42 \end{aligned}$$

$$133) xf(x) = \left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x) - x^3 + 2x^2$$

..... ㉠

㉠에 $x=0$ 을 대입하면 $g(0)=0$

㉠에 $x=2$ 를 대입하면 $f(2)=g(2)$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}$ 의 값이 0 이 아닌 실수이고

$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-g(x)\}=f(2)-g(2)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x-1)=g(1)=0$$

$g(0)=g(1)=0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 상수함수이거나 차수가 2 이상이다.

함수 $g(x)$ 가 상수함수이면 $g(x)=0$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$ 의 값이 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $g(x)$ 의 차수는 2 이상이다.

또한 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$ 의 값이 0 이 아닌 실수이므로

함수 $\{f(x)\}^2$ 의 차수는 함수 $g(x)$ 의 차수와 같다.
두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 차수를 각각 n , $2n$ 이라 하자.

(i) $n=1$ 일 때

함수 $g(x)$ 의 차수가 2 이고 $g(0)=g(1)=0$ 이므로

$$g(x)=ax(x-1) \quad (a \neq 0)$$

㉠에서 양변의 x^3 의 계수가 같아야 하므로

$$0 = -\frac{1}{2} \times a - 1, \quad a = -2 \text{ 이고 } g(x) = -2x^2 + 2x$$

또한 ㉠에서

$$\begin{aligned} xf(x) &= \left(-\frac{1}{2}x+3\right) \times (-2x^2+2x) - x^3 + 2x^2 \\ &= -5x^2 + 6x \end{aligned}$$

이므로 $f(x) = -5x+6$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-1)(x-2)}{(2x-3)(x-2)} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-5x+6)^2}{-2x^2+2x} = -\frac{25}{2}$$

$$\text{그러므로 } k = -2 \times \left(-\frac{25}{2}\right) = 25$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

㉠의 좌변과 우변의 차수가 각각

$n+1$, $2n+1$ 이고 $n+1 \neq 2n+1$ 이므로

㉠이 성립하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 k 의 값은 25

134) [정답] ④

[해설]

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α , β ($\alpha < \beta$)라 하면 α , β 는

이차방정식 $x^2 - tx - 1 = tx + t + 1$, 즉 $x^2 - 2tx - 2 - t = 0$ 의 두 실근이므로

$$\alpha = t - \sqrt{t^2 + t + 2}, \quad \beta = t + \sqrt{t^2 + t + 2}$$

$$\beta - \alpha = 2\sqrt{t^2 + t + 2} \text{ 이고}$$

직선 AB의 기울기가 t 이므로

$$\overline{AB} = 2\sqrt{t^2 + t + 2} \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AB}}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{(t^2 + t + 2)(t^2 + 1)}}{t^2} \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\right) \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = 2 \end{aligned}$$

135) [정답] ②

[해설]

$$x^2 = x + t, \quad x^2 - x - t = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4t}}{2}$$

$$A \left(\frac{1 + \sqrt{1+4t}}{2}, \frac{1 + 2t + \sqrt{1+4t}}{2} \right)$$

$$B \left(\frac{1 - \sqrt{1+4t}}{2}, \frac{1 + 2t - \sqrt{1+4t}}{2} \right)$$

점 A, C는 y 축에 대칭이므로

$$C \left(\frac{-1 - \sqrt{1+4t}}{2}, \frac{1 + 2t + \sqrt{1+4t}}{2} \right)$$

$$H \left(\frac{1 - \sqrt{1+4t}}{2}, \frac{1 + 2t + \sqrt{1+4t}}{2t} \right)$$

$$\overline{AH} = \frac{(1 + \sqrt{1+4t}) - (1 - \sqrt{1+4t})}{2} = \sqrt{1+4t}$$

$$\overline{CH} = \frac{(1 - \sqrt{1+4t}) - (-1 - \sqrt{1+4t})}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1+4t} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{1+4t} - 1)(\sqrt{1+4t} + 1)}{t(\sqrt{1+4t} + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 + 4t - 1}{t(\sqrt{1+4t} + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{4}{\sqrt{1+4t} + 1} = 2 \end{aligned}$$

136) [정답] ④

[해설]

직선 l 의 기울기가 1이고 y 절편은 $g(t)$ 이므로

직선 l 의 방정식은 $y = x + g(t)$ 이다.

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면

α, β 는 이차방정식 $x^2 = x + g(t)$

즉, $x^2 - x - g(t) = 0$ 의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -g(t)$ ㉠

한편 $A(\alpha, \alpha + g(t)), B(\beta, \beta + g(t))$ 이므로

$$\overline{AB}^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2(\alpha - \beta)^2$$

이고 ㉠에서 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 + 4g(t)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 = 2 + 8g(t) \text{에서 } 4t^2 = 2 + 8g(t)$$

$$g(t) = \frac{2t^2 - 1}{4}$$

$$\text{따라서 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2 - 1}{4t^2} = \frac{1}{2}$$

137) [정답] ③

[해설]

곡선 $y = x^2$ 위의 점 P의 좌표를 (α, α^2) 로 놓으면, 점

P에서 곡선 $y = x^2$ 에 접하는 접선의 기울기가 직선

$y = 2tx - 1$ 의 기울기와 같아야 하므로 $y' = 2x$ 에서

$$2\alpha = 2t \quad \therefore \alpha = t$$

원점과 점 $P(t, t^2)$ 를 지나는 직선 OP는 $y = tx$

이 직선과 직선 $y = 2tx - 1$ 의 교점 Q의 좌표를 구하면

$$tx = 2tx - 1 \text{에서 } x = \frac{1}{t} \text{이므로 } Q\left(\frac{1}{t}, 1\right)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + (t^2 - 1)^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-} \frac{\overline{PQ}}{1-t} = \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + (t^2 - 1)^2}}{1-t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{(t^2 - 1)^2 \left(\frac{1}{t^2} + 1\right)}}{1-t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{(1-t^2) \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}}{1-t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1-} (1+t) \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

138) [정답] ⑤

[해설]

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x = 0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = g(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = f(a) + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 5$$

$$g(0) = f(0) = 5$$

$$f(a) + b = 5$$

$$a^2 - 4a + b = 0$$

..... ㉠

$f(x) = (x-2)^2 + 1$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값 1을 갖는다.

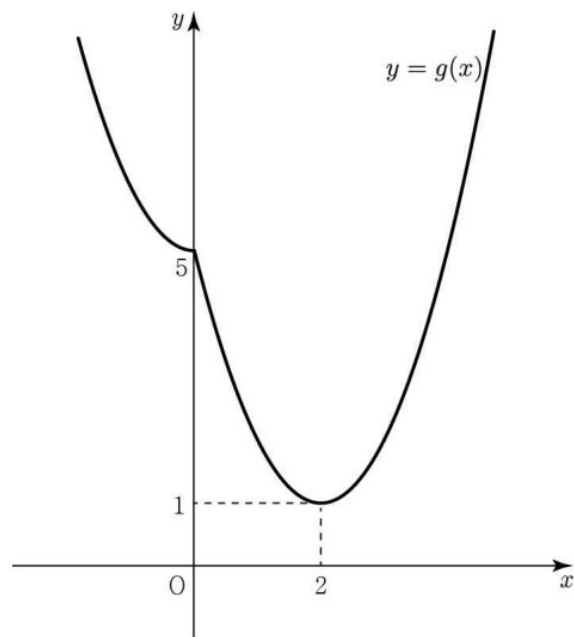
함수 $y = f(x+a) + b$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한

그래프이다. $f(x+a) + b = \{x - (2-a)\}^2 + 1 + b$ 이므로 함수

$y = f(x+a) + b$ 는 $x = 2-a$ 에서 최솟값 $1+b$ 를 갖는다.

(i) $2-a \geq 0$ 인 경우

함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$k = 4$ 또는 $k = 5$ 일 때,

$$\left| \lim_{t \rightarrow k+} h(t) - \lim_{t \rightarrow k-} h(t) \right| \neq 2 \text{이므로 조건을 만족시키지}$$

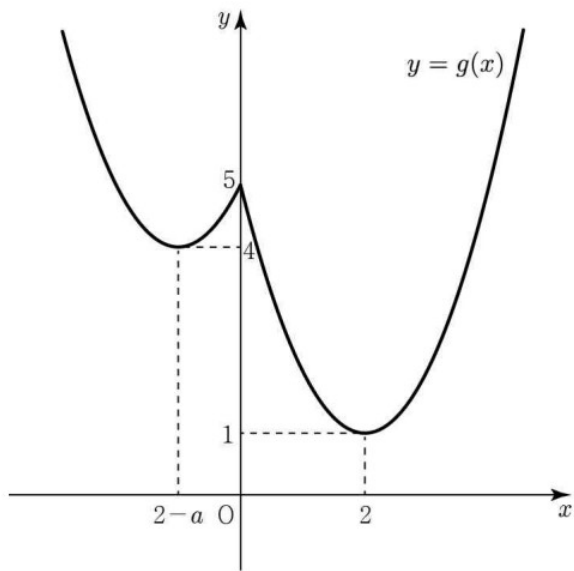
않는다.

(ii) $2-a < 0$ 인 경우

$$\left| \lim_{t \rightarrow k+} h(t) - \lim_{t \rightarrow k-} h(t) \right| = 2 \text{를 만족시키는}$$

k 의 값이 1, 4, 5이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의

개형은 다음과 같다.



$$g(2-a)=1+b=4, \quad b=3$$

㉠에 의하여

$$a^2-4a+3=0, \quad (a-1)(a-3)=0$$

$a > 2$ 이므로 $a=3$

$$\text{따라서 } g(-4)=f(-4+3)+3=10+3=13$$

139) [정답] ⑤

[해설]

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$ 과 $x=3$ 에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1+} |f(x)| = |f(-1)|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} |x+a| = \lim_{x \rightarrow -1+} |x| = |-1|$$

$$|-1+a| = |-1| = |-1|$$

$$|-1+a| = 1$$

$a > 0$ 이므로

$$a=2$$

(ii) 함수 $|f(x)|$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3+} |f(x)| = |f(3)|$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} |x| = \lim_{x \rightarrow 3+} |bx-2| = |3b-2|$$

$$|3| = |3b-2| = |3b-2|$$

$$|3b-2| = 3$$

$b > 0$ 이므로

$$b = \frac{5}{3}$$

$$\text{따라서 } a+b = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

140) [정답] 19

[해설]

$$g(x) = \begin{cases} (x+3)f(x) & (x < 0) \\ (x+a)f(x-b) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = g(0) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이 성립한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+3)f(x) = 3f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x+a)f(x-b) = af(-b)$$

$$g(0) = af(-b)$$

이므로 ㉠에서

$$3f(0) = af(-b) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

한편,

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} - |g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|g(x)|}{(x+3)^2(\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2(\sqrt{0 + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2 \times 2|g(t)|} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

이때 $t \neq -3$ 이고 $t \neq 6$ 인 모든 실수 t 에 대하여 ㉢의 값이 존재하므로

$$f(x) = (x+3)(x+k) \quad (k \text{는 상수})$$

의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2 \times 2|g(t)|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)^2(x+k)|}{(x+3)^2 \times 2|g(t)|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x+k|}{2|g(t)|} \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

이때 $t = -3$ 과 $t = 6$ 에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x) = 0$ 의 모든 실근은 $x = -3$ 과 $x = 6$ 뿐이다.

주어진 식에서 $g(-3) = 0$ 이므로

$$g(6) = 0, \quad \text{즉 } (6+a)f(6-b) = 0$$

이어야 한다.

이때 $a > 0$ 이므로 $f(6-b) = 0$ 에서

$$6-b = -3 \quad \text{또는} \quad 6-b = -k$$

따라서 $b = 9$ 또는 $k-b = -6$

(i) $b = 9$ 인 경우

$x < 0$ 에서

$$g(x) = (x+3)f(x) = (x+3)^2(x+k)$$

이때 $x < 0$ 에서 $g(x) = 0$ 의 해는 -3 뿐이므로
 $-k \geq 0$ 또는 $k = 3$ ㉔

$x \geq 0$ 에서

$$g(x) = (x+a)f(x-9) = (x+a)(x-6)(x-9+k)$$

이때 $x \geq 0$ 에서 $g(x) = 0$ 의 해는 6 뿐이므로

$$9-k < 0 \text{ 또는 } 9-k = 6 \quad \dots\dots ㉕$$

㉔, ㉕에서 $k = 3$

따라서 $f(x) = (x+3)^2$ 이므로 ㉔에서

$$3 \times 3^2 = af(-9), \quad 27 = 36a$$

$$a = \frac{3}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned} g(4) &= (4+a)f(4-b) \\ &= \left(4 + \frac{3}{4}\right)f(-5) \\ &= \frac{19}{4} \times (-2)^2 = 19 \end{aligned}$$

(ii) $k-b = -6$ 인 경우

$x < 0$ 에서

$$g(x) = (x+3)f(x) = (x+3)^2(x+k)$$

이때 $x < 0$ 에서 $g(x) = 0$ 의 해는 -3 뿐이므로

$$-k \geq 0 \text{ 또는 } k = 3$$

$x \geq 0$ 에서

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+a)f(x-b) \\ &= (x+a)(x-b+3)(x-b+k) \\ &= (x+a)(x-b+3)(x-6) \end{aligned}$$

이때 $x \geq 0$ 에서 $g(x) = 0$ 의 해는 6 뿐이고, $b > 3$ 이므로

$$b-3 = 6 \text{에서 } b = 9$$

$$k-b = -6 \text{에서 } k = 3$$

따라서 (i)과 같은 결과이므로 $g(4) = 19$ 이다.

141) [정답] ㉓

[해설]

함수 $f(x)$ 는 $f(1) = 0$, $f(a) = 0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -1$,

$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = -4+2a$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$ 이므로

$x = 2$ 에서 불연속이다.

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$ 는 $x = 1$, $x = a$, $x = 2$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = h(1), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = h(a) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ 즉, } g(1) = 0, \quad g(a) = 0 \text{이다.}$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{f(x)}, \quad \frac{g(2)}{-1} = \frac{g(2)}{-4+2a} \text{이므로}$$

$g(2) = 0$ 이고 $g(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-a)}{x-3} \\ &= \frac{1-a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} h(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-2)}{-x} \\ &= -\frac{(a-1)(a-2)}{a} \end{aligned}$$

$h(1) = h(a)$ 이므로

$$\frac{1-a}{2} = -\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a-2}{a} \quad (\because a > 2)$$

$$a = 2a - 4 \quad \therefore a = 4$$

따라서

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{(x-2)(x-4)}{x-3} & (x \leq 2) \\ -\frac{(x-1)(x-2)}{x} & (x > 2) \end{cases}$$

이므로

$$h(1) + h(3) = -\frac{3}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{6}$$

142) 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 와 $x = b$ 에서만 불연속이고,

함수 $f(x+k)$ 는 $x = a-k$ 와 $x = b-k$ 에서만 불연속이므로

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x = a$, $x = b$, $x = a-k$, $x = b-k$ 에서

연속이면 함수 $f(x)f(x+k)$ 는 실수 전체의 집합에서

연속이다. $a-k < a$, $b-k < b$ 이므로 두 수 a 와 $b-k$ 에

대하여 다음과 같은 경우가 존재한다.

(i) $a \neq b-k$ ($k \neq b-a$)인 경우

① $x = a-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow (a-k)+} f(x)f(x+k) \\ &= \lim_{x \rightarrow (a-k)+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow (a-k)+} f(x+k) \\ &= f(a-k) \times (a-10) \\ &\lim_{x \rightarrow (a-k)-} f(x)f(x+k) \\ &= \lim_{x \rightarrow (a-k)-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow (a-k)-} f(x+k) \\ &= f(a-k) \times (a+2) \end{aligned}$$

$$f(a-k)f(a-k+k) = f(a-k) \times (a-10)$$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x = a-k$ 에서 연속이므로

$$f(a-k) \times (a-10) = f(a-k) \times (a+2)$$

$$f(a-k) = 0$$

② $x=a$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x+k) = (a-10)f(a+k)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x+k) = (a+2)f(a+k)$$

$$f(a)f(a+k) = (a-10)f(a+k)$$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$(a-10)f(a+k) = (a+2)f(a+k)$$

$$f(a+k) = 0$$

③ $x=b-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow (b-k)+} f(x)f(x+k) = f(b-k) \times (-b+8)$$

$$\lim_{x \rightarrow (b-k)-} f(x)f(x+k) = f(b-k) \times (b-10)$$

$$f(b-k)f(b-k+k) = f(b-k) \times (-b+8)$$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=b-k$ 에서 연속이므로

$$f(b-k) \times (-b+8) = f(b-k) \times (b-10)$$

$$f(b-k) = 0$$

④ $x=b$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow b+} f(x)f(x+k) = (-b+8)f(b+k)$$

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)f(x+k) = (b-10)f(b+k)$$

$$f(b)f(b+k) = (-b+8)f(b+k)$$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=b$ 에서 연속이므로

$$(-b+8)f(b+k) = (b-10)f(b+k)$$

$$f(b+k) = 0$$

① ~ ④에 의하여

$$f(a-k) = f(a+k) = f(b-k) = f(b+k) = 0$$

$$a+k = b-k \left(k = \frac{b-a}{2} \right) \text{이면}$$

$$a+k = b-k = \frac{a+b}{2}$$

$$a < \frac{a+b}{2} < b < 8 \text{ 이므로 } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right) - 10 < 0$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a+k) = f(b-k) = 0 \text{ 을 만족시키지 않는다.}$$

$a+k \neq b-k$ 이므로 네 수 $a-k, a+k, b-k, b+k$ 는 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 네 실근이다.

방정식 $f(x)=0$ 의 모든 실근은

$$-4, -2, 8, 10 \text{ 이므로}$$

$$\{a-k, a+k, b-k, b+k\} = \{-4, -2, 8, 10\}$$

$$0 < a+k < b+k \text{ 이므로}$$

$$a+k = 8, b+k = 10$$

$$a-k < b-k \text{ 이므로}$$

$$a-k = -4, b-k = -2$$

두 식 $a-k = -4, a+k = 8$ 을 연립하면

$$a=2, k=6$$

$$b+k = b+6 = 10, b=4$$

$$a < b < k \text{ 이므로}$$

$$f(k) = f(6) = |6-9| - 1 = 2$$

$f(k) > 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=b-k$ ($k=b-a$)인 경우

① $x=a-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

(i)의 ①에 의하여 $f(a-k) = 0$

$$a-k = 2a-b \text{ 이므로 } f(2a-b) = 0$$

② $x=b$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

(i)의 ④에 의하여 $f(b+k) = 0$

$$b+k = 2b-a \text{ 이므로 } f(2b-a) = 0$$

③ $x=a(=b-k)$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x+k) &= \lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x+b-a) \\ &= (a-10)(-b+8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x+k) &= \lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x+b-a) \\ &= (a+2)(b-10) \end{aligned}$$

$$f(a)f(a+k) = f(a)f(b) = (a-10)(-b+8)$$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가

$x=a=b-k$ 에서 연속이므로

$$(a-10)(-b+8) = (a+2)(b-10) \Rightarrow a(b-9) - 4b + 30 = 0$$

$$a = 4 + \frac{6}{b-9}$$

$a < b < 8$ 이므로 이를 만족시키는

두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 7), (2, 6)$ 이다.

$$a=1, b=7 \text{ 이면 } f(2a-b) = f(-5) = 1$$

이므로 $f(2a-b) = 0$ 을 만족시키지 않는다.

$$a=2, b=6 \text{ 이면}$$

$$f(2a-b) = f(-2) = 0,$$

$$f(2b-a) = f(10) = 0 \text{ 을 만족시킨다.}$$

$$k = 6 - 2 = 4$$

$$a < k < b \text{ 이므로}$$

$$f(k) = f(4) = 4 - 10 = -6$$

$f(k) < 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a=2, b=6, k=4$ 이고 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} |x+3| - 1 & (x < 2) \\ x - 10 & (2 \leq x < 6) \\ |x-9| - 1 & (x \geq 6) \end{cases}$$

따라서

$$\begin{aligned} f(a) \times f(b) \times f(k) &= f(2) \times f(6) \times f(4) \\ &= (-8) \times 2 \times (-6) = 96 \end{aligned}$$

143) [정답] ⑤

[해설]

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)g(x-3) = -f(0) \times f(-3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x)g(x-3) = f(0) \times \{-f(-3)\}$$

$$g(0)g(-3) = f(0) \times \{-f(-3)\}$$

함수 $g(x)g(x-3)$ 은 $x=0$ 에서 연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)g(x-3)$ 이 $x=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 값이 한 개이므로 $k=-3$ 또는 $k=3$

(i) 함수 $g(x)g(x-3)$ 이 $x=-3$ 에서 연속이고, $x=3$ 에서 불연속인 경우

$$\lim_{x \rightarrow -3-} g(x)g(x-3) = f(-3) \times f(-6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+} g(x)g(x-3) = -f(-3) \times f(-6)$$

$$g(-3)g(-6) = -f(-3) \times f(-6) \text{이므로}$$

$$f(-3) \times f(-6) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} g(x)g(x-3) = f(3) \times \{-f(0)\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g(x)g(x-3) = f(3) \times f(0)$$

$$g(3)g(0) = f(3) \times f(0) \text{이므로}$$

$$f(3) \times f(0) \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$f(-3) = f(0) \text{이므로}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에 의하여 } f(-6) = 0$$

(ii) 함수 $g(x)g(x-3)$ 이 $x=3$ 에서 연속이고,

$x=-3$ 에서 불연속인 경우

(i)과 같은 방법에 의하여 $f(3) = 0$

(i), (ii)에 의하여 $f(-6) = 0$ 또는 $f(3) = 0$ 이므로

$$f(-6) \times f(3) = 0 \quad (\text{참})$$

ㄷ. $k=-3$ 이므로 $f(3) = 0$

$$f(x) = (x-3)(x^2+ax+b) \text{라 하자. (단, } a, b \text{는 상수)}$$

$$f(-3) = f(0) \text{이므로}$$

$$-6(9-3a+b) = -3b, \quad b = 6a-18$$

$$f(x) = (x-3)(x^2+ax+6a-18)$$

(i) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$ 이 3이 아닌 서로 다른

두 실근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$ 의 세 실근의 합은

$$3+(-a) = -1, \quad a=4$$

방정식 $x^2+4x+6=0$ 은 실근을 갖지 않으므로 모순

(ii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$ 이 중근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근의 합은

$$3+\left(-\frac{a}{2}\right) = -1, \quad a=8$$

방정식 $x^2+8x+30=0$ 은 중근을 갖지 않으므로

모순

(iii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$ 이 3과 -4를 실근으로

갖는 경우

$$3+(-4) = -a, \quad 3 \times (-4) = 6a-18 \text{에서 } a=1$$

$$f(x) = (x-3)(x^2+x-12) = (x-3)^2(x+4)$$

$$\text{그러므로 } g(-1) = -f(-1) = -48 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢

144) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

조건 (가)와 (나)에서

$$f(4) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 16a+4b-24 \text{이고}$$

$$f(0) = f(4) \text{이므로 } -24 = 16a+4b-24 \text{에서}$$

$$b = -4a \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$0 \leq x < 4 \text{에서 } f(x) = a(x-2)^2 - 4a - 24 \text{이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이므로

$1 < x < 2$ 일 때 방정식 $f(x)=0$ 이 실근을 갖지 않으면

$1 < x < 10$ 일 때 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 이하이다.

$1 < x < 2$ 일 때 방정식 $f(x)=0$ 이 실근을 1개 가지면

$1 < x < 10$ 일 때 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 5이다.

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이므로

$$f(1)f(2) = (-3a-24)(-4a-24)$$

$$= 12(a+8)(a+6) < 0$$

$$-8 < a < -6 \text{이고 } a \text{는 정수이므로 } a=-7$$

$$\textcircled{㉠} \text{에 의하여 } b=28$$

$$\text{따라서 } a+b = -7+28 = 21$$

145) [정답] ②

[해설]

$$(x+1)f(x) + (1-x)g(x) = x^3+9x+1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에 } x=0 \text{을 대입하면 } f(0)+g(0)=1$$

$$f(0)=4 \text{이므로 } g(0)=-3 \text{이다.}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변을 미분하면

$$f(x) + (x+1)f'(x) - g(x) + (1-x)g'(x) = 3x^2+9 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에 } x=0 \text{을 대입하면 } f(0)+f'(0)-g(0)+g'(0)=9$$

$$\text{따라서 } f'(0)+g'(0)=9-f(0)+g(0)=9-4+(-3)=2$$

146) [정답] ④

[해설]

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3} = 1 \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-g(x)\} = 0$$

$f(x), g(x)$ 가 모두 다항함수이므로 $f(3)=g(3)$ 이고

$$f(3)=2 \text{ 이므로 } g(3)=2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\{f(x)-f(3)\}-\{g(x)-g(3)\}}{x-3} \\ &= f'(3)-g'(3)=1 \end{aligned}$$

$$f'(3)=1 \text{ 이므로 } g'(3)=0$$

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$g'(x)=2x+a$$

$$g(3)=9+3a+b=2, \quad g'(3)=6+a=0 \text{ 에서}$$

$$a=-6, \quad b=11$$

$$\text{따라서 } g(1)=1-6+11=6$$

147) [정답] ③

[해설]

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=0$

다항함수 $f(x)$ 의 차수를 n 이라 하자.

(i) $n \leq 1$ 일 때, 주어진 등식의 좌변의 차수는

1 이하이고, 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.

(ii) $n=2$ 일 때, 주어진 등식의 좌변의 이차항의 계수는

-1이고, 우변의 이차항의 계수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.

(iii) $n \geq 3$ 일 때, 주어진 등식의 좌변의 n 차항의 계수가

$n-3$ 이고 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하기 위해서는 $n=3$ 이어야 한다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)$ 는 삼차함수이므로

$$f(x)=x^3+ax^2+bx \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} xf'(x)-3f(x) &= x(3x^2+2ax+b)-3(x^3+ax^2+bx) \\ &= -ax^2-2bx \end{aligned}$$

주어진 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$-a=2, \quad -2b=-8 \text{ 에서}$$

$$a=-2, \quad b=4 \text{ 이고 } f(x)=x^3-2x^2+4x$$

$$\text{따라서 } f(1)=1-2+4=3$$

148) [정답] 9

[해설]

$x=-k$ 일 때

$$|g(-k)-g(k)|=0, \quad g(-k)=g(k)$$

$$|x| \neq k \text{ 일 때 } h(x)=\frac{|g(x)-g(k)|}{|x|-k}$$

$0 < x < k$ 또는 $x > k$ 일 때

$$h(x)=\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow k} h(x)$ 가

존재한다.

함수 $g(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow k-} h(x)=\lim_{x \rightarrow k-} \frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

$$=\lim_{x \rightarrow k-} \frac{|g(x)-g(k)|}{-|x-k|}$$

$$=-\lim_{x \rightarrow k-} \left| \frac{g(x)-g(k)}{x-k} \right|$$

$$=-|g'(k)|$$

$$\lim_{x \rightarrow k+} h(x)=\lim_{x \rightarrow k+} \frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

$$=\lim_{x \rightarrow k+} \frac{|g(x)-g(k)|}{|x-k|}$$

$$=\lim_{x \rightarrow k+} \left| \frac{g(x)-g(k)}{x-k} \right|$$

$$=|g'(k)|$$

$$\lim_{x \rightarrow k-} h(x)=\lim_{x \rightarrow k+} h(x) \text{ 이므로}$$

$$|g'(k)|=0, \quad g'(k)=0$$

$x < -k$ 또는 $-k < x < 0$ 일 때

$$h(x)=-\frac{|g(x)-g(-k)|}{x-(-k)}$$

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -k} h(x)$ 가

존재한다.

함수 $g(x)$ 가 $x=-k$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow -k-} h(x)=\lim_{x \rightarrow -k-} \left\{ -\frac{|g(x)-g(-k)|}{x-(-k)} \right\}$$

$$=\lim_{x \rightarrow -k-} \left\{ -\frac{|g(x)-g(-k)|}{-|x-(-k)|} \right\}$$

$$=\lim_{x \rightarrow -k-} \left| \frac{g(x)-g(-k)}{x-(-k)} \right|$$

$$=|g'(-k)|$$

$$\lim_{x \rightarrow -k+} h(x)=\lim_{x \rightarrow -k+} \left\{ -\frac{|g(x)-g(-k)|}{x-(-k)} \right\}$$

$$=\lim_{x \rightarrow -k+} \left\{ -\frac{|g(x)-g(-k)|}{|x-(-k)|} \right\}$$

$$=-\lim_{x \rightarrow -k+} \left| \frac{g(x)-g(-k)}{x-(-k)} \right|$$

$$=-|g'(-k)|$$

$$\lim_{x \rightarrow -k-} h(x)=\lim_{x \rightarrow -k+} h(x) \text{ 이므로}$$

$$|g'(-k)|=0, \quad g'(-k)=0$$

$g(-k)=g(k), g'(-k)=g'(k)=0$ 이므로

$$f(-k-a)=f(k-a), f'(-k-a)=f'(k-a)=0$$

$f(x)=x(x-1)^2(x-2)$ 에서

$$f'(x)=4x^3-12x^2+10x-2=2(x-1)(2x^2-4x+1)$$

$$f'(x)=0 \text{ 에서 } x=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(1)=0 \text{ 이고 } f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$$-k-a=1-\frac{\sqrt{2}}{2}, k-a=1+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because k>0)$$

$$a=-1, k=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로 } a+20k^2=-1+20 \cdot \frac{1}{2}=9$$

149) [정답] ①

[해설]

$$g(x)=\begin{cases} |x^2+ax+b|-x^2 & (x \leq 0) \\ (x^2+ax+b)^2+x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

구간 $(0, \infty)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 미분가능하므로 조건 (가)에 의하여 $b \leq 0$

(i) $b=0$ 인 경우

$$f(x)=x^2+ax=x(x+a)$$

$$g(x)=\begin{cases} |x(x+a)|-x^2 & (x \leq 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

① $a>0$ 인 경우

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x \leq -a) \\ -2x^2-ax & (-a < x \leq 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

$x=-a$ 에서의 미분가능성을 조사하면

$$\lim_{x \rightarrow -a-} \frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -a-} \frac{ax-(-a^2)}{x+a}=a$$

$$\lim_{x \rightarrow -a+} \frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -a+} \frac{(-2x^2-ax)-(-a^2)}{x+a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -a+} \frac{-(2x-a)(x+a)}{x+a}=3a$$

$a>0$ 이므로 $a \neq 3a$

함수 $g(x)$ 는 $x=-a$ 에서 미분가능하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a=0$ 인 경우

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^4+x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

$x=0$ 에서의 미분가능성을 조사하면

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^4+x^3-0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $a<0$ 인 경우

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x \leq 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

$x<0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=ax \neq 0$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서

미분가능하므로 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = g(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = |b| = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = b^2$$

$$g(0) = |b| = -b$$

$$\text{이므로 } -b = b^2$$

$b<0$ 이므로 $b=-1$ 이고, 함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 에서만

미분가능하지 않다.

$$g(x)=\begin{cases} |x^2+ax-1|-x^2 & (x \leq 0) \\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

방정식 $x^2+ax-1=0$ 의 서로 다른 두 실근을

α, β ($\alpha < \beta$)라 하면, 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = -1 \text{ 이므로}$$

$$\alpha < 0 < \beta$$

$$g(x)=\begin{cases} ax-1 & (x \leq \alpha) \\ -2x^2-ax+1 & (\alpha < x \leq 0) \\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(-2x^2-ax+1)-1}{x}$$

$$= -a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\{(x^2+ax-1)^2+x^3\}-1}{x}$$

$$= -2a$$

$$\text{에서 } -a = -2a, a=0$$

$$g(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| - x^2 & (x \leq 0) \\ (x^2 - 1)^2 + x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

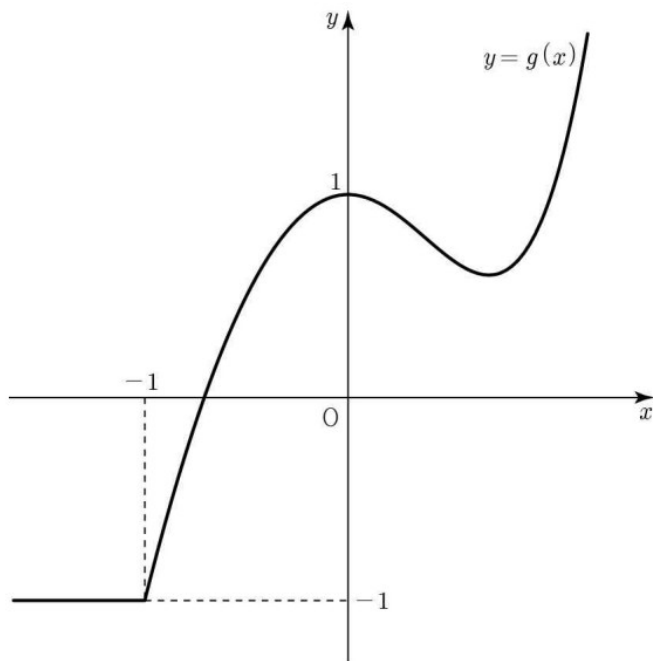
따라서 $g\left(-\frac{1}{2}\right) + g(3) = \frac{1}{2} + 91 = \frac{183}{2}$

[참고]

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & (x \leq -1) \\ -2x^2 + 1 & (-1 < x \leq 0) \\ x^4 + x^3 - 2x^2 + 1 & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



150) [정답] 154

[해설]

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = -f(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = |f(0)| - 8$$

$$-f(0) = |f(0)| - 8$$

$$f(0) = 4$$

..... ㉠

$$g(0) = |f(0)| - 8 = -4$$

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-f(0+h) + f(0)}{h} = -f'(0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(0+h)| + 2h^2 - 8 + 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(0+h)| - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} + 0 = f'(0)$$

$$-f'(0) = f'(0)$$

$$f'(0) = 0$$

..... ㉡

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|f(2+h)| + 2(2+h)^2 - 8 - |f(2)|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2h^2 + 8h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + 8$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(2+h) - g(2) - g(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(2+h)| - 2(2+h)^2 + 8 - |f(2)|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h^2 + 8h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - 8$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + 8$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - 8$$

..... ㉢

즉 함수 $|f(x)|$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

$$f(2) = 0$$

..... ㉣

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} = |f'(2)| \text{ 와}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} = -|f'(2)| \text{ 를 ㉢에 대입하면}$$

$$|f'(2)| = 8$$

..... ㉤

㉠, ㉡, ㉢, ㉤을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4 \text{ 또는 } f(x) = -x^3 + x^2 + 4$$

(i) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$ 인 경우

$$3x^3 - 7x^2 + 4 = (3x+2)(x-1)(x-2) \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

(ii) $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$ 인 경우

$$-x^3 + x^2 + 4 = -(x-2)(x^2 + x + 2) \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

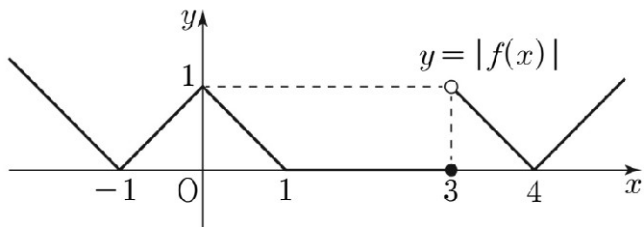
(i), (ii)에서 $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$ 이다.

$$\text{따라서 } f(-5) = 154$$

151) [정답] ④

[해설]

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=k+3$ 에서만 불연속이다.

ㄱ. $k=-3$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} |f(x+3)| = 0,$$

$$g(0) = |f(0+3)| = 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = g(0) \text{ (참)}$$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1, f(0) = -1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \neq f(0)$

$k \neq -3$ 일 때 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + g(x)\} \neq f(0) + g(0)$$

$k=-3$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = g(0)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + g(x)\} \neq f(0) + g(0)$$

그러므로 모든 정수 k 에 대하여

함수 $f(x) + g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하기 위해서는

함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = - \lim_{x \rightarrow 0+} g(x),$$

$$f(0)g(0) = -g(0) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = - \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = -g(0)$$

모든 정수 k 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = g(0)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$$

그러므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이

되도록 하는 정수 k 의 값은 $-4, -2, -1, 1$

(i) $k=-4$ 또는 $k=1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(x+1)(-x)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x-1)x}{x} = -1$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

(ii) $k=-2$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x-0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x-0} = 0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

(iii) $k=-1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(x+1)(-x)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x-0} = 0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 정수 k 의 값의 합은

$$-4 + (-2) + 1 = -5 \text{이다. (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

152) [정답] ⑤

[해설]

최고차항의 계수가 1 이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx \quad (p, q \text{는 상수})$$

라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2px + q$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-1}{x-a} = 3 \text{에서 } x \rightarrow a \text{ 일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이고 극한값이}$$

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)-1\} = 0 \text{에서 } f(a) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 3 \text{에서 } f'(a) = 3$$

즉 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a) = f'(a)(x-a) \text{에서 } y = 3(x-a)+1$$

이 직선의 y 절편이 4 이므로

$$-3a+1=4, \quad a = -1$$

$$\text{즉 } f(-1)=1 \text{에서 } -1+p+q=1, \quad p+q=2$$

$$f'(-1)=3 \text{에서 } 3-2p+q=3, \quad -2p+q=0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } p = -2, \quad q = -4$$

따라서 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ 이므로

$$f(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 = -5$$

153) [정답] 25

[해설]

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 2$$

$x=0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 접선의 기울기가 $f'(0)=2$ 이므로

$$\text{접선의 방정식은 } y = 2x$$

직선 $y=2x$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점의 x 좌표는

$$-x^3 + ax^2 + 2x = 2x, \quad x^2(x-a)=0$$

$$x=0(\text{중근}) \text{ 또는 } x=a$$

따라서 점 A의 좌표는 $(a, 2a)$ 이다.

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$$\angle OAB = 90^\circ$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서 접선의 기울기는

$$-\frac{1}{2} \text{ 이므로 접선의 방정식은}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x-a) + 2a = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}a$$

$$\therefore B(5a, 0)$$

또한, $f'(a) = -\frac{1}{2}$ 에서

$$2-a^2 = -\frac{1}{2}, \quad a^2 = \frac{5}{2}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{5}a, \quad \overline{AB} = 2\sqrt{5}a \text{ 이므로}$$

$$\overline{OA} \times \overline{AB} = 10a^2 = 25$$

154) [정답] 80

[해설]

$$f(0)=2, f(2)=2a$$

$$f'(x)=3x^2-5x+a \text{ 에서 } f'(0)=a, f'(2)=a+2$$

$$\text{직선 } l \text{의 방정식은 } y=f'(0)x+f(0)$$

$$y=ax+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{직선 } m \text{의 방정식은 } y=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$y=(a+2)x-4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 두 직선 l, m 이 만나는 점의 좌표는

$$(3, 3a+2) \text{ 이고 이 점이 } x \text{축 위에 있으므로 } 3a+2=0$$

$$a = -\frac{2}{3} \text{ 이므로 } f(2) = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } 60 \times |f(2)| = 60 \times \left|-\frac{4}{3}\right| = 80$$

155) [정답] ③

[해설]

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=2$ 에서 직선 $y=3$ 과 접한다.

$$f(x)=(x-2)^2(x-a)+3 \quad (a \text{는 상수})$$

$$\text{으로 놓으면 } f'(x)=(x-2)(3x-2a-2)$$

또한 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$ 에서의 접선의 방정식은 $f(-2) = -16a-29, f'(-2)=8a+32$ 이므로

$$y=(8a+32)(x+2)-16a-29$$

이 직선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로 $x=1, y=3$ 을 대입하면

$$3=(8a+32) \times 3-16a-29, \quad a=-8$$

$$\therefore f(x)=(x-2)^2(x+8)+3$$

$$\therefore f(0)=35$$

156) [정답] ②

[해설]

$$|f(k)|+|g(k)|=0 \text{ 이려면 } f(k)=g(k)=0 \text{ 이어야}$$

한다. $f(k)=0$ 을 만족시키는 실수 k 에 대하여

(i) $k=0$ 인 경우

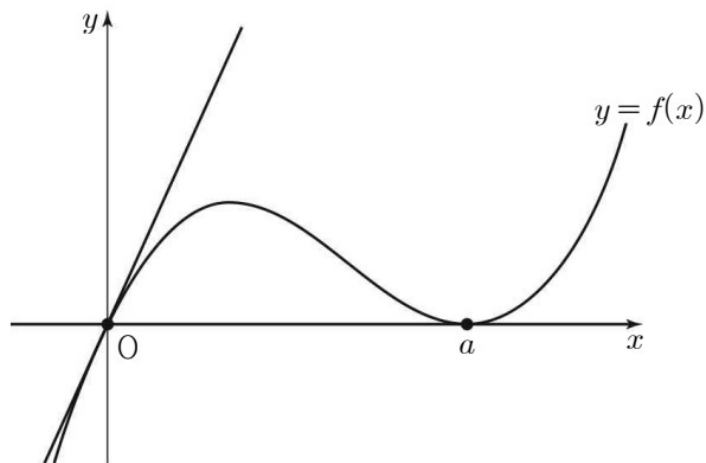
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 y 절편 $g(k)$ 의 값은 0이다.

(ii) $k \neq 0$ 인 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, 0)$ 에서의 접선의 y 절편 $g(k)$ 의 값이 0이려면 $f'(k)=0$ 이어야 한다.

$|f(k)|+|g(k)|=0$ 을 만족시키는 실수 k 의 개수가 2이므로

(i), (ii)에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$$f(x)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x \quad (a \neq 0)$$

$$f'(x)=3x^2-4ax+a^2$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-(t^3-2at^2+a^2t)=(3t^2-4at+a^2)(x-t)$$

이 직선의 y 절편이 $-2t^3+2at^2$ 이므로

$$g(t)=-2t^3+2at^2$$

$$4f(1)+2g(1)=-1 \text{ 에서}$$

$$4(1-2a+a^2)+2(-2+2a)=-1$$

$$4a^2-4a+1=(2a-1)^2=0, \quad a=\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } f(4)=4 \times \left(4-\frac{1}{2}\right)^2=49$$

157) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 연속이

고 열린구간 $(1, 5)$ 에서 미분가능하므로

평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)\cdots\textcircled{1}$$

를 만족하는 상수 c 가 열린구간 $(1, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때, 조건 (나)에 의하여

$$f'(c) \geq 5$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{f(5)-3}{4} \geq 5$$

$$f(5) \geq 23$$

따라서 $f(5)$ 의 최솟값은 23이다.

158) [정답] 380

[해설]

주어진 조건을 만족시키려면 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$ 에

두 점 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 를 지나는 직선의 기울기와

두 점 $(x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ 을 지나는 직선의 기울기의

부호가 다른 세 실수 x_1, x_2, x_3 이 존재해야 하는데, 그러려면

극대 또는 극소가 되는 점이 구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$ 에 존재해야

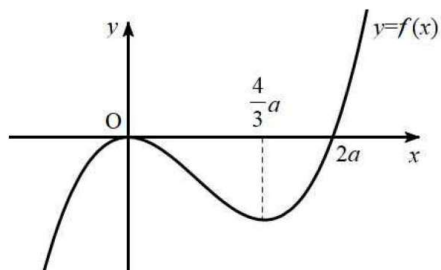
한다.

이때 $f(x)=x^3-2ax^2$ 에서

$$f'(x)=3x^2-4ax$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 a 의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a > 0$ 일 때



$k = -1$ 일 때 $x=0$ 이 구간 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 에 존재하므로

조건을 만족시킨다.

또, $x = \frac{4}{3}a$ 가 구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$ 에 존재하려면

$$k < \frac{4}{3}a < k + \frac{3}{2}$$

이므로

$$\frac{4}{3}a - \frac{3}{2} < k < \frac{4}{3}a$$

이어야 한다.

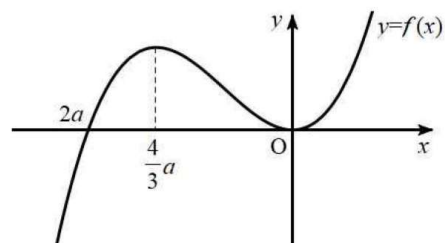
이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 곱이 -12 가 되려면 이 구간에 $k=3, k=4$ 가 존재해야 하므로

$$\frac{4}{3}a - \frac{3}{2} < 3, \frac{4}{3}a > 4$$

$$3 < a < \frac{27}{8}$$

그런데 이 부등식을 만족시키는 정수 a 는 존재하지 않는다.

(ii) $a < 0$ 일 때



$k = -1$ 일 때 $x=0$ 이 구간 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 에 존재하므로

조건을 만족시킨다.

또, $x = \frac{4}{3}a$ 가 구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$ 에 존재하려면

$$k < \frac{4}{3}a < k + \frac{3}{2}$$

이므로

$$\frac{4}{3}a - \frac{3}{2} < k < \frac{4}{3}a$$

이어야 한다.

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 곱이

-12 가 되려면 이 구간에 $k=-4, k=-3$ 이 존재해야 하므로

$$\frac{4}{3}a - \frac{3}{2} < -4, \frac{4}{3}a > -3$$

$$-\frac{9}{4} < a < -\frac{15}{8}$$

$$\text{즉, } a = -2$$

(i), (ii)에서 $a = -2$ 이므로

$$f(x) = x^3 + 4x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

따라서

$$f'(10) = 3 \times 10^2 + 8 \times 10 = 380$$

159) [정답] ③

[해설]

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$ 에서의 접선의 방정식이

$$y=2x+1 \text{ 이므로}$$

$$g(0)=1, g'(0)=2 \text{ 이고 } f(0)=1, f'(0)=2 \text{ 이다.}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = g(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x-1)+2\} = f(1)$$

$$f(1) = f(0) + 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x-1)+2-f(1)}{x-1}$$

㉠에서 $2-f(1) = -f(0)$ 이므로

$$f'(1) = f'(0) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 곡선 $y=f(x)$ 는 직선 $y=2x+1$ 과 두 점 $(0, f(0)), (1, f(1))$ 에서 접한다.

$$f(x) - (2x+1) = x^2(x-1)^2$$

$$f(x) = x^2(x-1)^2 + 2x+1 = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x+1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x+2 = 2$$

$$2x(2x-1)(x-1) = 0$$

$$g(x) = f(x) \quad (x \leq 1) \text{이므로}$$

$x \leq 1$ 에서 $g'(x) = 2$ 인 x 의 값은

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$g(x) = f(x-1)+2 \quad (x > 1)$$

곡선 $y=f(x-1)+2$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 1, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이므로 $x > 1$ 에서 $g'(x) = 2$ 인 x 의 값은

$$x = \frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉢, ㉣에서 $g'(t) = 2$ 인 모든 실수 t 의 값의 합은

$$0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 = 5$$

160) [정답] ②

[해설]

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + p \text{라 하면 } f(x) = |g(x)|$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x) = |g(x)|$ 가 극대가 되는 x 가

2개가 되려면

$$g(0) = p > 0, \quad g(2) = p - 4 < 0 \text{ 즉, } 0 < p < 4$$

$$f(0) = |p| = p, \quad f(2) = |p-4| = 4-p$$

$$f(0) = f(2) \text{이므로 } p = 4-p \text{ 즉, } p = 2$$

161) [정답] ②

[해설]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x)-x)(g(x)-x)}{x^3}$$

의 값이 존재한다. $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)-x) = 0, \text{ 즉 } f(0) = 0$$

$$\text{또는 } \lim_{x \rightarrow 0} (g(x)-x) = 0, \text{ 즉 } g(0) = 0$$

이때 조건 (가)에서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 모두 직선 $y=x$ 위의 서로 다른 두 점 A, B를 지나므로 방정식 $f(x)-x=0, g(x)-x=0$ 의 실근은 서로 같다.

따라서 $f(x)-x, g(x)-x$ 는 모두 x 를 인수로 갖는다.

$$f(x)-x = x(x^2+ax+b), \quad g(x)-x = x(x+c) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x)-x)(g(x)-x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2+ax+b) \times x(x+c)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+ax+b)(x+c)}{x} \end{aligned}$$

이때 $y=g(x)$ 와 직선 $y=x$ 는 서로 다른 두 점에서 만나므로 $c \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+ax+b)(x+c)}{x} \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2+ax+b) = 0 \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore f(x) = x^2(x+a)+x, \quad g(x) = x(x+c)+x$$

조건 (나)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x)+x)(g(x)+x)}{x^3}$ 의 값이 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x)+x)(g(x)+x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{x^2(x+a)+2x\}\{x(x+c)+2x\}}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{x(x+a)+2\}\{x+c+2\}}{x} \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+c+2) = 0 \quad \therefore c = -2$$

$$\therefore g(x) = x(x-2)+x$$

조건 (가)에서 의하여

$$a = -2, \quad f(x) = x^2(x-2) + x$$

$$\therefore f(3) + g(8) = 12 + 56 = 68$$

162) [정답] ①

[해설]

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$h(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(x+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(x+t)$$

$$= \begin{cases} x(x+2) & (x \geq 1) \\ (x+2)f(x) & (-1 \leq x < 1) \\ xf(x+2) & (-3 \leq x < -1) \\ x(x+2) & (x < -3) \end{cases}$$

$$\neg. h(1) = 1 \times 3 = 3 \quad (\text{참})$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x+2)f(x) = 3f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = h(1) = 3$$

이므로 $f(1) \neq 1$ 이면 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.
따라서 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

$$\neg. g(-1) = f(-1) = -2 \text{ 이고, 함수 } g(x) \text{ 가 닫힌구간}$$

$$[-1, 1] \text{ 에서 감소하므로 } f(1) < -2$$

$$-3 \leq x < -1 \text{ 에서 } h(x) = xf(x+2) \text{ 이고,}$$

$$x < 0, f(x+2) < 0 \text{ 이므로 } h(x) > 0$$

$$-1 < x < 1 \text{ 에서 } h(x) = (x+2)f(x) \text{ 이므로}$$

$$h'(x) = f(x) + (x+2)f'(x)$$

$$f'(x) < 0, x+2 > 0, f(x) < 0 \text{ 이므로 } h'(x) < 0$$

$$\text{따라서 } -1 < x < 1 \text{ 에서 함수 } h(x) \text{ 는 감소하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x+2)f(x) = 3f(1) < -6$$

한편, $\neg$ 에서 $h(1) = 3$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

[다른 풀이]

$$\neg. [\text{반례}] f(x) = -x-3 \text{ 이라 하자.}$$

$$x < -3 \text{ 일 때, } h(x) = x(x+2)$$

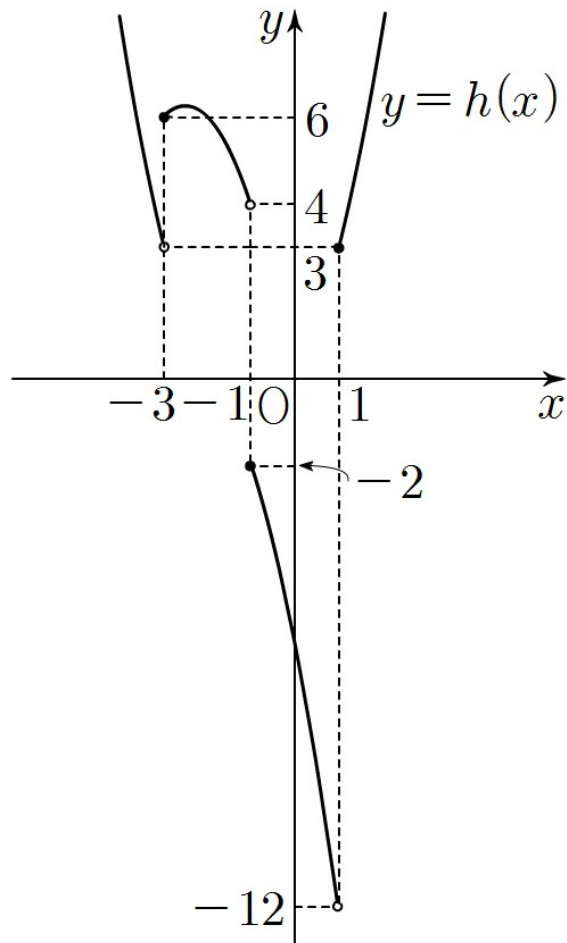
$$-3 \leq x < -1 \text{ 일 때, } h(x) = -x(x+5)$$

$$-1 \leq x < 1 \text{ 일 때, } h(x) = -(x+3)(x+2)$$

$$x \geq 1 \text{ 일 때, } h(x) = x(x+2)$$

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = -12, h(1) = 3 \text{ 이므로 함수 } h(x) \text{ 의}$$

최솟값은 없다. (거짓)



163) [정답] 729

[해설]

$\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$ 의 값이 존재할 때,

$$\lim_{x \rightarrow k-} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|} = \lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|} \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow k-} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow k-k} \left(\frac{g(x)-g(k)}{x-k} \times \frac{x-k}{|x-k|} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow k-} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} \times (-1) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow k+} \left(\frac{g(x)-g(k)}{x-k} \times \frac{x-k}{|x-k|} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} \times 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} = 0$ 이거나

$\lim_{x \rightarrow k-} \frac{g(x)-g(k)}{x-k}$ 와 $\lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x)-g(k)}{x-k}$ 의 절댓값이 같고 부호가

반대이어야 한다.

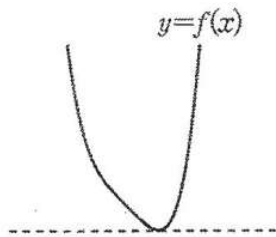
따라서 $g'(k) = 0$ 즉, $f'(k) = 0$ 이거나

$g(k) = 0$ 즉, $f(k) = t$ 이다.

방정식 $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수에 따라 다음과

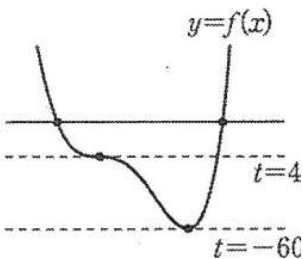
같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우



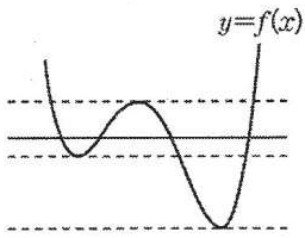
함수 $h(t)$ 가 불연속이 되는 실수 t 가 오직 하나만 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

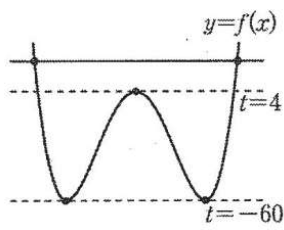


함수 $h(t)$ 가 $t=-60$ 과 $t=4$ 에서 불연속이므로 $f'(\alpha)=0$ 일 때 $f(\alpha)$ 의 값은 -60 과 4 이다. 이때 $\lim_{t \rightarrow 4+} h(t)=4$ 가 되어 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iii) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]과 같이 두 극솟값의 크기가 다르면 함수 $h(t)$ 가 불연속이 되는 서로 다른 실수 t 가 3개 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

[그림 2]와 같이 두 극솟값의 크기가 같은 경우 조건 (나)를 만족시키고, 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4이면

$\lim_{t \rightarrow 4+} h(t)=5$ 이므로 조건 (가)를 만족시킨다. 이때

$$h(4)=5$$

(i), (ii), (iii)에서 사차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 두 극솟값은 모두 -60 , 극댓값은 4이다. $f(2)=4$ 이고 $f'(2)>0$ 이므로 방정식 $f(x)=4$ 의 가장 큰 실근이 2가 된다.

함수 $f(x)$ 의 그래프를 극대인 점이 원점에 오도록 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $p(x)$ 라 하면,

$p(0)=0$ 이고 $p'(0)=0$ 이므로 $p(x)$ 는 x^2 을 인수로 갖는다.

또한 함수 $p(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 양수 a 에 대하여 $p(a)=p(-a)=0$ 이라 하면

$$p(x)=x^2(x-a)(x+a)=x^4-a^2x^2$$

$$p'(x)=4x^3-2a^2x=2x(2x^2-a^2)$$

이므로 $p'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ 또는 } x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$p\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=p\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-64 \text{ 이므로}$$

$$p\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=-\frac{a^4}{4}=-64$$

즉, $a^4=256=4^4$ 이므로 $a=4$ 이다.

$$\text{이때 } p(x)=x^2(x-4)(x+4)$$

방정식 $p(x)=0$ 의 가장 큰 실근이 4이므로 함수 $y=p(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 일치한다. 따라서

$$f(x)=(x+2)^2(x-2)(x+6)+4$$

$$f(4)=724, h(4)=5 \text{ 이므로}$$

$$f(4)+h(4)=724+5=729$$

164) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0-} \left(-\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx\right)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{3}x^3+ax^2-bx\right)=0$$

$$f(0)=0$$

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서

연속이다.

$$f'(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-b & (x<0) \\ x^2+2ax-b & (x>0) \end{cases}$$

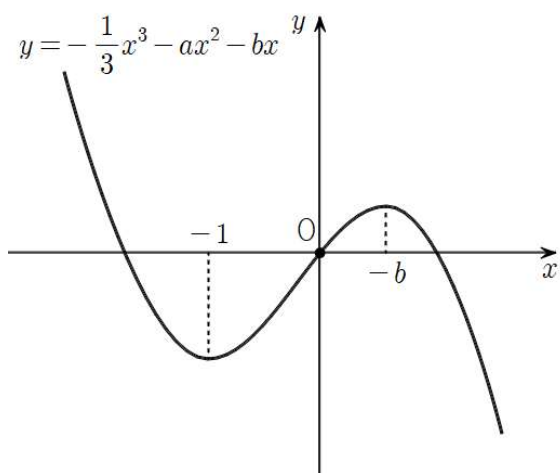
$x<0$ 에서 함수 $f'(x)=-x^2-2ax-b$ 이다. 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$ 에서 감소하고, 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 증가하므로

$$f'(-1)=0$$

방정식 $-x^2-2ax-b=0$ 의 한 실근이 -1 이므로

$$-1+2a-b=0, \quad b=2a-1$$

방정식 $x^2+2ax+b=0$ 에 두 근의 곱이 b 이므로 다른 한 실근은 $-b$ 이다.



함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$ 에서 감소하고, 구간 $[-1, 0]$ 에서 증가하므로

$$-b > -1, \quad -b \geq 0, \quad b \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$b = 2a - 1$ 이므로

$$2a - 1 \leq 0, \quad a \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$x > 0$ 에서 함수 $f'(x) = x^2 + 2ax - b$ 이다. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다. $x > 0$ 에서 $g(x) = x^2 + 2ax - b$ 라 하자.

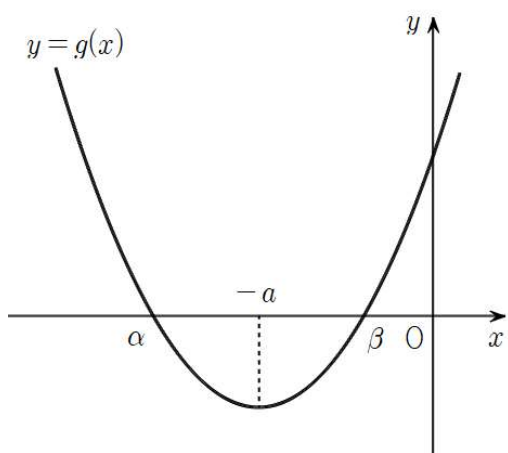
(i) $-a < 0$, 즉 $a > 0$ 일 때

$x > 0$ 에서 $g(x) \geq 0$ 을 만족해야 하므로

$$g(0) \geq 0, \quad -b \geq 0$$

$$b = 2a - 1 \text{ 이므로 } a \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore 0 < a \leq \frac{1}{2}$$



(ii) $-a > 0$, 즉 $a < 0$ 일 때

$$\frac{D}{4} = a^2 + 2a - 1 \leq 0, \quad -1 - \sqrt{2} \leq a \leq -1 + \sqrt{2}$$

$$\therefore -1 - \sqrt{2} \leq a < 0$$

이때, 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2ax - b \geq 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

㉠과 (i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가할 때 실수 a 의 범위는

$$-1 - \sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

$b = 2a - 1$ 이므로 $a + b$, 즉 $3a - 1$ 의 최댓값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$M = \frac{1}{2}$ 이고, 최솟값은 $a = -1 - \sqrt{2}$ 일 때

$m = -4 - 3\sqrt{2}$ 이다.

$$\therefore M - m = \frac{9}{2} + 3\sqrt{2}$$

165) [정답] ⑤

[해설]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\{g(x) - x\}\{g(x) - f(x)\} = 0 \text{ 이므로}$$

$$g(x) = x \text{ 또는 } g(x) = f(x)$$

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 2$ 에서 연속이다.

$$g(2) = 2 \text{ 또는 } g(2) = f(2) \text{에서}$$

$f(2) \neq 2$ 이면 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 가

$x = 2$ 에서 만나지 않으므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2} = 1 \text{ 또는}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \text{가 되어}$$

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(2) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{에서 } f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{이므로}$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$y = x$ 이다.

$h(x) = f(x) - x$ 라 하면

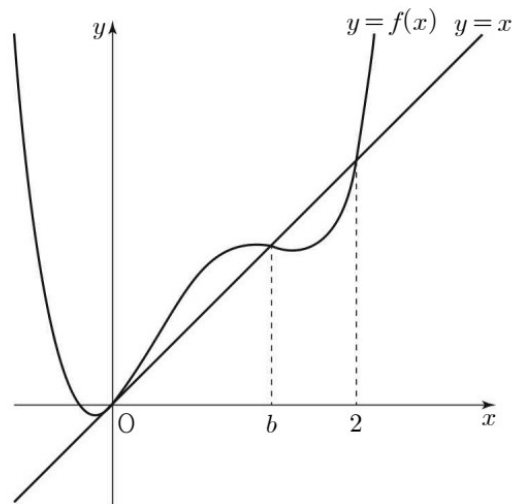
함수 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고

$$h(0) = h'(0) = h(2) = 0 \text{이므로}$$

$$h(x) = x^2(x - 2)(x - b) \quad (b \text{는 상수})$$

$$h(b) = 0 \text{이므로 } f(b) = b$$

(i) $0 \leq b \leq 2$ 일 때

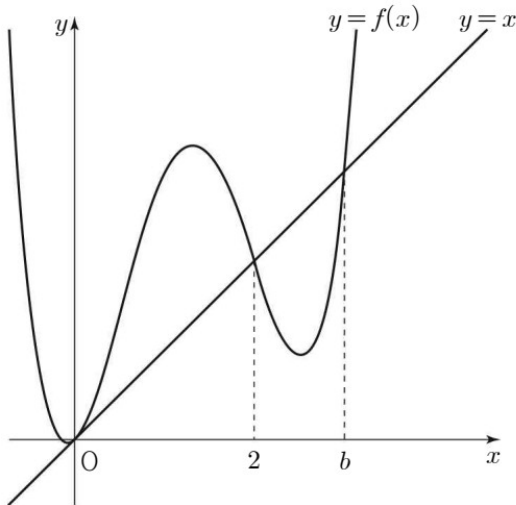


조건 (나)에 의하여 $g(-4) = -g(4)$ 이므로

$$g(4) = 4, \quad g(-4) = -4$$

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=x$ 이다.
 이때 $x \geq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $g(-x) = -g(x)$ 이므로
 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b > 2$ 일 때



(i)과 같은 방법으로 함수 $g(x)$ 를 구하면
 $x \leq 0$ 또는 $x \geq b$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $g(x)=x$ 이다.
 $2 \leq x \leq b$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=x$ 이면
 $x \geq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(-x) = -g(x)$ 이므로
 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $2 \leq x \leq b$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $g(x)=f(x)$ 이다.

이때 $0 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x)=f(x) \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = f'(2) \text{가 되어 조건}$$

(가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $0 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$g(x)=x$ 이다. $x \geq b$ 인 모든 실수 x 에 대하여

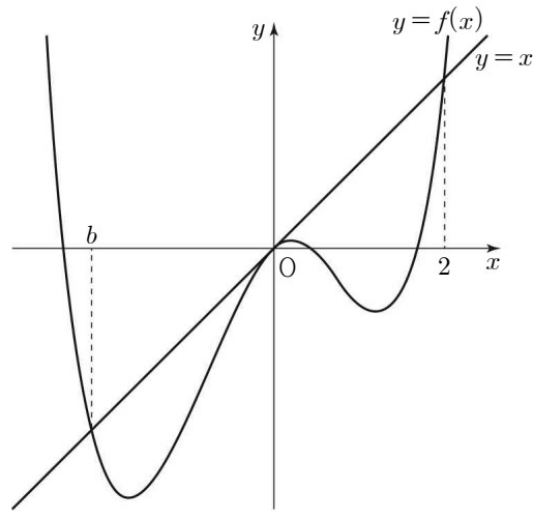
$g(-x) = -g(x)$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $b=4$

$$f(x) = x^2(x-2)(x-4)+x$$

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < 2 \text{ 또는 } x > 4) \\ x^2(x-2)(x-4)+x & (2 < x < 4) \end{cases}$$

$$\text{그러므로 } \frac{g(-2)}{g(3)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

(iii) $b < 0$ 일 때



(ii)와 같은 방법으로 함수 $g(x)$ 를 구하면 $x \leq b$ 또는
 $x \geq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=x$ 이고
 $b < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=f(x)$ 이다.
 $-2 \leq b < 0$ 이면 $x \geq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $g(-x) = -g(x)$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
 그러므로 $b < -2$

$x \geq -b$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$g(-x) = -g(x)$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $b = -4$

$$f(x) = x^2(x-2)(x+4)+x$$

$$g(x) = \begin{cases} x & (x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ x^2(x-2)(x+4)+x & (-4 < x < 2) \end{cases}$$

$$\text{그러므로 } \frac{g(-2)}{g(3)} = \frac{-34}{3} = -\frac{34}{3}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$\text{모든 } \frac{g(-2)}{g(3)} \text{의 값의 합은 } \frac{1}{3} + \left(-\frac{34}{3}\right) = -11$$

166) [정답] 200

[해설]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가

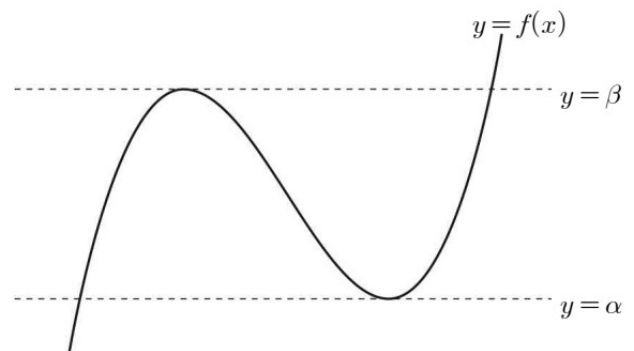
극값을 갖지 않으면 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$g(t)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의

개수이므로 모든 실수 t 에 대하여 $g(t)=1$

그러므로 모든 실수 t 에 대하여 $g(t)+g(t-4)=2$ 가

되어 조건을 만족시키지 않는다.



삼차함수 $f(x)$ 의 극솟값을 α , 극댓값을 β 라 하자. (α, β 는
 $\alpha < \beta$ 인 상수)

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t < \alpha \text{ 또는 } t > \beta) \\ 2 & (t = \alpha \text{ 또는 } t = \beta) \\ 3 & (\alpha < t < \beta) \end{cases}$$

함수 $g(t)$ 는 $t = \alpha$ 와 $t = \beta$ 에서만 불연속이고, 함수 $g(t-4)$ 는 $t = \alpha+4$ 와 $t = \beta+4$ 에서만 불연속이다.

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \alpha+} \{g(t) + g(t-4)\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t) + \lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t-4) = 3 + 1 = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \alpha-} \{g(t) + g(t-4)\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \alpha-} g(t) + \lim_{t \rightarrow \alpha-} g(t-4) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow \alpha+} \{g(t) + g(t-4)\} \neq \lim_{t \rightarrow \alpha-} \{g(t) + g(t-4)\} \text{ 이고,}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow (\beta+4)+} \{g(t) + g(t-4)\} \\ &= \lim_{t \rightarrow (\beta+4)+} g(t) + \lim_{t \rightarrow (\beta+4)+} g(t-4) = 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow (\beta+4)-} \{g(t) + g(t-4)\} \\ &= \lim_{t \rightarrow (\beta+4)-} g(t) + \lim_{t \rightarrow (\beta+4)-} g(t-4) = 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow (\beta+4)+} \{g(t) + g(t-4)\} \neq \lim_{t \rightarrow (\beta+4)-} \{g(t) + g(t-4)\}$$

에서 함수 $g(t) + g(t-4)$ 는

$t = \alpha$, $t = \beta+4$ 에서 불연속이다.

조건에 의하여 함수 $g(t) + g(t-4)$ 는 $t = 0$ 과

$t = a$ 에서만 불연속이고 $a > 0$ 이므로

$$\alpha = 0, \beta + 4 = a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

함수 $g(t) + g(t-4)$ 는 $t = \alpha$, $t = \beta+4$ 에서만

불연속이므로 $t = \alpha+4$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)+} \{g(t) + g(t-4)\} &= \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)-} \{g(t) + g(t-4)\} \\ &= g(\alpha+4) + g(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)+} \{g(t) + g(t-4)\} \\ &= \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)+} g(t) + \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)+} g(t-4) = \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)+} g(t) + 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)-} \{g(t) + g(t-4)\} \\ &= \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)-} g(t) + \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)-} g(t-4) = \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)-} g(t) + 1, \end{aligned}$$

$g(\alpha+4) + g(\alpha) = g(\alpha+4) + 2$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow (\alpha+4)+} g(t) + 3 = \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)-} g(t) + 1 = g(\alpha+4) + 2$$

이때 모든 실수 t 에 대하여

$g(t) = 1$ 또는 $g(t) = 2$ 또는 $g(t) = 3$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow (\alpha+4)+} g(t) = 1, \lim_{t \rightarrow (\alpha+4)-} g(t) = 3, g(\alpha+4) = 2$$

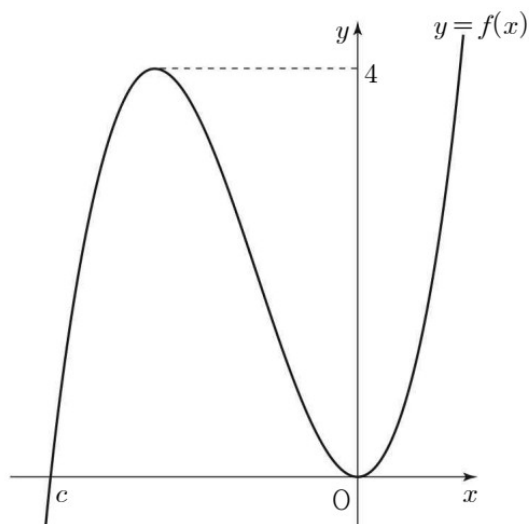
그러므로 $\beta = \alpha + 4$

⑦에 의하여 $\beta = 4$, $a = 8$

그러므로 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 0, 극댓값은 4이다.

함수 $f(x)$ 가 극소가 되는 x 의 값을 b 라 하자.

(i) $b = 0$ 일 때



함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x 좌표를 c ($c < 0$)이라 하자.

$$f(0) = 0 \text{ 이므로 } f(x) = x^2(x - c)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2cx = x(3x - 2c) \text{ 에서 } f'\left(\frac{2}{3}c\right) = 0$$

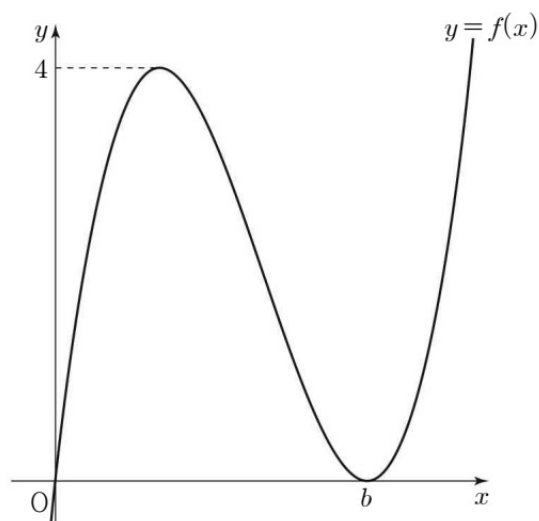
그러므로 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{2}{3}c$ 에서 극댓값 4를 갖는다.

$$f\left(\frac{2}{3}c\right) = -\frac{4}{27}c^3 = 4 \text{ 이므로 } c = -3 \text{ 에서}$$

$$f(x) = x^2(x + 3)$$

$$\text{그러므로 } f(a) = f(8) = 704$$

(ii) $b \neq 0$ 일 때



$$f(0) = 0 \text{ 이므로 } f(x) = x(x - b)^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4bx + b^2 = (3x - b)(x - b) \text{ 에서}$$

$$f'\left(\frac{b}{3}\right) = 0$$

그러므로 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{b}{3}$ 에서 극댓값 4를 갖는다.

$$f\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{4}{27}b^3 = 4 \text{ 이므로 } b = 3 \text{ 에서}$$

$$f(x) = x(x - 3)^2$$

$$\text{그러므로 } f(a) = f(8) = 200$$

(i), (ii)에 의하여 $f(a)$ 의 최솟값은 200

167) [정답] 121

[해설]

$f(0)=0$ 이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c 는 상수)라 하면

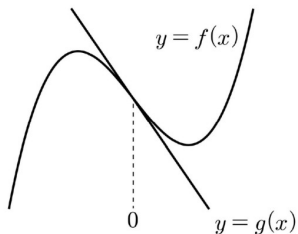
$f'(0)=c, g(x)=cx$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기 c 에 대하여

(i) $c=0$ 이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

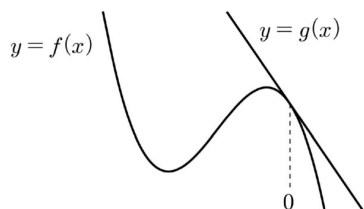
(ii) $c>0$ 이면 $h(12)>0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $c<0, a>0$ 이면 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 다음과 같으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

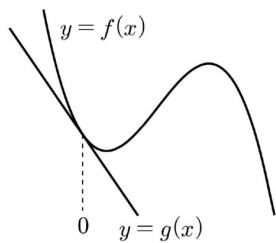


(iv) $c<0, a<0$ 이면

두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 다음과 같은 경우에는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



따라서 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 다음과 같은 경우에만 조건 (가), (나)를 만족시킨다.



조건 (가)에 의하여

$$f(x)+g(x)=ax(x-k)^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

조건 (나)에 의하여

$$-f(x)+g(x)=-ax^2(x-12) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

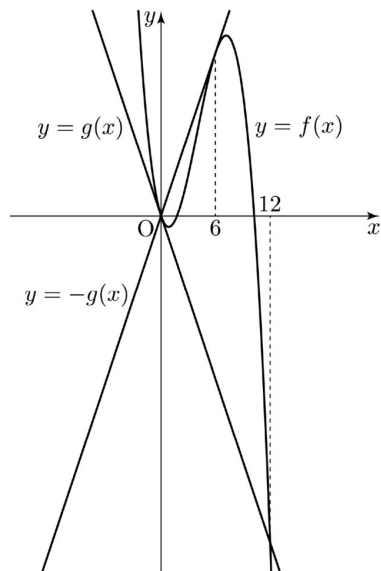
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$$2g(x)=2a(6-k)x^2+ak^2x$$

$$\text{즉 } 6-k=0 \text{ 이므로 } k=6$$

$$g(x)=18ax$$

$$f(x)=ax(x-6)^2-18ax=ax(x^2-12x+18)$$



방정식 $x^2-12x+18=0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면

$$\alpha=6-3\sqrt{2}, \beta=6+3\sqrt{2}$$

함수 $h(x)$ 는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases} ax(x-6)^2 & (x<0 \text{ 또는 } \alpha \leq x < \beta) \\ -ax^2(x-12) & (0 \leq x < \alpha \text{ 또는 } x \geq \beta) \end{cases}$$

$\alpha<3<\beta$ 이므로

$$h(3)=a \times 3 \times (3-6)^2=27a=-\frac{9}{2}$$

$$\therefore a=-\frac{1}{6}, c=-3$$

$$h(x)=\begin{cases} -\frac{1}{6}x(x-6)^2 & (x<0 \text{ 또는 } \alpha \leq x < \beta) \\ \frac{1}{6}x^2(x-12) & (0 \leq x < \alpha \text{ 또는 } x \geq \beta) \end{cases}$$

$\alpha=6-3\sqrt{2}, \beta=6+3\sqrt{2}$ 이므로 $\alpha<6<\beta<11$

$$h(6)=0, h(11)=\frac{1}{6} \times 11^2 \times (-1)=-\frac{121}{6} \text{ 이므로}$$

$$k \times \{h(6)-h(11)\}=6 \times \left\{0-\left(-\frac{121}{6}\right)\right\}=121$$

168) [정답] ①

[해설]

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ -f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$\text{에서 } g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ -f'(x) & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

조건 (가)를 만족시키기 위해서는 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이고,

$$f'(-1)=f'(1)=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이다.

모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ 의 값이 존재하므로

(i) $x=1$ 에서

$$g(1)=-f(1), \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)=\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+k\}$$

이므로 $-f(1)=f(1)+k$, $k=-2f(1)$ ㉞

(ii) $x=-1$ 에서

$$g(-1)=-f(-1), \lim_{x \rightarrow -1+} g(x)=\lim_{x \rightarrow -1+} \{-f(x)\}$$

이므로 이는 항상 성립한다.

이때 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a \neq 0)$ 라 놓으면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f'(0)=6 \text{ 이므로 } f'(0)=c=6$$

㉞에서 방정식 $f'(x)=3ax^2+2bx+6=0$ 의 두 근이 -1 ,

1 이므로 근과 계수의 관계에서

$$-\frac{2b}{3a}=0, \frac{6}{3a}=-1$$

따라서 $a=-2, b=0$ 이므로

$$f(x)=-2x^3+6x+d$$

조건 (나)를 만족하는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같이

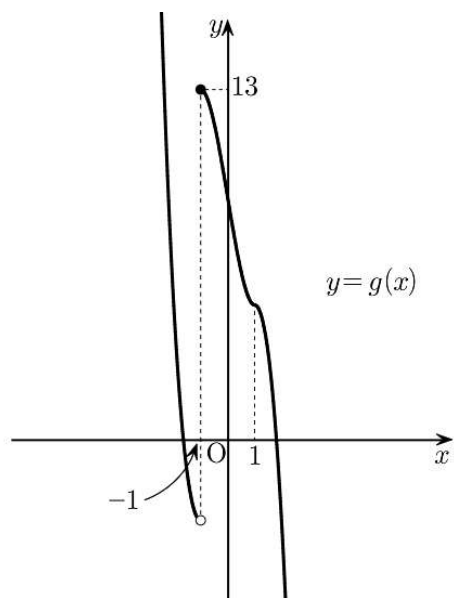
$$g(-1)=-f(-1)=13$$

이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x)+k\} \\ &= f(-1)+k \\ &= -13+k < 13 \end{aligned}$$

즉, $k < 26$ 을 만족해야 한다.

..... ㉞



$$g(-1)=-f(-1)=13, \text{ 즉 } f(-1)=-13 \text{ 에서}$$

$$f(-1)=2-6+d=-13, \quad d=-9$$

$$\therefore f(x)=-2x^3+6x-9$$

㉞에서 $k=-2f(1)$ 이므로

$$k=-2(-2+6-9)=10$$

$k=10$ 이므로 ㉞을 만족한다.

$$\therefore k+f\left(\frac{1}{2}\right)=10+\left(-\frac{25}{4}\right)=\frac{15}{4}$$

169) [정답] ①

[해설]

a, b 는 자연수이고, 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \leq 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x > 2) \end{cases}$

이다.

함수 $h(x)=2x^3-6x+1$ 이라 하면

$$h'(x)=6x^2-6$$

방정식 $h'(x)=0$ 에서 $x=\pm 1$

$x \leq 2$ 에서 함수 $y=h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$	2
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

또 함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$ 의 그래프는 점 $(2, 9)$, 점 $(b, 9)$ 를 지난다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수가

$g(t)$ 이고, $g(k)+\lim_{t \rightarrow k-} g(t)+\lim_{t \rightarrow k+} g(t)=9$ 인 실수 k 의 개수는

1 이다.

(i) $b=1$ 일 때

함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$ 에서

$$y=a(x-2)(x-1)+9$$

이다. 함수 $y=a(x-2)(x-1)+9$ 의 그래프는 두 점

$(1, 9)$, $(2, 9)$ 를 지난다.

$-3 < k < 5$ 인 모든 실수 k 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의

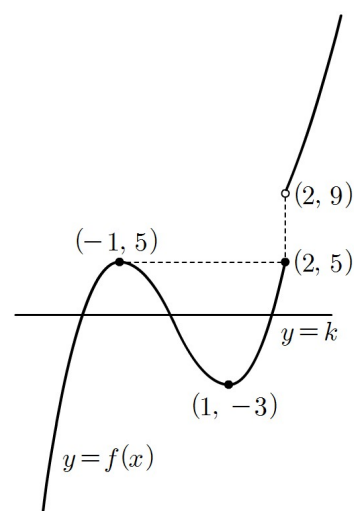
그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수가 3 이다.

따라서 $-3 < k < 5$ 인 모든 실수 k 에 대하여

$$g(k)=\lim_{t \rightarrow k-} g(t)=\lim_{t \rightarrow k+} g(t)=3$$

이다. 따라서 $g(k)+\lim_{t \rightarrow k-} g(t)+\lim_{t \rightarrow k+} g(t)=9$ 인 실수 k 의

개수는 무수히 많다.



(ii) $b=2$ 일 때

함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$ 에서

$$y=a(x-2)^2+9$$

이다. 함수 $y=a(x-2)^2+9$ 의 그래프의 꼭짓점은

$(2, 9)$ 이다.

$-3 < k < 5$ 인 모든 실수 k 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의

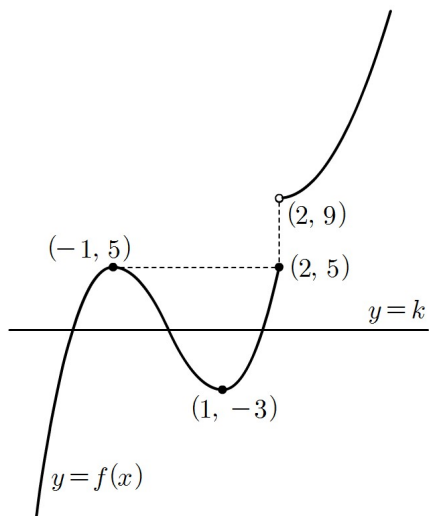
그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수가 3이다.

따라서 $-3 < k < 5$ 인 모든 실수 k 에 대하여

$$g(k) = \lim_{t \rightarrow k-} g(t) = \lim_{t \rightarrow k+} g(t) = 3$$

이다. 따라서 $g(k) + \lim_{t \rightarrow k-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k+} g(t) = 9$ 인 실수 k 의

개수는 무수히 많다.



(iii) $b \geq 3$ 일 때

함수 $y = a(x-2)(x-b)+9$ 의 그래프의 꼭짓점은

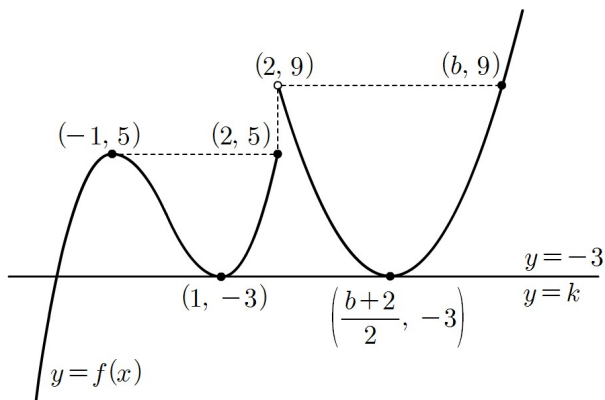
$$\left(\frac{b+2}{2}, f\left(\frac{b+2}{2}\right)\right) \text{이다.}$$

$f\left(\frac{b+2}{2}\right) = -3$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선

$y=k$ 의 교점의 개수는 $k < -3$ 에서 1, $k = -3$ 에서 3이고, $-3 < k < 5$ 에서 5이므로

$$g(-3)=3, \lim_{t \rightarrow -3-} g(t)=1, \lim_{t \rightarrow -3+} g(t)=5$$

이다.



$f\left(\frac{b+2}{2}\right) \neq -3$ 인 자연수 b 에 대하여 같은 방법으로

하면 $g(k) + \lim_{t \rightarrow k-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k+} g(t) = 9$ 인 실수 k 의 개수가

1인 경우는 존재하지 않는다.

이상에서 $g(k) + \lim_{t \rightarrow k-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k+} g(t) = 9$ 인 k 의 개수가 1이면

$$b \geq 3, f\left(\frac{b+2}{2}\right) = -3$$

이다.

$$f\left(\frac{b+2}{2}\right) = -3 \text{에서}$$

$$a\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(1-\frac{b}{2}\right)+9 = -3, \quad a\left(\frac{b}{2}-1\right)^2 = 12$$

$$\therefore a(b-2)^2 = 48$$

48을 두 자연수 m, n 에 대하여 $m \times n^2$ 꼴로 나타내면

$$3 \times 4^2 \text{ 또는 } 12 \times 2^2 \text{ 또는 } 48 \times 1^2$$

$b \geq 3$ 이므로 $b-2 \geq 1$ 이다.

(1) $48 = 3 \times 4^2$ 일 때

$$a = 3, b = 6$$

(2) $48 = 12 \times 2^2$ 일 때

$$a = 12, b = 4$$

(3) $48 = 48 \times 1^2$ 일 때

$$a = 48, b = 3$$

이상에서 $a+b$ 의 최댓값은 $a=48, b=3$ 일 때 51이다.

170) [정답] ③

[해설]

$x > 0$ 에서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 5 \text{이고 } f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \text{이다.}$$

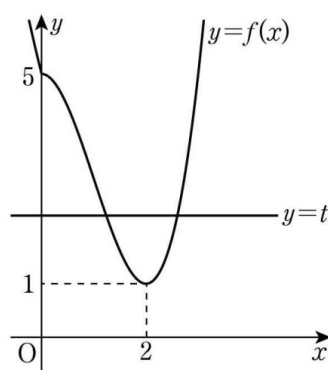
$f'(2) = 0$ 이고 $x=2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(2)=1$ 이다.

$x \leq 0$ 에서 $f(x) = x^2 - 2ax + \frac{a^2}{4} + b^2 = (x-a)^2 - \frac{3}{4}a^2 + b^2$ 이고

$$f(0) = \frac{a^2}{4} + b^2$$

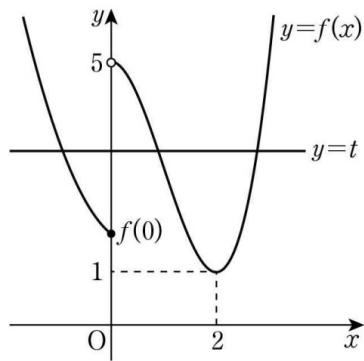
(i) $a \geq 0$ 인 경우

① $f(0)=5$ 인 경우



함수 $g(t)$ 는 $t=1$ 에서만 불연속이므로 함수 $g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 개수는 1이다.

② $f(0) \neq 5$ 인 경우



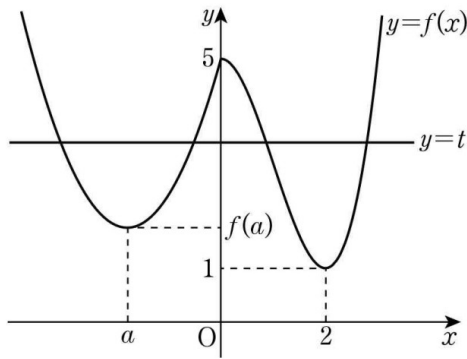
함수 $g(t)$ 는 $t=1, t=5, t=f(0)$ 에서 불연속이다.
 함수 $g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 개수가 2가 되려면 $f(0)=\frac{a^2}{4}+b^2=1$ 이다.

$$\frac{a^2}{4}=0, b^2=1 \text{ 또는 } \frac{a^2}{4}=1, b^2=0$$

을 만족시키는 두 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(0, 1), (0, -1), (2, 0)$

(ii) $a < 0$ 인 경우

① $f(0)=5$ 인 경우

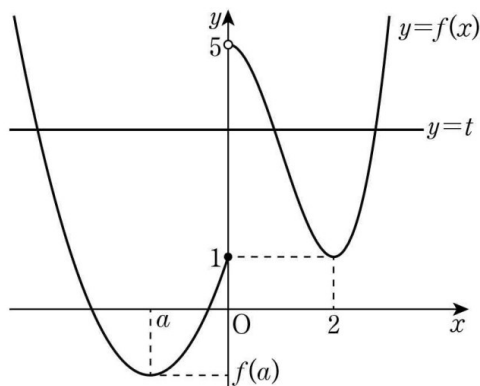


함수 $g(t)$ 는 $t=1, t=5, t=f(a)$ 에서 불연속이다.
 함수 $g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 개수가 2가 되려면

$$f(a)=-\frac{3}{4}a^2+b^2=1, f(0)=\frac{a^2}{4}+b^2=5 \text{이다.}$$

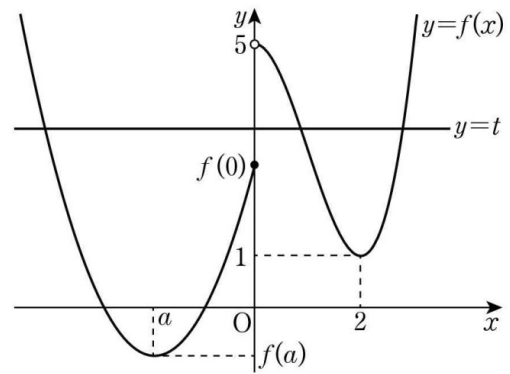
$a^2=4, b^2=4$ 를 만족시키는 두 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(-2, 2), (-2, -2)$

② $f(0)=1$ 인 경우



$f(a) < 1 < 5$ 이고 함수 $g(t)$ 는 $t=f(a), t=1, t=5$ 에서 불연속이므로 함수 $g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 개수가 3이다.

③ $f(0) \neq 1$ 이고 $f(0) \neq 5$ 인 경우



$g(t)$ 는 $t=1, t=5, t=f(0)$ 에서 불연속이므로 함수 $g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 개수는 3 이상이다.

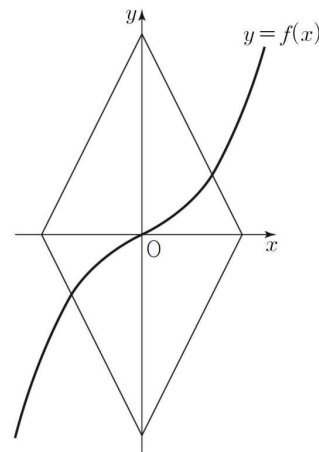
(i), (ii)에서 구하는 두 정수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $(0, 1), (0, -1), (2, 0), (-2, 2), (-2, -2)$ 로 5

171) [정답] 240

[해설]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 개수는 1 또는 3이다.

(i) 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 개수가 1인 경우
 모든 양수 t 에 대하여 $g(t)=2$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

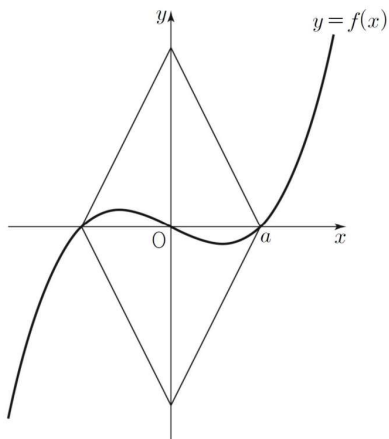


(ii) 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 개수가 3인 경우
 $f(x)=x(x-a)(x+a)$ ($a > 0$)이라 하자.

두 점 $(t, 0), (0, -2t)$ 를 지나고 기울기는 t 의 값에 관계없이 2이므로 $f'(a)$ 의 값에 따라 함수 $g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속이 되는 k 의 개수가 달라진다.

(a) $f'(a) \leq 2$ 일 때

모든 양수 t 에 대하여 $g(t)=2$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

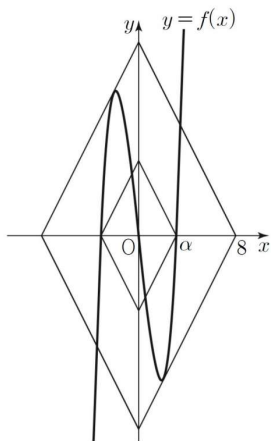


(b) $f'(a) > 2$ 일 때

곡선 $y=f(x)$ 의 기울기가 2인 두 접선의 x 절편을 각각 $\beta, -\beta$ ($\beta > a$)라 하면

$$g(t) = \begin{cases} 2 & (0 < t < a \text{ 또는 } t > \beta) \\ 4 & (t = a \text{ 또는 } t = \beta) \\ 6 & (a < t < \beta) \end{cases}$$

함수 $g(t)$ 는 $t=a, t=\beta$ 에서 불연속이므로 $a=\alpha, \beta=8$



함수 $g(t)$ 가 $t=8$ 에서 불연속이므로 두 직선 $y=2x+16$ 과 $y=2x-16$ 은 곡선 $y=f(x)$ 에 접한다.

직선 $y=2x-16$ 이 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 점의 x 좌표를 p ($0 < p < \alpha$)라 하면

$$p^3 - \alpha^2 p = 2p - 16 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(x) = 3x^2 - \alpha^2 \text{이므로 } f'(p) = 3p^2 - \alpha^2 = 2 \text{에서}$$

$$\alpha^2 = 3p^2 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$p^3 - (3p^2 - 2)p = 2p - 16, \quad -2p^3 = -16$$

$$\text{따라서 } p=2, \alpha^2=10 \text{이므로 } f(x)=x^3-10x$$

$$\therefore \alpha^2 \times f(4) = 10 \times (4^3 - 10 \times 4) = 240$$

172) [정답] ⑤

[해설]

$$f(x) = x^2 + 2x + k = (x+1)^2 + k-1$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq k-1$ 이다.

함수 $g(f(x))$ 에서 $f(x)=t$ 라 하면 $t \geq k-1$ 이므로 함수

$g(t)$ 는 구간 $[k-1, \infty)$ 에서 정의된 함수이다.

한편 $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ 에서

$$g'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

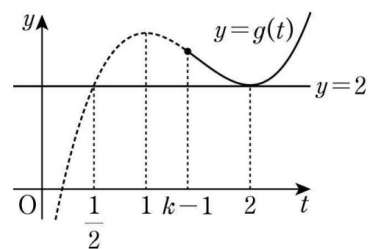
이므로 $g'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 이다.

함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소이다.

$g(t)=2$ 에서

$$2t^3 - 9t^2 + 12t - 2 = 2, \quad (2t-1)(t-2)^2 = 0$$

즉, 함수 $y=g(t)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 는 그림과 같다.



따라서 $\frac{1}{2} \leq k-1 \leq 2$, 즉 $\frac{3}{2} \leq k \leq 3$ 이므로 조건을 만

족시키는 실수 k 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

173) [정답] 13

[해설]

조건 (가)에서

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(g(x))$$

이므로 $x \neq 1$ 일 때,

$$f'(g(x)) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때, 두 점 $(1, f(1)), (x, f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기가 $f'(g(x))$ 이고, 조건 (나)에서 $g(x) \geq \frac{5}{2}$ 이므로 두 점

$(1, f(1)), \left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 를 지나는 직선은 점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 에서 접하는 직선이다.

두 점 $(1, f(1)), \left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 를 지나는 직선의 방정식을

$y=mx+n$ 이라 하면

$$f(x) = (x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + mx + n \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

조건 (다)에서 $f(0) = -3$ 이므로

$$f(0) = -\frac{25}{4} + n = -3, \quad n = \frac{13}{4}$$

㉠에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$f'(g(1)) = f'(1) \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + 2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right) + m$$

$$= 3x^2 - 12x + m + \frac{45}{4}$$

㉔에서 $g(1) \geq \frac{5}{2}$ 이므로 $g(1) \neq 1$

따라서 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 대칭축이 $x = 2$ 이므로

$$\frac{g(1)+1}{2} = 2 \text{에서} \quad g(1) = 3$$

조건 (다)에서 $f(3) = 6$ 이므로 ㉔에 대입하면

$$f(3) = \frac{1}{2} + 3m + \frac{13}{4} = 6, \quad m = \frac{3}{4}$$

따라서 $f(x) = (x-1)\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$ 이므로

$$f(4) = 13$$

[다른 풀이]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = -3$ 이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$$

이라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

조건 (가)에서

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(g(x))$$

이므로 $x \neq 1$ 일 때,

$$f'(g(x)) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때, 두 점 $(1, f(1)), (x, f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기가

$f'(g(x))$ 이고, 조건 (나)에서 $g(x) \geq \frac{5}{2}$ 이므로 두 점

$(1, f(1)), \left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 를 지나는 직선은 점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 에서

접하는 직선이다.

그러므로 직선 $y - f\left(\frac{5}{2}\right) = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$ 는 점 $(1, f(1))$ 을

지난다. 즉,

$$\begin{aligned} 1 + a + b - 3 - \left\{ \left(\frac{5}{2}\right)^3 + a\left(\frac{5}{2}\right)^2 + b\left(\frac{5}{2}\right) - 3 \right\} \\ = \left\{ 3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5a + b \right\} \left(1 - \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

이 식을 정리하면

$$-\frac{117}{8} - \frac{21}{4}a - \frac{3}{2}b = \left(\frac{75}{4} + 5a + b\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{9}{4}a = -\frac{108}{8}$$

$$a = -6$$

따라서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + bx - 3$ 이고,

$f'(x) = 3x^2 - 12x + b$ 이다.

한편, ㉔에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

이때, $g(x)$ 는 연속함수이므로 $g(1) = k$ 라 하면 좌변은

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \{3\{g(x)\}^2 - 12g(x) + b\}$$

$$= 3k^2 - 12k + b \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

또, 우변은

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 3 - 12 + b = b - 9 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

㉔, ㉔에서

$$3k^2 - 12k + b = b - 9$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, \quad (k-1)(k-3) = 0$$

$$k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

$$g(1) = 1 \text{ 또는 } g(1) = 3$$

이때, 조건 (나)에서 $g(x)$ 의 최솟값이 $\frac{5}{2}$ 이므로

$$g(1) = 3$$

따라서 조건 (다)에서 $f(g(1)) = f(3) = 6$ 이므로

$$27 - 54 + 3b - 3 = 6, \quad b = 12$$

따라서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$ 이므로

$$f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 3 = 13$$

174) [정답] ③

[해설]

$$\neg. f'(x) = 3x^2 - 3t^2 = 3(x+t)(x-t)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -t \text{ 또는 } x = t$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음 표와 같다.

x	$\dots$	$-t$	$\dots$	t	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2t^3$	$\searrow$	$-2t^3$	$\nearrow$

$t = 2$ 일 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 두 함수 $f(x)$,

$|f(x)|$ 의 최댓값은 모두 $f(-2) = 16$ 이므로

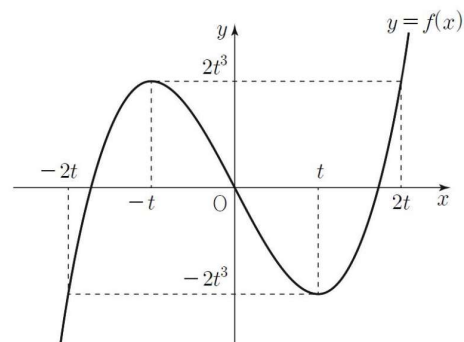
$$M_1(2) = M_2(2) = 16$$

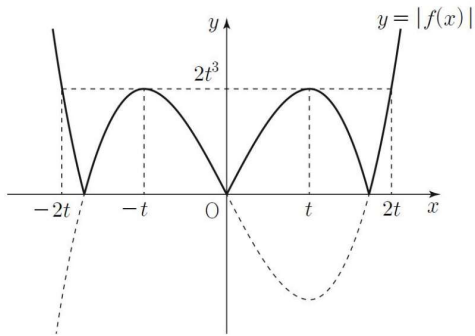
$$\therefore g(2) = 32 \quad (\text{참})$$

$$\neg. \text{ 방정식 } f(x) = 2t^3 \text{에서 } (x+t)^2(x-2t) = 0$$

방정식 $f(x) = -2t^3$ 에서 $(x-t)^2(x+2t) = 0$ 이므로 두

함수 $y = f(x)$, $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.





- (i) $-t < -2, t > 1$ 일 때
 $t > 2$ 이고, $M_1(t) = M_2(t) = f(-2) < f(-t)$
 이므로 $g(t) = 2f(-2) \neq 2f(-t)$
- (ii) $-2t \leq -2 \leq -t, 1 \leq t$ 일 때
 $1 \leq t \leq 2$ 이고, $M_1(t) = M_2(t) = f(-t)$
 이므로 $g(t) = 2f(-t)$
- (iii) $-2 < -2t, t < 1 \leq 2t$ 일 때
 $\frac{1}{2} \leq t < 1$ 이고,
 $M_1(t) = f(-t), M_2(t) = -f(-2) > f(-t)$
 이므로 $g(t) = f(-t) - f(-2) \neq 2f(-t)$
- (iv) $-2 < -2t, 2t < 1$ 일 때
 $0 < t < \frac{1}{2}$ 이고,
 $M_1(t) = f(1) > f(-t), M_2(t) = -f(-2) > f(-t)$
 이므로 $g(t) = f(1) - f(-2) \neq 2f(-t)$
- (i) ~ (iv)에 의하여 $g(t) = 2f(-t)$ 를 만족시키는 t 의
 최댓값과 최솟값의 합은 $2+1=3$ (참)

ㄷ. (i) $\frac{1}{2} \leq t < 1$ 일 때

$$g(t) = f(-t) - f(-2) = 2t^3 - 6t^2 + 8 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \left(2h^2 - 3h - \frac{9}{2}\right) = -\frac{9}{2}$$

(ii) $0 < t < \frac{1}{2}$ 일 때

$$g(t) = f(1) - f(-2) = -9t^2 + 9 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (-9h - 9) = -9$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} \\ &= -\frac{9}{2} - (-9) = \frac{9}{2} \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

175) [정답] 82

[해설]

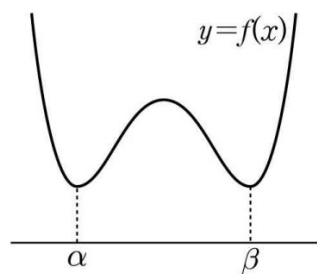
사차함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서만 극솟값을 갖는다고 하면 함수 $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} f(t) - f(\alpha) & (t < \alpha) \\ f(\alpha) - f(t) & (t \geq \alpha) \end{cases}$$

구간 $(-\infty, \alpha)$ 에서 함수 $f(t)$ 가 감소하므로 함수 $g(t)$ 도 감소하고, 구간 $[\alpha, \infty)$ 에서 함수 $f(t)$ 가 증가하므로 함수 $g(t)$ 는 감소한다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(t)$ 가 감소하므로 조건을 만족시키는 양수 k 가 존재하지 않는다. 그러므로 함수 $f(x)$ 는 극댓값을 가져야 한다.

함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha, x = \beta (\alpha < \beta)$ 에서 극솟값을 가지고, $f(\alpha) = a, f(\beta) = b$ 라 하자.

(i) $f(\alpha) = f(\beta)$ 인 경우

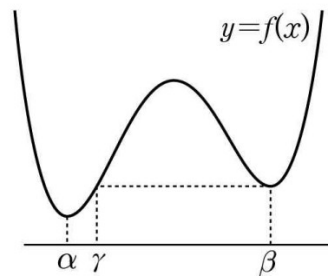


함수 $f(x)$ 의 최솟값은 a 이므로

$$g(t) = \begin{cases} f(t) - a & (t < \alpha) \\ 0 & (\alpha \leq t \leq \beta) \\ a - f(t) & (t > \beta) \end{cases}$$

따라서 조건을 만족시키는 양수 k 가 존재하지 않는다.

(ii) $f(\alpha) < f(\beta)$ 인 경우

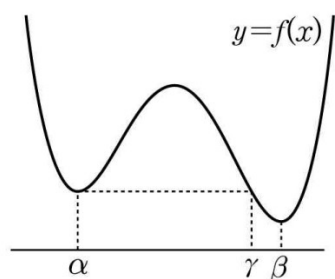


$\alpha < x < \beta$ 일 때, $f(x) = f(\beta)$ 의 해를 $x = \gamma$ 라 하면

$$g(t) = \begin{cases} f(t) - a & (t < \alpha) \\ a - f(t) & (\alpha \leq t < \gamma) \\ a - b & (\gamma \leq t \leq \beta) \\ a - f(t) & (t > \beta) \end{cases}$$

$a - b < 0$ 이므로 조건을 만족시키는 양수 k 가 존재하지 않는다.

(iii) $f(\alpha) > f(\beta)$ 인 경우



$\alpha < x < \beta$ 일 때, $f(x) = f(\alpha)$ 의 해를 $x = \gamma$ 라 하면

$$g(t) = \begin{cases} f(t)-b & (t < \alpha) \\ a-b & (\alpha \leq t \leq \gamma) \\ f(t)-b & (\gamma < t < \beta) \\ b-f(t) & (t \geq \beta) \end{cases}$$

$a-b > 0$ 이므로 $k=a-b$, $\alpha=0$, $\gamma=2$ 이면

k 는 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서

$$f'(0)=0, f(0)=f(2)$$

이다. 또 $g(4)=0$ 이므로 $\beta=4$ 이고 $f'(4)=0$ 이다.

$f(x)-f(0)=x^2(x-2)(x-p)$ (p 는 상수)라 하자.

$$f'(x)=2x(x-2)(x-p)+x^2(2x-p-2)$$

$$f'(4)=0 \text{에서 } 16(4-p)+16(6-p)=0$$

$$10-2p=0, p=5$$

그러므로

$$f(x)=x^2(x-2)(x-5)+f(0)$$

$$k=f(\alpha)-f(\beta)=f(0)-f(4)$$

$$=f(0)-\{-32+f(0)\}=32$$

$$g(-1)=f(-1)-f(4)$$

$$=\{18+f(0)\}-\{-32+f(0)\}=50$$

$$\text{따라서 } k+g(-1)=82$$

176) [정답] 2

[해설]

$$h(x)=x^3-3x+8 \text{이라 하면 } f(x)=|h(x)|$$

$$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

극댓값은 $h(-1)=10$ 이고 극솟값은 $h(1)=6$ 이다. $y=h(x)$ 의

극솟값이 양수이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만난다.

즉 방정식 $h(x)=0$ 은 한 개의 실근 $x=a$ 를 갖고,

$$f(x) = \begin{cases} -h(x) & (x < a) \\ h(x) & (x \geq a) \end{cases} \text{이다.}$$

방정식 $f(t)=f(t+2)$ 의 해를 구하자.

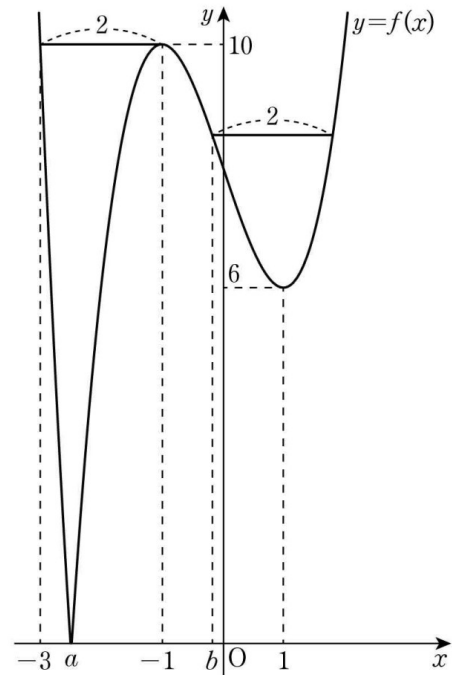
$$a-2 < t < a \text{일 때, } -t^3+3t-8=(t+2)^3-3(t+2)+8$$

$$t^3+3t^2+3t+9=(t+3)(t^2+3)=0 \text{에서 } t=-3$$

$t \leq a-2$ 또는 $t \geq a$ 일 때,

$$t^3-3t+8=(t+2)^3-3(t+2)+8, 3t^2+6t+1=0 \text{에서}$$

$$t=\frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3} \text{이다. } \frac{-3+\sqrt{6}}{3}=b \text{라 하면 } b > -1$$



$t < -3$ 일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(t)$ 이므로 $g(t)=f(t)$ 이다.

$-3 \leq t \leq -1$ 일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(-1)=10$ 이므로 $g(t)=10$ 이다.

$-1 < t \leq b$ 일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(t)$ 이므로 $g(t)=f(t)$ 이다.

$b < t$ 일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(t+2)$ 이므로 $g(t)=f(t+2)$ 이다.

즉 함수 $g(t)$ 는 다음과 같다.

$$g(t) = \begin{cases} -t^3+3t-8 & (t < -3) \\ 10 & (-3 \leq t \leq -1) \\ t^3-3t+8 & (-1 < t \leq b) \\ t^3+6t^2+9t+10 & (b < t) \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow -3-} g(t) = 10 = g(-3) = \lim_{t \rightarrow -3+} g(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow -1-} g(t) = 10 = g(-1) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow b-} g(t) = g(b) = \lim_{t \rightarrow b+} g(t)$$

이므로 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -3-} \frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)} &= \lim_{t \rightarrow -3-} \frac{(t+3)(-t^2+3t-6)}{t+3} \\ &= \lim_{t \rightarrow -3-} (-t^2+3t-6) = -24 \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow -3+} \frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)} = 0$$

이므로 $g(t)$ 는 $t=-3$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\lim_{t \rightarrow -1-} \frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1+} \frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)} &= \lim_{t \rightarrow -1+} \frac{(t+1)(t^2-t-2)}{t+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1+} (t^2-t-2) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $g(t)$ 는 $t=-1$ 에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow b-} \frac{g(t)-g(b)}{t-b} &= \lim_{t \rightarrow b-} \frac{(t-b)(t^2+bt+b^2-3)}{t-b} \\ &= \lim_{t \rightarrow b-} (t^2+bt+b^2-3) = 3b^2-3 \\ \lim_{t \rightarrow b+} \frac{g(t)-g(b)}{t-b} &= \lim_{t \rightarrow b+} \frac{(t-b)\{t^2+(6+b)t+b^2+6b+9\}}{t-b} \\ &= \lim_{t \rightarrow b+} \{t^2+(6+b)t+b^2+6b+9\} \\ &= 3b^2+12b+9\end{aligned}$$

$b > -1$ 이므로 $3b^2-3 \neq 3b^2+12b+9$

즉 $g(t)$ 는 $t=b$ 에서 미분가능하지 않다.

그러므로 $\alpha = -3, \beta = \frac{-3+\sqrt{6}}{3}$ 이고 $\alpha\beta = 3-\sqrt{6}$

따라서 $m=3, n=-1$ 이므로 $m+n=2$

177) [정답] ⑤

[해설]

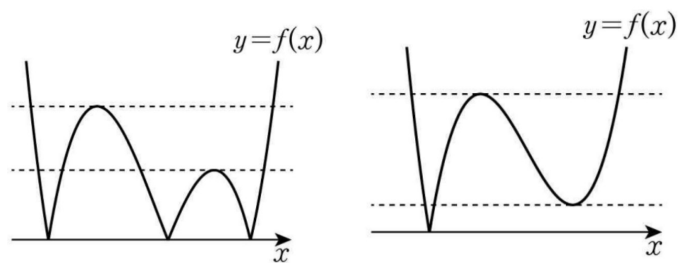
$g(x)=x^3-12x+k$ 라 하면 $f(x)=|g(x)|$

$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극댓값 $k+16$, $x=2$ 에서 극솟값 $k-16$ 을 가지므로 k 의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $0 < k < 16$ 또는 $k > 16$ 인 경우

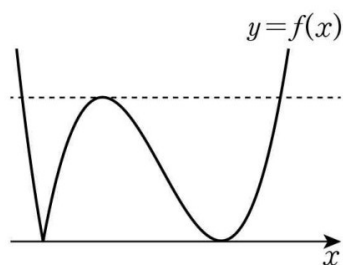


[그림 1]

[그림 2]

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a 의 값이 3개 존재하므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $k=16$ 인 경우



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a 의 값이 오직 하나이다.

(i), (ii)에서 $k=16$

178) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $k=0$ 일 때, $f(x)+g(x)=x^3+2x^2+4$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4$ 라 하면

$h_1'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)=0$

에서 함수 $h_1(x)$ 는 $x=-\frac{4}{3}$ 에서 극대, $x=0$ 에서 극소이다.

$h_1(0)=4 > 0$ 이므로 방정식 $h_1(x)=0$ 은 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)-g(x)=0$ 에서

$x^3-kx+6-(2x^2-2)=0, x^3-2x^2+8=kx$

$h_2(x)=x^3-2x^2+8$ 이라 하면 곡선 $y=h_2(x)$ 에 직

선 $y=kx$ 가 접할 때만 방정식 $h_2(x)=kx$ 의 서로

다른 실근의 개수가 2이다. 접점의 좌표를

(a, a^3-2a^2+8) 이라 하면 $h_2'(x)=3x^2-4x$ 에서 접

선의 방정식은

$y-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(x-a)$

이 접선이 원점을 지나므로

$0-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(0-a)$

$(a-2)(a^2+a+2)=0, a=2$

따라서 구하는 k 의 값은 $h_2'(2)=4$ 뿐이다. (참)

ㄷ. $|x^3-kx+6|=2x^2-2$ 에서 $2x^2-2 \geq 0$ 이므로 x 의 값의 범위는 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 이고, 주어진 방정식은

$x^3-kx+6=-(2x^2-2)$ 또는 $x^3-kx+6=2x^2-2$, 즉

$x^3+2x^2+4=kx$ 또는 $x^3-2x^2+8=kx$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4, h_2(x)=x^3-2x^2+8$ 이라 하면 주어진

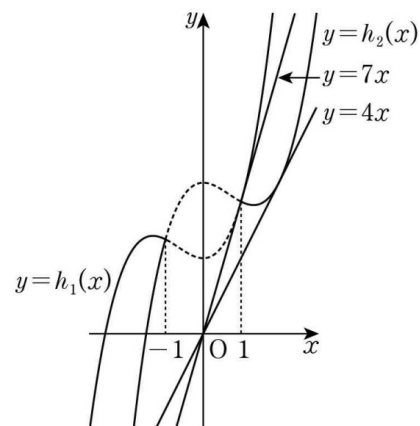
방정식의 실근의 개수는 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 일 때 직선

$y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x), y=h_2(x)$ 의 교점의 개수와 같다.

ㄴ에서 $k=4$ 일 때 직선 $y=kx$ 와 곡선 $y=h_2(x)$ 가 접하므로

$k \leq 4$ 일 때 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 에서 직선 $y=kx$ 와 두 곡선

$y=h_1(x), y=h_2(x)$ 의 교점의 개수의 최댓값은 3이다.



$k > 4$ 일 때, $x \leq -1$ 에서 직선 $y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x),$

$y=h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 2이다. 원점에서 곡선

$y=h_1(x)$ 에 그은 접선의 방정식은 $y=7x$ 이고 접점의 좌표는 $(1, 7)$ 이므로

$k > 4$ 일 때, $x \geq 1$ 에서 직선 $y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 2이다.

즉, $k > 4$ 일 때, $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 에서 직선 $y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 4이다.

따라서 방정식 $|f(x)|=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 4이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

179) [정답] 35

[해설]

직선 $y=k$ 가 곡선 $y=f(x)$, 직선 $y=g(x)$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 각각 3, 1이므로

함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나는 경우는

직선 $y=k$ 와 곡선 $y=f(x)$ 는 서로 다른 세 점에서 만나고 직선 $y=k$ 와 직선 $y=g(x)$ 는 한 점에서 만나며 이 네 점이 모두 서로 다른 경우이다.

$$\text{함수 } h(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (f(x) < g(x)) \end{cases}$$

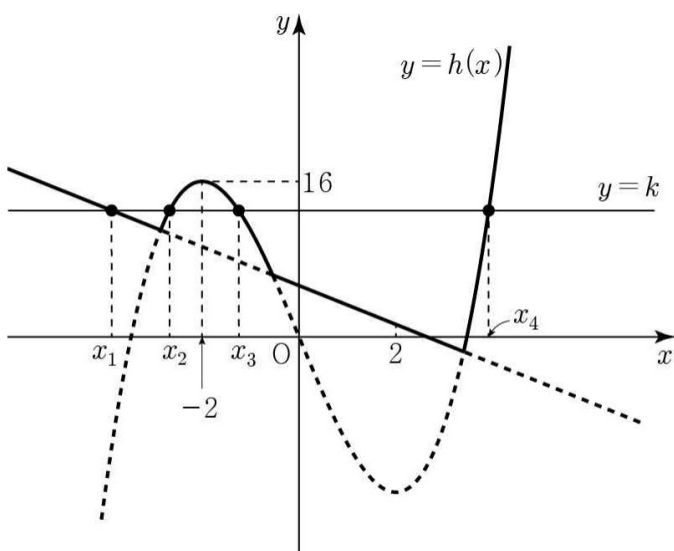
이므로 직선 $y=k$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 x_1 이라 하면

$$f(x_1) < g(x_1)$$

직선 $y=k$ 와 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 서로 다른 세 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_2, x_3, x_4 라 하면

$$f(x_2) > g(x_2), f(x_3) > g(x_3), f(x_4) > g(x_4)$$

이를 만족시키는 함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



직선 $y=g(x)$ 가 점 $(2, 2)$ 를 지나고

$$x_1 < x_2, f(x_1) < g(x_1) = k$$

인 실수 x_1 이 존재하므로 직선 $y=g(x)$ 의 기울기는 음수이다.

$$y=g(x)=a(x-2)+2 \text{에서 } a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값을 갖고 $x=-2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 함숫값은 함수 $g(x)$ 의 함숫값보다 크다.

$$f(-2) > g(-2)$$

$$16 > -4a+2$$

$$a > -\frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에 의하여 } -\frac{7}{2} < a < 0$$

$$m = -\frac{7}{2}, M=0$$

$$\text{따라서 } 10 \times (M-m) = 10 \times \left\{ 0 - \left(-\frac{7}{2} \right) \right\} = 35$$

180) [정답] ④

[해설]

$$f(-2)=g(-2)=2, f(0)=g(0)=2 \text{이므로}$$

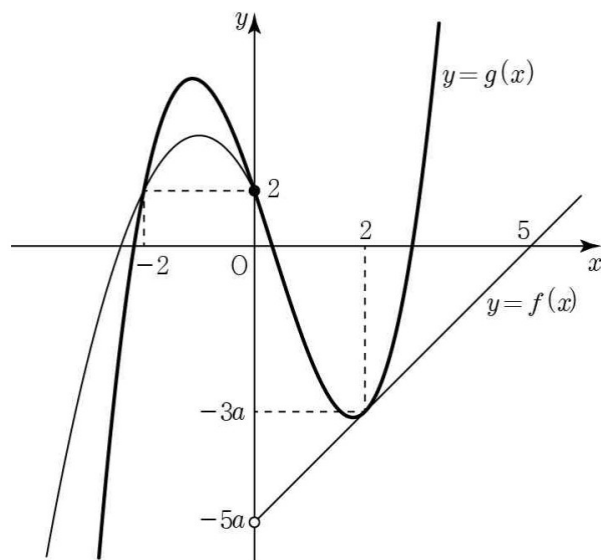
삼차방정식 $g(x)=2$ 의 서로 다른 세 실근을 $-2, 0, t$ 라 하면

$$g(x)-2=x(x+2)(x-t)$$

$$g(x)=x(x+2)(x-t)+2$$

$$=x^3+(2-t)x^2-2tx+2$$

$f(k)=g(k)$ 를 만족시키는 양수 k 의 값은 2뿐이므로, 이를 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$x > 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$ 에서의 접선과 일치한다.

$$f(2)=g(2) \text{이고 } f'(2)=g'(2)$$

$$f(2)=a(2-5)=-3a$$

$$g(2)=8+4(2-t)-4t+2=18-8t$$

$$-3a=18-8t$$

$$\dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(2)=g'(2) \text{이므로}$$

$$f'(x)=a(x > 0) \text{에서}$$

$$f'(2)=a$$

$$g'(x)=3x^2+2(2-t)x-2t \text{에서}$$

$$g'(2)=20-6t$$

$$a=20-6t$$

..... ㉠

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=2, t=3$

$$g(x)=x^3-x^2-6x+2$$

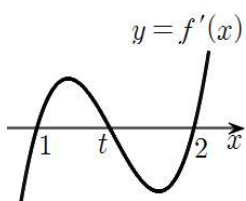
$$\text{따라서 } g(2a)=g(4)=26$$

181) [정답] 15

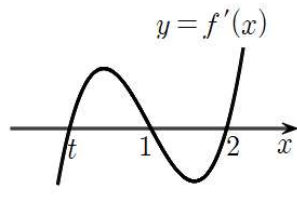
[해설]

조건 (나)에서 집합 $\{x|f(x)=k\}$ 의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 의 값이 존재하므로 사차함수 $f(x)$ 는 극값을 3개 가진다.

조건 (가)에서 $f'(a) \leq 0$ 인 실수 a 의 최댓값이 2이므로 $f'(2)=0$ 이다. $f'(1)=0$ 이므로 방정식 $f'(x)=0$ 의 다른 한 근을 t 라 하면 함수 $y=f'(x)$ 의 개형은 다음 그림과 같다.

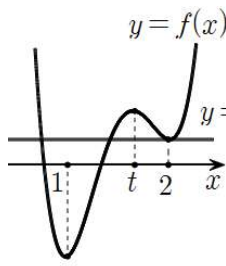


[그림1]

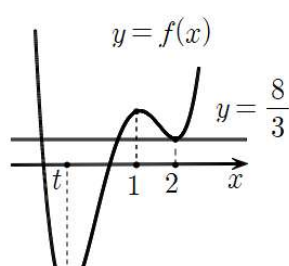


[그림2]

이때 $f(0)=0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



[그림1]



[그림2]

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{8}{3}$ 이 접하므로 방정식

$f(x)=\frac{8}{3}$ 을 만족하는 다른 두 근을 α, β 라 하면

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-2)^2+\frac{8}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$f(0)=0$ 이므로 ㉠에 대입하면

$$4\alpha\beta+\frac{8}{3}=0 \quad \therefore \alpha\beta=-\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$f'(x)=(x-\beta)(x-2)^2+(x-\alpha)(x-2)^2+2(x-\alpha)(x-\beta)(x-2)$$

$f'(1)=0$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= 1-\beta+1-\alpha-2(1-\alpha-\beta+\alpha\beta) \\ &= \alpha+\beta-2\alpha\beta \\ &= \alpha+\beta+\frac{4}{3}=0 \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha+\beta=-\frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\therefore f(3)=(3-\alpha)(3-\beta)+\frac{8}{3}$$

$$=9-3(\alpha+\beta)+\alpha\beta+\frac{8}{3}$$

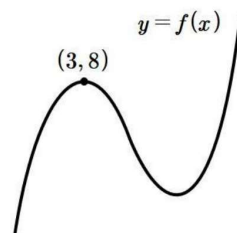
$$=9-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)-\frac{2}{3}+\frac{8}{3} \quad (\because \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢})$$

$$=15$$

182) [정답] 58

[해설]

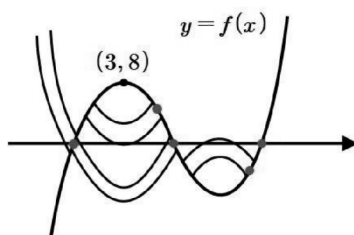
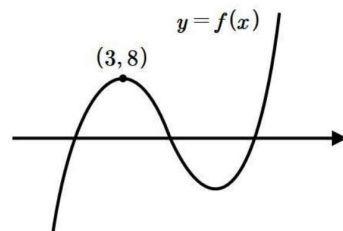
주어진 삼차함수 $f(x)$ 의 개형을 그려보면 다음 그림과 같다.



$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases} \text{는 } f(x) \text{의 그래프에서 } x < t \text{인}$$

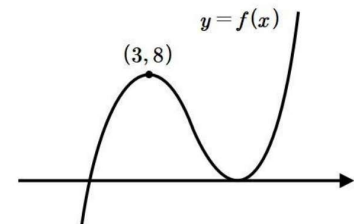
부분을 $y=f(t)$ 에 대해 대칭한 함수이므로, 경우를 나누어 불연속점이 두 개인 그래프를 추론해 보자.

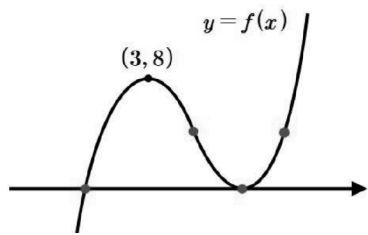
(i) 서로 다른 실근이 3개일 때



$(t, f(t))$ 를 움직이며 그림과 같이 교점의 개수가 불연속인 점을 조사해 보면 2개보다 많다.

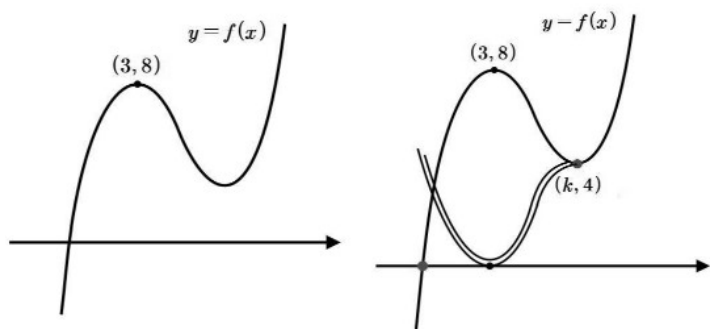
(ii) 서로 다른 실근이 2개일 때





마찬가지로 이 경우도 불연속점이 2개보다 많다.

(iii) 서로 다른 실근이 1개일 때

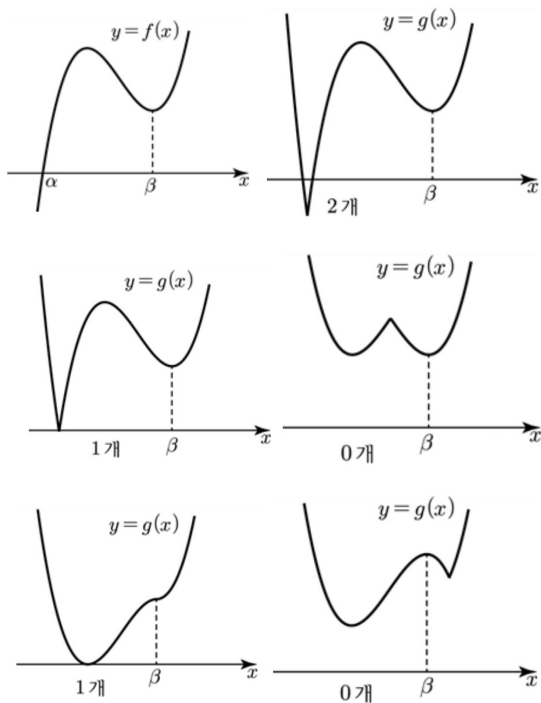


이 경우 극솟값이 4일 때, 불연속점이 2개다.

따라서 $f(x)=(x-3)^2(x-6)+8$ 이므로

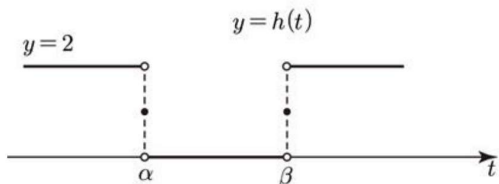
$$f(8)=(8-3)^2(8-6)+8=58$$

[다른 풀이]



불연속인 점이 2개 나오기 위한 $y=f(x)$ 의 그래프와 t 의 범위에 따른 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려보면 위와 같다.

따라서 $y=h(t)$ 의 그래프를 그리면 아래와 같다.



$y=f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값 8을 $x=\beta$ 에서 최솟값 4를 가지므로 극댓값과 극솟값의 차이는 $\frac{1}{2}(\beta-3)^3=4$ 에서 $\beta=5$ 이다.

삼차함수의 비율 관계에 의해

$$f(x)=(x-3)^2(x-6)+8 \text{ 이므로 } f(8)=(8-3)^2(8-6)+8=58$$

183) [정답] 16

[해설]

모든 실수 α 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)=0 \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(2x+1)=0 \text{ 이어야 한다. } \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 방정식 $f(x)=0$ 이 중근 또는 서로 다른 세 실근을 가지면 모든 근에 대하여 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 못하므로 $f(x)=0$ 의 실근의 개수는 1이고 그 근을 t 라 하면

$$t=2t+1 \quad \therefore t=-1$$

$f(-1)=0$ 이므로 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ 에서

$$-1+a-b+4=0, \quad b=a+3$$

$$f(x)=x^3+ax^2+(a+3)x+4$$

$$=(x+1)\{x^2+(a-1)x+4\}$$

이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$ 은 실근을 가지지 않아야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D=(a-1)^2-4^2<0$$

$$(a-5)(a+3)<0 \quad \therefore -3<a<5$$

$f(1)=2a+8$ 에서 a 가 정수이므로 $f(1)$ 의 최댓값은 $a=4$ 일 때 16이다.

184) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)=px^2+qx+r$ ($p<0$)라 하면

$$f'(x)=2px+q$$

함수 $g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x \leq 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases}$ 일 때 조건 (가)에서

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능해야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x)=\lim_{x \rightarrow 0+} g(x)=g(0) \text{ 에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x)=\lim_{x \rightarrow 0-} (x^3+ax^2+15x+7)=7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x)=\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=f(0)$$

$$g(0)=7$$

$$f(0)=7 \text{ 에서 } r=7$$

$g'(0)$ 이 존재해야 하므로

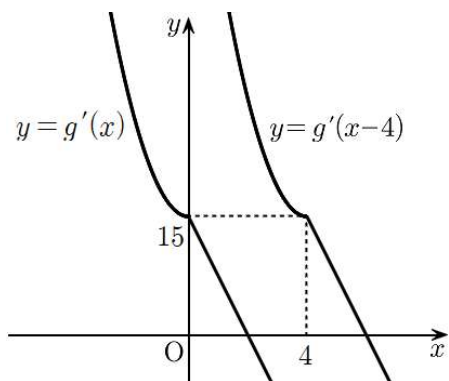
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3+ax^2+15x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2+ax+15)=15 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$$

$f'(x)=2px+q$ 이므로 $f'(0)=15$ 에서 $q=15$

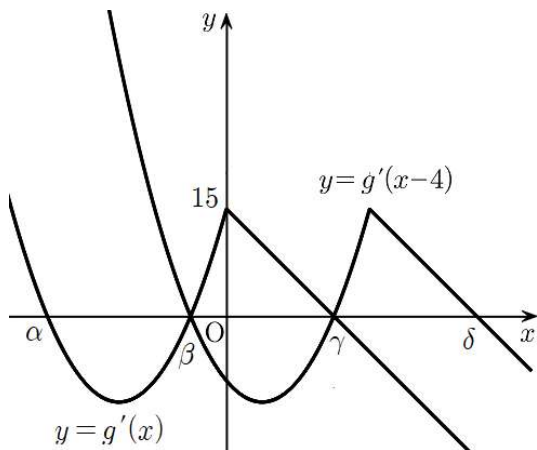
함수 $g'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax+15 & (x \leq 0) \\ 2px+15 & (x > 0) \end{cases}$ 이고 함수 $g'(x-4)$ 의

그래프는 함수 $g'(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 $a \leq 0$ 라 하면 두 함수 $g'(x)$, $g'(x-4)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



방정식 $g'(x) \times g'(x-4)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

즉 $a > 0$ 이고 $a \neq 3\sqrt{5}$ 이므로 방정식 $g'(x) \times g'(x-4)=0$ 의 서로 다른 네 실근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때 두 함수 $g'(x)$, $g'(x-4)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같아야 한다.



함수 $g'(x)=3x^2+2ax+15$ 에서 방정식 $g'(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{2a}{3}, \quad \alpha\beta = 5$$

두 근의 차가 4이어야 하므로 $|\alpha - \beta| = 4$ 에서

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{\frac{4}{9}a^2 - 20}$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}a^2 - 20} = 4 \text{ 이므로 } a = 9 \quad (\because a > 0)$$

즉 $g'(x)=3x^2+18x+15=3(x+5)(x+1)$ 이므로 방정식 $g'(x)=0$ 의 두 실근 α, β 는 각각

$$\alpha = -5, \quad \beta = -1$$

이고 방정식 $g'(x-4)=0$ 의 두 근 γ, δ 는 각각

$$\gamma = 3, \quad \delta = 7$$

이다.

이때 $\gamma=3$ 은 직선 $f'(x)=2px+15$ 의 x 절편과 같으므로

$$6p+15=0, \quad p = -\frac{5}{2}$$

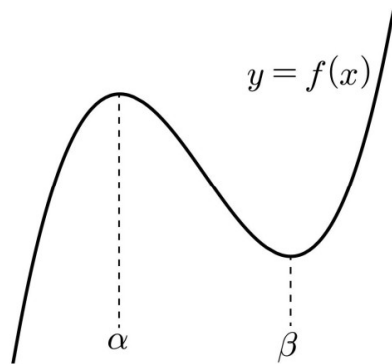
따라서 $g(x)=\begin{cases} x^3+9x^2+15x+7 & (x \leq 0) \\ -\frac{5}{2}x^2+15x+7 & (x > 0) \end{cases}$ 이므로

$$g(-2)+g(2)=5+27=32$$

185) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지므로 함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 극댓값을 갖고 $x=\beta$ 에서 극솟값을 갖는다고 하자.



(i) $\alpha < \beta \leq -2$ 인 경우

$x \geq -2$ 에서 함수 $g(x)$ 는 증가한다.

$$f(-2) < g(-2) < g(2)$$

$g(2) \neq f(-2)$ 이므로 모순

(ii) $\alpha < -2 < \beta$ 인 경우

방정식 $g(x)=f(-2)$ 의 실근이 열린구간 $(-\infty, \alpha)$ 에서 존재하므로 모순

(iii) $\alpha = -2$ 인 경우

방정식 $g(x)=f(-2)$ 의 실근이 2뿐이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

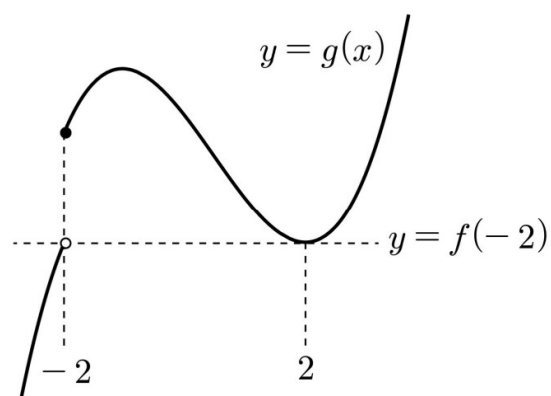
$$f'(x)=3(x+2)(x-2)$$

$$f(x)=x^3-12x+\frac{1}{2}$$

$g(2) \neq f(-2)$ 이므로 모순

(iv) $-2 < \alpha < \beta$ 인 경우

함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$g(2)=f(-2) \text{ 이므로 } f(2)+8=f(-2)$$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$ (a, b 는 상수)라 하자.

$$8+4a+2b+\frac{1}{2}+8=-8+4a-2b+\frac{1}{2}$$

$$b=-6, f(x)=x^3+ax^2-6x+\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax-6$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(2)=12+4a-6=0, a=-\frac{3}{2}$$

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\text{따라서 극댓값은 } f(-1)=4$$

186) [정답] 486

[해설]

실수 t 에 대하여 $f(t)>0$ 이면 $g(x)=f(x)+x$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 연속이고 미분가능하다. $f(t)<0$ 이면 $g(x)=2f(x)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 연속이고 미분가능하다. $f(t)=0$ 이면 아래와 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

- $x=t$ 의 좌우에서 $f(x)$ 의 부호가 서로 다른 경우

$$g(t)=f(t)+t=t$$

$$\lim_{x \rightarrow t-} g(x) = \lim_{x \rightarrow t-} \{f(x)+x\} = f(t)+t=t,$$

$$\lim_{x \rightarrow t+} g(x) = \lim_{x \rightarrow t+} 2f(x) = 2f(t)=0$$

또는

$$\lim_{x \rightarrow t-} g(x) = \lim_{x \rightarrow t-} 2f(x) = 2f(t)=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow t+} g(x) = \lim_{x \rightarrow t+} \{f(x)+x\} = f(t)+t=t \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $t=0$ 이면 $x=t$ 에서 연속이고 $t \neq 0$ 이면 $x=t$ 에서 불연속이다.

- $x=t$ 의 좌우에서 $f(x)$ 의 부호가 모두 양인 경우

$$g(t)=f(t)+t=t,$$

$$\lim_{x \rightarrow t} g(x) = \lim_{x \rightarrow t} \{f(x)+x\} = f(t)+t=t \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 연속이다.

- $x=t$ 의 좌우에서 $f(x)$ 의 부호가 모두 음인 경우

$$g(t)=f(t)+t=t,$$

$$\lim_{x \rightarrow t} g(x) = \lim_{x \rightarrow t} 2f(x) = 2f(t)=0 \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $t=0$ 이면 $x=t$ 에서 연속, $t \neq 0$ 이면 $x=t$ 에서 불연속이다.

$f(x)=0$ 을 만족시키는 실근의 개수가 1이면 함수 $g(x)$ 가 $x=t$ 에서 미분가능하지 않은 t 의 개수가 1 이하이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

$f(x)=0$ 을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 3이면 0이 아닌 서로 다른 실근의 개수가 2 이상이고 함수 $g(x)$ 가 $x=t$ 에서 불연속인 t 의 개수가 2 이상이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(x)=0$ 을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2이고 $a < b$ 인 두 실수 a, b 가 존재하여 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 또는 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$

(i) $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 인 경우

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(b+h)-g(b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(b+h-a)h^2+h}{h} = 1$$

$g'(b)=1$ 이며 함수 $g(x)$ 가 $x=t$ 에서 미분가능하지 않은 실수 t 의 개수가 1 이하이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$, $a \neq 0, b \neq 0$ 인 경우

함수 $g(x)$ 가 $x=a, x=b$ 에서 불연속이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$, $a=0, b \neq 0$ 인 경우

$x=a$ 에서 연속이며 $g(a)=f(a)+a=0$ 이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2(a+h-b)}{h} = 0$$

$g'(a)=0$ 이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(iv) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$, $a \neq 0, b=0$ 인 경우

함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이며 미분가능하지 않다.

$x=b$ 에서 연속이며 $g(b)=f(b)+b=0$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(b+h)-g(b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2h(h-a)^2}{h} = 2a^2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(b+h)-g(b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(h-a)^2h+h}{h} = a^2+1$$

$2a^2 \neq a^2+1, a^2 \neq 1$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x=b$ 에서 미분가능하지 않다.

(i)~(iv)에서 $f(x)=x(x-a)^2, a < 0, a^2 \neq 1$

$$f(-2) = -2(-2-a)^2 = -2 \text{ 에서 } a = -3$$

$$\text{따라서 } f(x)=x(x+3)^2 \text{ 이고 } f(6)=486$$

187) [정답] 29

[해설]

$$0 < x \leq 4 \text{ 에서 } g(x)=x(x-4)^2 \text{ 이고}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=4$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} g(x), \lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} x(x-4)^2$$

$$f(4)=0$$

함수 $g(x)$ 가 $x=4$ 에서 미분가능하므로

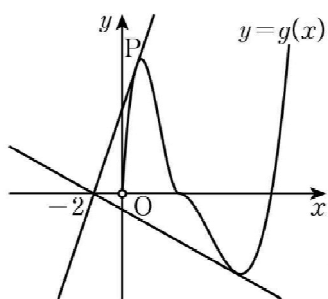
$$\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{g(x)-g(4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{g(x)-g(4)}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{x(x-4)^2}{x-4}$$

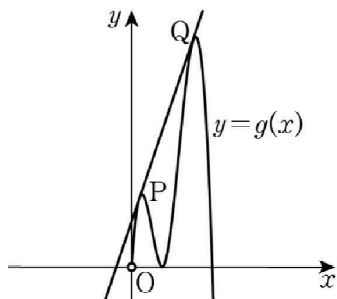
$$f'(4)=0$$

$$f(4)=f'(4)=0 \text{이고 } g\left(\frac{21}{2}\right)=f\left(\frac{21}{2}\right)=0 \text{이므로}$$

$$f(x)=a(x-4)^2(2x-21) \quad (a \neq 0) \text{이라 하자.}$$



[그림 1]



[그림 2]

$a > 0$ 이면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형이

[그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

$a < 0$ 이면 [그림 2]와 같이 조건 (나)를 만족시키는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형이 존재한다.

조건 (나)에 의하여 점 $(-2, 0)$ 에서 곡선 $y=g(x)$ 에 그은 기울기가 0이 아닌 접선은 곡선 $y=g(x)$

위의 두 점 P, Q에서 곡선 $y=g(x)$ 에 접한다.

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 t , s 라 하고

$$0 < t < 4, s > 4 \text{라 하자.}$$

$$0 < t < 4 \text{에서 } g'(t)=3t^2-16t+16 \text{이므로}$$

접선의 방정식은

$$y=(3t^2-16t+16)(x-t)+t^3-8t^2+16t$$

이다. 접선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$(3t^2-16t+16)(-2-t)+t^3-8t^2+16t=0$$

$$2t^3-2t^2-32t+32=0, (t-4)(t+4)(t-1)=0$$

$$0 < t < 4 \text{에서 } t=1 \text{이므로 접선의 방정식은 } y=3x+6 \text{이다.}$$

이 접선이 점 Q에서

곡선 $y=f(x)$ ($x > 4$)에 접한다.

$$f(x)=a(x-4)^2(2x-21) \text{에서}$$

$$f'(x)=2a(3x^2-37x+100)=2a(x-4)(3x-25)$$

점 Q에서의 접선의 방정식은

$$y=2a(s-4)(3s-25)(x-s)+a(s-4)^2(2s-21)$$

이 접선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0=2a(s-4)(3s-25)(-2-s)+a(s-4)^2(2s-21)$$

$$a \neq 0, s > 4 \text{이므로}$$

$$(s-4)(2s-21)=2(s+2)(3s-25)$$

$$4s^2-9s-184=0, (4s+23)(s-8)=0, s=8$$

$$f'(8)=3 \text{이므로 } a=-\frac{3}{8}$$

$$f(x)=-\frac{3}{8}(x-4)^2(2x-21) \text{이므로}$$

$$g(10)=f(10)=\frac{27}{2}$$

$$\text{따라서 } p=2, q=27 \text{이므로 } p+q=29$$

188) [정답] ⑤

[해설]

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$$

이때 $x \geq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면 $x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$$h'(x)=3x^2-2x-1$$

$$=(3x+1)(x-1)$$

이므로 $h'(x)=0$ 에서

$$x=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=1$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를

표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$	$6-a$	$\searrow$	$5-a$	$\nearrow$

즉, $x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $5-a$ 이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5-a \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 $a \leq 5$ 이므로 구하는 실수 a 의 최댓값은 5이다.

189) [정답] 483

[해설]

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f'(x) < 0$ 인 x 가 존재하므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 극점을 갖는 개형이다.

$$\text{또 } f'\left(-\frac{1}{4}\right) < 0, f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \text{이므로 } f'(0) < 0 \text{이다.}$$

(i) $f(0) > 0$ 일 때

$$\text{문제 조건에서 } f(-2) \geq 0$$

$$f(-2) \neq 0 \text{이면 } f(-2) > 0 \text{이므로 } f(-4) \geq 0$$

$$f(-4) \neq 0 \text{이면 } f(-4) > 0 \text{이므로 } f(-6) \geq 0$$

⋮

$$\text{등과 같이 계속되는데 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{이므로 모든}$$

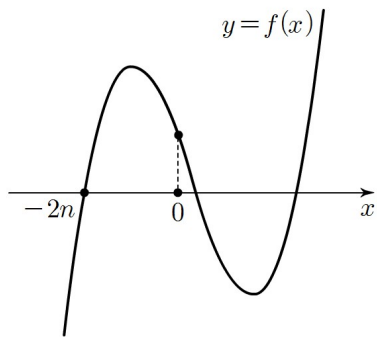
자연수 n 에 대하여 $f(-2n) > 0$ 일 수는 없다. 따라서

$f(-2n) = 0$ 인 자연수 n 이 존재한다.

$f'(0) < 0$ 이고 $f(-2n) = 0 < f(0)$ 이므로 $f'(2n) > 0$ 이어야 한다. 삼차함수의 증감과 개형을 생각해 보면 $x = -2n$ 이

$x < 0$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 가 x 축과 만나는 유일한

점임을 알 수 있다.



그러나 이때 $f(-2n-1) < 0 < f(-2n+1)$ 이므로 문제의 가정에 모순되므로 $f(0) > 0$ 는 참이 아니다.

(ii) $f(0) < 0$ 일 때

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 (i)과 같은 방법으로 $f(2n) = 0$ 인

자연수 n 이 존재함을 보일 수 있고, 같은 방법으로 모순을 이끌어 낼 수 있다.

(i), (ii)로부터 $f(0) = 0$ 이다.

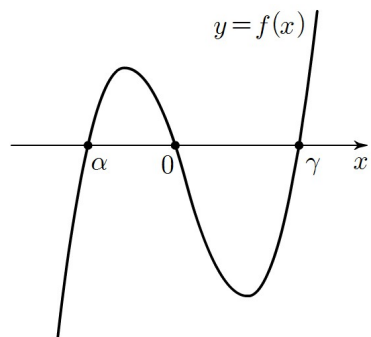
구간 $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 감소하므로

$f(\frac{1}{4}) < 0 < f(-\frac{1}{4})$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 사잇값 정리에

의해서 함수 $f(x)$ 는 x 축과 $x < 0$ 인 구간과 $x > 0$ 인 구간에서 각각 한 번씩 만난다.

따라서 $f(x) = x(x-\alpha)(x-\gamma)$ ($\alpha < 0 < \gamma$)로 놓을 수 있다.



$\alpha < -1$ 이면 α 보다 큰 정수들 중에서 가장 작은 정수 m_1 이

존재하여 $m_1 - 1 \leq \alpha < m_1 \leq -1$ 을 만족한다. 이때

$f(m_1 - 2) < 0 < f(m_1)$ 이 되므로 모순이다.

만일 $\gamma > 1$ 이면 γ 보다 작은 정수들 중에서 가장 큰 정수

m_2 가 존재하여 $1 \leq m_2 < \gamma \leq m_2 + 1$ 을 만족한다. 이때

$f(m_2) < 0 < f(m_2 + 2)$ 가 되므로 역시 모순이다.

$$\therefore -1 \leq \alpha < 0 < \gamma \leq 1$$

$-1 < \alpha < 0 < \gamma < 1$ 이면 $f(-1) < 0 < f(1)$ 이 되어 모순이므로

$$\alpha = -1 \text{ 또는 } \gamma = 1$$

(1) $\alpha = -1$ 일 때

$$f(x) = x(x+1)(x-\gamma) = x^3 + (1-\gamma)x^2 - \gamma x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2(1-\gamma)x - \gamma$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} - \frac{1}{2}(1-\gamma) - \gamma = -\frac{5}{16} - \frac{1}{2}\gamma = -\frac{1}{4}$$

$$\gamma = -\frac{1}{8}$$

$\gamma > 0$ 이어야 하므로 조건을 만족하지 않는다.

(2) $\gamma = 1$ 일 때

$$f(x) = x(x-\alpha)(x-1) = x^3 - (\alpha+1)x^2 + \alpha x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(1+\alpha)x + \alpha$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} + \frac{1}{2}(1+\alpha) + \alpha = \frac{11}{16} + \frac{3}{2}\alpha = -\frac{1}{4}$$

$$\alpha = -\frac{5}{8}$$

따라서 $f(x) = x(x-1)\left(x + \frac{5}{8}\right)$ 이므로

$$f(8) = 8 \times 7 \times \frac{69}{8} = 483$$

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f'(x) < 0$ 인 x 가 존재하므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 극점을 갖는 개형이다.

방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 $x = \alpha$ 하나뿐이면

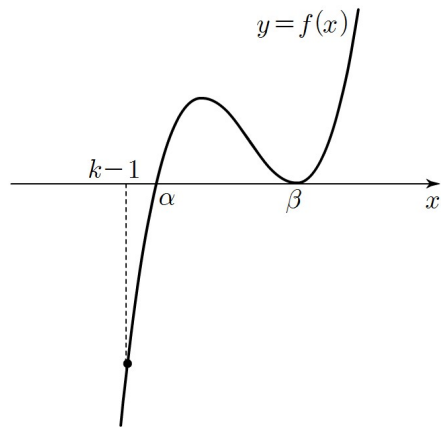
$k-1 < \alpha < k+1$ 인 정수 k 가 존재하고

$f(k-1) < 0 < f(k+1)$ 이므로 문제의 가정에 모순된다.

방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 $x = \alpha$, $x = \beta$ ($\alpha < \beta$) 두 개뿐이라

하고 $x = \beta$ 가 중근이라 하자. 또 α 보다 작은 정수 중에서

가장 큰 정수를 $k-1$ 이라 하자. 그러면 $f(k-1) < 0$ 이다.



$f(k-1)f(k+1) < 0$ 을 만족시키는 정수 k 가 존재하지 않기

위해서는 $\beta = k+1$, $\alpha = k$ 이어야 한다. (그렇지 않으면

$f(k)f(k+2) < 0$ 이 된다.)

이때 $f'\left(-\frac{1}{4}\right) < 0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ 이므로 $f'(0) < 0$ 이고 따라서

$k < 0 < k+1$ 이다.

k 는 정수이므로 이것은 불가능하다.

$x = \alpha$ 가 중근인 경우도 같은 방법으로 모순임을 보일 수

있다. 그러므로 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근을

가져야 한다. 이제 세 실근을 α , β , γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 하자.

(i) α 가 정수일 때

$\alpha-1$, $\alpha+1$ 은 모두 정수이고 $f(\alpha-1) < 0$ 이므로

$f(\alpha+1) \leq 0$ 이어야 한다.

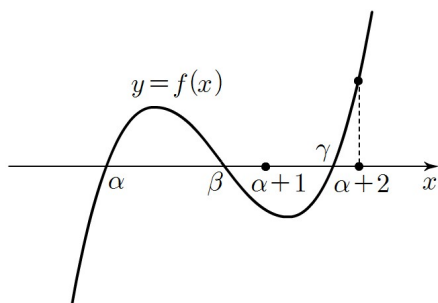
$$\therefore \beta \leq \alpha+1 \leq \gamma$$

$\gamma \geq \alpha + 2$ 이면 γ 보다 작은 정수들 중에서 가장 큰 정수 m 에 대하여 $\alpha + 1 \leq m < \gamma$ 이고
 $f(m) < 0 < f(m+2)$ 이므로 문제의 가정을 만족하지 않는다.

$$\therefore \gamma < \alpha + 2$$

$\beta < \alpha + 1 < \gamma$ 이면 $f(\alpha + 1) < 0 < f(\alpha + 2)$ 이므로 마찬가지로 모순이다.

$$\therefore \beta = \alpha + 1 \text{ 또는 } \gamma = \alpha + 1$$



$\gamma = \alpha + 1$ 이면 $f'(0) < 0$ 이므로 $\alpha < 0 < \gamma = \alpha + 1$ 이 되어 불가능하다. 따라서 $\beta = \alpha + 1$ 이고 $f'(0) < 0$ 으로부터 $\beta = \alpha + 1 = 0$ 이다. 즉 $f(x) = x(x+1)(x-\gamma)$

$$f(x) = x(x+1)(x-\gamma) = x^3 + (1-\gamma)x^2 - \gamma x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2(1-\gamma)x - \gamma$$

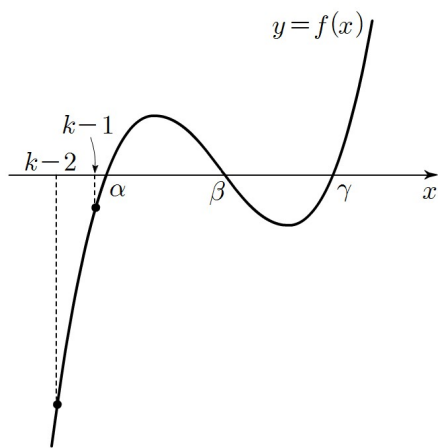
$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} - \frac{1}{2}(1-\gamma) - \gamma = -\frac{5}{16} - \frac{1}{2}\gamma = -\frac{1}{4}$$

$$\gamma = -\frac{1}{8}$$

$\gamma > 0$ 이어야 하므로 모순이다.

(ii) α 가 정수가 아닐 때

α 보다 작은 정수 중에서 가장 큰 정수를 $k-1$ 이라 하자. 그러면 $f(k-1) < 0$ 이다.



문제의 가정에 의해 $\beta \leq k+1 \leq \gamma$ 이어야 한다.

$f(k-2) < 0$ 이므로 $\beta \leq k \leq \gamma$ 이어야 한다.

γ 가 정수가 아니면 $k+1 \leq n-1 < \gamma < n+1$ 인 정수 n 이 존재한다. $f(n-1) < 0 < f(n+1)$ 이므로 이것은 가정에 모순된다. 따라서 γ 는 정수이다.

$\gamma > k+1$ 이면 $\beta \leq k < \gamma-1$ 에서

$f(\gamma-1) < 0 < f(\gamma+1)$ 이므로 모순이다.

$$\therefore \gamma = k+1$$

$\beta \neq k$ 이면 $f(k) < 0 < f(k+2)$ 이므로 가정에 모순된다.

$$\therefore \beta = k$$

$f'(k-1) > 0, f'(k+1) > 0, f'(0) < 0$ 이므로

$$\therefore \beta = k = 0$$

$$\therefore f(x) = x(x-1)(x-\alpha) = x^3 - (1+\alpha)x^2 + \alpha x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(1+\alpha)x + \alpha \text{에서}$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} + \frac{1}{2}(1+\alpha) + \alpha = \frac{11}{16} + \frac{3}{2}\alpha = -\frac{1}{4}$$

$$\alpha = -\frac{5}{8}$$

이상에서 $f(x) = x(x-1)\left(x + \frac{5}{8}\right)$ 이므로

$$f(8) = 8 \times 7 \times \frac{69}{8} = 483$$

190) [정답] 31

[해설]

$$\text{부등식 } 2k-8 \leq \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \leq 4k^2+14k \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

에서 $2k-8 = 4k^2+14k$ 를 만족하는 k 의 값을 구하면

$$4k^2+12k+8=0, \quad (k+1)(k+2)=0$$

$$k = -2 \text{ 또는 } k = -1$$

k 의 값을 부등식 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$k = -2 \text{ 일 때, } -12 \leq \frac{f(0)-f(-2)}{2} \leq -12$$

$$\therefore f(0)-f(-2) = -24 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$k = -1 \text{ 일 때, } -10 \leq \frac{f(1)-f(-1)}{2} \leq -10$$

$$\therefore f(1)-f(-1) = -20 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수})$$

라 하자. $\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 에서

$$f(0)-f(-2) = -4a+2b+8 \text{이므로 } -4a+2b+8 = -24$$

$$f(1)-f(-1) = 2+2b \text{이므로 } 2+2b = -20$$

$$\text{위 두 식을 연립하면 } a = \frac{5}{2}, b = -11$$

$$f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 11x + c \text{이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 5x - 11$$

$$\therefore f'(3) = 3 \times 3^2 + 5 \times 3 - 11 = 31$$

191) [정답] ③

[해설]

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 v_1, v_2 라 하면

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 3t^2 + 3, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 6$$

$v_1 = 5v_2$ 에서 $3t^2 + 3 = 30, \quad t = 3 \quad (\because t > 0)$

점 P 의 시각 t 에서의 가속도를 a_1 이라 하면

$$a_1 = \frac{v_1}{dt} = 6t$$

따라서 $t = 3$ 에서 점 P 의 가속도는 18이다.

192) [정답] ①

[해설]

점 P 의 시각 $t \ (t \geq 0)$ 에서의 속도를 v 라 하면

$$v = 3kt^2 - 12t + 1$$

시각 $t = k$ 에서 점 P 의 속도가 1 이므로

$$3k^3 - 12k + 1 = 1 \text{ 에서}$$

$$3k^3 - 12k = 0, \quad 3k(k+2)(k-2) = 0$$

$$k > 0 \text{ 이므로 } k = 2$$

점 P 의 시각 $t \ (t \geq 0)$ 에서의 가속도를 a 라 하면

$$a = 6kt - 12$$

따라서 시각 $t = 2k$ 에서 점 P 의 가속도는

$$12k^2 - 12 = 12 \times 4 - 12 = 36$$

193) [정답] ③

[해설]

시각 $t \ (t \geq 0)$ 에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|x_1 - x_2| = \left| t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10 \right|$$

$$f(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10 \quad (t \geq 0) \text{ 이라 하면}$$

$$f'(t) = 3t^2 - 15t + 12 = 3(t-1)(t-4)$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	4	...
$f'(t)$		+	0	-	0	+
$f(t)$	10	↗	극대	↘	극소	↗

$t \geq 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 최솟값이 $f(4) = 2$ 이므로 $f(t) > 0$

$$|x_1 - x_2| = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10 \text{ 이고}$$

두 점 P, Q 사이의 거리는 $t = 4$ 에서 최소이다.

시각 $t \ (t \geq 0)$ 에서의 점 P 의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$,

$a(t)$ 라 하면

$$v(t) = \frac{dx_1}{dt} = 3t^2 - 10t + 10$$

$$a(t) = v'(t) = 6t - 10$$

따라서 $t = 4$ 에서의 점 P 의 가속도는

$$a(4) = 6 \times 4 - 10 = 14$$

194) [정답] 114

[해설]

함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 값을 $\alpha_1, \alpha_2,$

$\alpha_3 \ (\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3)$ 이라 하자.

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	...	α_1	...	α_2	...	α_3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $|g(x)| = f(x)$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이고, 임의의 실수

k 에 대하여

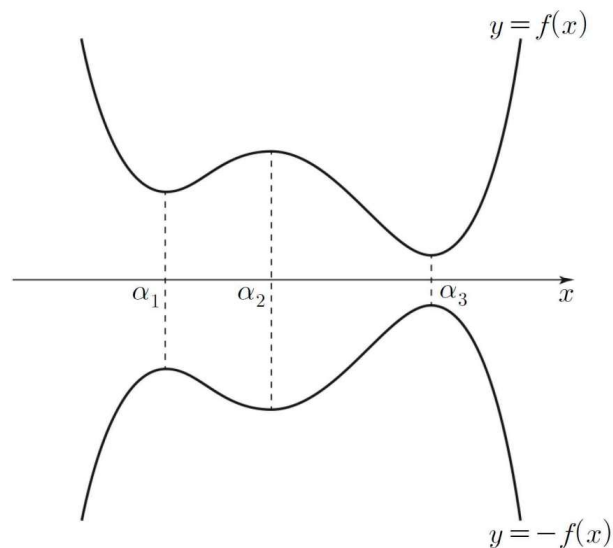
$$g(k) = f(k) \text{ 또는 } g(k) = -f(k) \text{ 이다.}$$

또한

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(k+t) - g(k)}{t} = |f'(k)| \text{ 이고 } \lim_{t \rightarrow 0+} t = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \{g(k+t) - g(k)\} = 0,$$

$$g(k) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(k+t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



실수 k 에 대하여

(i) $k < \alpha_1$ 또는 $\alpha_2 \leq k < \alpha_3$ 일 때

① $k < \alpha_1$ 또는 $\alpha_2 < k < \alpha_3$ 일 때

$g(k) = f(k)$ 이면 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(k+t) - g(k)}{t} = f'(k) < 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(k+t) - g(k)}{t} = |f'(k)| \text{ 를 만족시키지 않는다.}$$

그러므로 $g(k) = -f(k)$

② $k = \alpha_2$ 일 때

①와 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$g(\alpha_2) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(\alpha_2 + t) = -f(\alpha_2)$$

(ii) $\alpha_1 \leq k < \alpha_2$ 또는 $k \geq \alpha_3$ 일 때

① $\alpha_1 < k < \alpha_2$ 또는 $k > \alpha_3$ 일 때

$g(k) = -f(k)$ 이면 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(k+t)-g(k)}{t} = -f'(k) < 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(k+t)-g(k)}{t} = |f'(k)| \text{를 만족시키지 않는다.}$$

그러므로 $g(k)=f(k)$

㉑ $k=\alpha_1$ 또는 $k=\alpha_3$ 일 때

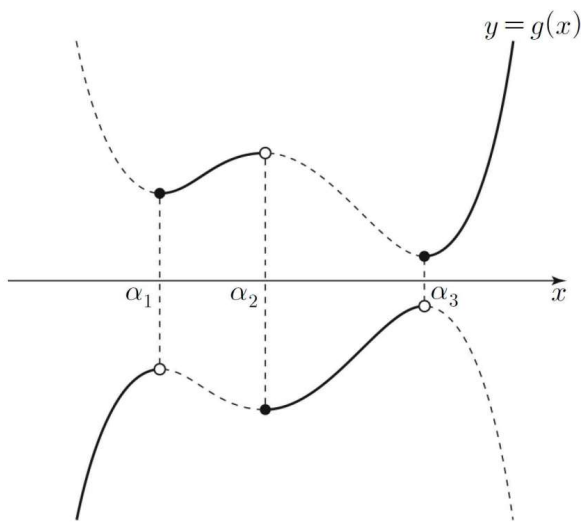
㉑와 ㉒에 의하여

$$g(\alpha_1) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(\alpha_1+t) = f(\alpha_1)$$

$$g(\alpha_3) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(\alpha_3+t) = f(\alpha_3)$$

그러므로

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & (x < \alpha_1 \text{ 또는 } \alpha_2 \leq x < \alpha_3) \\ f(x) & (\alpha_1 \leq x < \alpha_2 \text{ 또는 } x \geq \alpha_3) \end{cases}$$



함수 $g(x)$ 가 $x=k$ 에서 불연속이면 $f'(k)=0$ 이고 $f(k) \neq 0$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(\alpha_1)$ 또는 $f(\alpha_3)$ 이고

$f(\alpha_1) \neq f(\alpha_3)$ 이므로

함수 $g(x)$ 가 $x=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 개수는 $f(\alpha_1) > 0$ 이고 $f(\alpha_3) > 0$ 이면 3, $f(\alpha_1)=0$ 또는 $f(\alpha_3)=0$ 이면 2이다. 함수 $g(x)$ 가 $x=k$ 에서 불연속이라 하자.

조건 (나)에 의하여 함수 $g(x)h(x)$ 는 $x=k$ 에서 연속이므로

$$g(k)h(k) = \lim_{x \rightarrow k+} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow k-} g(x)h(x)$$

그러므로

$$h(k) = \lim_{x \rightarrow k+} h(x) = \lim_{x \rightarrow k-} h(x) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

또는

$$h(k) \neq 0 \text{이고 } h(k) = \lim_{x \rightarrow k+} h(x) = - \lim_{x \rightarrow k-} h(x) \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑을 만족시키는 실수 k 의 값은

$$a \leq -\frac{3}{9} \text{이면 } -\frac{3}{9} \text{ 이고}$$

$$-\frac{3}{2} < a \leq -\frac{1}{2} \text{이면 존재하지 않으며 } a > -\frac{1}{2} \text{ 이면}$$

$$-\frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

실수 k 가 ㉒을 만족시키면 함수 $h(x)$ 는 $x=k$ 에서

불연속이므로 $k=a$ 이고

$$4k+2 = -(-2k-3) \text{에서 } k=a=\frac{1}{2}$$

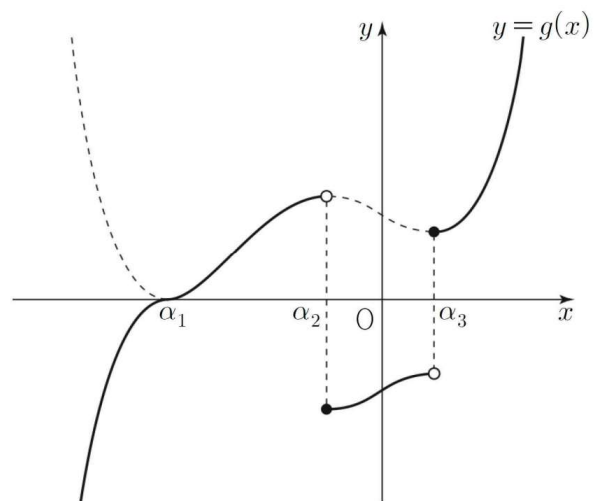
그러므로 ㉑ 또는 ㉒을 만족시키는 실수 k 의 개수는 실수 a 의 값에 따라서 최대 2이다.

$$\text{그러므로 } a=\frac{1}{2} \text{ 이고}$$

$$f(\alpha_1)=0 \text{ 또는 } f(\alpha_3)=0 \text{이며}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ 에서만 불연속이다.

(i) $f(\alpha_1)=0$ 일 때

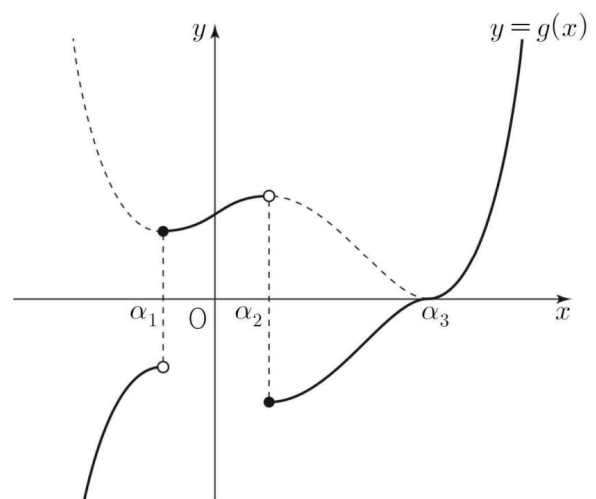


함수 $g(x)$ 가 $x=\alpha_2$, $x=\alpha_3$ 에서 불연속이므로

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{2}$$

$$g(0) < 0 \text{ 이므로 } g(0) = \frac{40}{3} \text{ 을 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $f(\alpha_3)=0$ 일 때



함수 $g(x)$ 가 $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$ 에서 불연속이므로

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 16\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - \alpha_3)$$

$$= 16x^3 - 16\alpha_3x^2 - 4x + 4\alpha_3$$

에서

$$f(x) = \int (16x^3 - 16\alpha_3 x^2 - 4x + 4\alpha_3) dx$$

$$= 4x^4 - \frac{16}{3}\alpha_3 x^3 - 2x^2 + 4\alpha_3 x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(0) = g(0) = \frac{40}{3} \text{이므로 } C = \frac{40}{3}$$

$$f(\alpha_3) = -\frac{4}{3}\alpha_3^4 + 2\alpha_3^2 + \frac{40}{3} = 0$$

$$2\alpha_3^4 - 3\alpha_3^2 - 20 = 0$$

$$(\alpha_3 + 2)(\alpha_3 - 2)(2\alpha_3^2 + 5) = 0$$

$$\alpha_3 > \frac{1}{2} \text{이므로 } \alpha_3 = 2$$

그러므로

$$f(x) = 4x^4 - \frac{32}{3}x^3 - 2x^2 + 8x + \frac{40}{3},$$

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & \left(x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \frac{1}{2} \leq x < 2\right) \\ f(x) & \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 2\right) \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 4x + 2 & \left(x < \frac{1}{2}\right) \\ -2x - 3 & \left(x \geq \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{따라서 } g(1) \times h(3) = \left(-\frac{38}{3}\right) \times (-9) = 114$$

195) [정답] ②

[해설]

다항함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = x^2 - kx + k - 1 \geq 0$ 이다.

이차방정식 $x^2 - kx + k - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-k)^2 - 4 \times 1 \times (k - 1)$$

$$= k^2 - 4k + 4$$

$$= (k - 2)^2 \leq 0$$

이므로 $k = 2$

$$f(x) = \int (x^2 - 2x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(0) = 2 \text{에서 } C = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2 \text{이므로 } f(3) = 5$$

196) [정답] 32

[해설]

$$\int_0^x \{f(t) + t^2\} dt = xf(x) - x^3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + x^2 = f(x) + xf'(x) - 3x^2$$

$$xf'(x) = 4x^2$$

다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 도 다항함수이므로

$$f'(x) = 4x$$

$$\text{따라서 } \int_0^4 f'(x) dx = \int_0^4 4x dx = \left[2x^2 \right]_0^4 = 32$$

197) [정답] ①

[해설]

$$f(1+x) + f(1-x) = 0 \text{에 } x=0 \text{을 대입하면 } f(1) = 0$$

$$f(x) = (x-1)(x^2 + ax + b) \quad (\text{단, } a, b \text{는 상수})$$

조건 (나)에서

$$\int_{-1}^3 f'(x) dx = f(3) - f(-1) = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(1+x) + f(1-x) = 0 \text{에 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$f(3) + f(-1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 식 ①, ②을 연립하면

$$f(3) = 6, f(-1) = -6$$

$$f(3) = 2(9 + 3a + b) = 6, 3a + b = -6 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$f(-1) = -2(1 - a + b) = -6, a - b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\text{두 식 } \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{을 연립하면 } a = -2, b = 0, f(x) = x(x-1)(x-2)$$

$$\text{따라서 } f(4) = 24$$

198) [정답] 66

[해설]

$$g(0) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x-p) - f(-p)}{x} = f'(-p)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x+p) - f(p)}{x} = f'(p)$$

$$g'(0) = 0 \text{이므로 } f'(-p) = f'(p) = 0$$

$f'(x)$ 는 이차항의 계수가 3인 이차식이므로

$$f'(x) = 3(x+p)(x-p) = 3x^2 - 3p^2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 3p^2x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$f(0) = 1 \text{이므로 } f(x) = x^3 - 3p^2x + 1$$

$$x \geq 0 \text{에서 } g(x) = f(x+p) - f(p) \text{이므로}$$

$$\int_0^p g(x) dx = \int_0^p \{f(x+p) - f(p)\} dx$$

$$= \int_0^p (x^3 + 3px^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + px^3 \right]_0^p = \frac{5}{4}p^4 = 20$$

$$p > 0 \text{이므로 } p = 2 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 12x + 1 \text{이므로 } f(5) = 66$$

199) [정답] 28

[해설]

$$f'(x) = -2x + k$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $A(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식

$y = g(x)$ 는

$$\begin{aligned} g(x) &= (-2a + k)(x - a) - a^2 + ka \\ &= (-2a + k)x + a^2 \end{aligned}$$

$$0 = (-2a + k)x + a^2 \text{에서 } x = \frac{a^2}{2a - k} = b$$

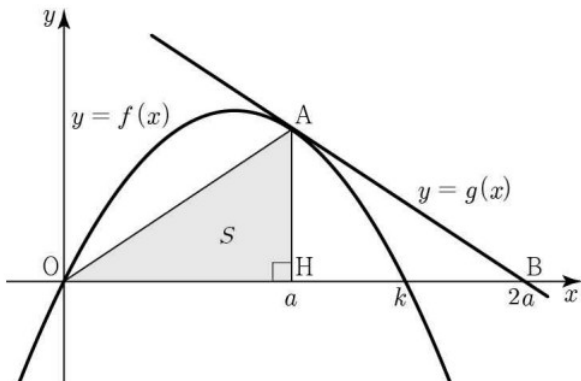
직선 $y = g(x)$ 가 x 축과 만나는 점을 B라 하자.

$\int_a^b g(x)dx = S$ 이므로 삼각형 BAH의 넓이와

삼각형 AOH의 넓이는 서로 같다.

점 H의 좌표는 $(a, 0)$ 이고 $\overline{OH} = \overline{BH}$ 이므로

$$b = 2a$$



$$\frac{a^2}{2a - k} = 2a \text{에서 } k = \frac{3}{2}a$$

$$\int_0^a \left\{ f(x) - \frac{1}{2}ax \right\} dx$$

$$= \int_0^a \left(-x^2 + \frac{3}{2}ax - \frac{1}{2}ax \right) dx$$

$$= \int_0^a (-x^2 + ax) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^a$$

$$= \frac{a^3}{6} = \frac{32}{3}$$

$$a = 4, k = 6$$

$$g(x) = -2x + 16$$

$$\text{따라서 } g(-k) = g(-6) = 12 + 16 = 28$$

200) [정답] ②

[해설]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 상수 k ($k \geq 0$)에 대하여

$$g(x) = \begin{cases} 2x - k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

일 때 조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하므로 $x = k$ 에서 연속이고 미분가능하다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow k-} (2x - k) = \lim_{x \rightarrow k+} f(x) = k \text{에서 } f(k) = k$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2(k+h) - k - k}{h} = 2 \text{이므로 } \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(k+h) - f(k)}{h} = 2 \text{에서}$$

$$f'(k) = 2$$

즉 $f(x) = (x - k)^3 + a(x - k)^2 + 2(x - k) + k$ (a, b 는 상수)라 할 수 있다. ㉠

$h(t) = |t(t - 1)| + t(t - 1)$ 라 하면

$$h(t) = \begin{cases} 2t(t - 1) & (t < 0 \text{ 또는 } t > 1) \\ 0 & (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

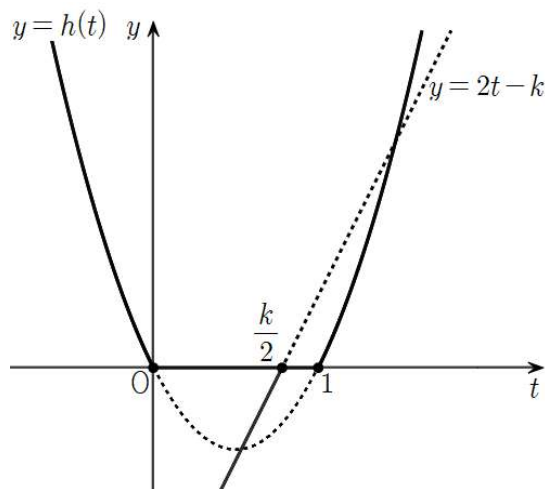
조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $\int_0^x g(t)h(t)dt \geq 0$ 을

만족시키려면 $t < 0$ 또는 $t > 1$ 에서 $h(t) > 0$ 이므로

$t < 0$ 에서 $g(t) < 0$, $t > 1$ 에서 $g(t) \geq 0$ 이 성립해야 한다.

$$\text{즉 } 2t - k = 0 \text{에서 } t = \frac{k}{2} \text{이므로}$$

$$0 \leq \frac{k}{2} \leq 1, \quad 0 \leq k \leq 2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$



$s(t) = |(t - 1)(t + 2)| - (t - 1)(t + 2)$ 라 하면

$$s(t) = \begin{cases} 0 & (t < -2 \text{ 또는 } t > 1) \\ -2(t + 2)(t - 1) & (-2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

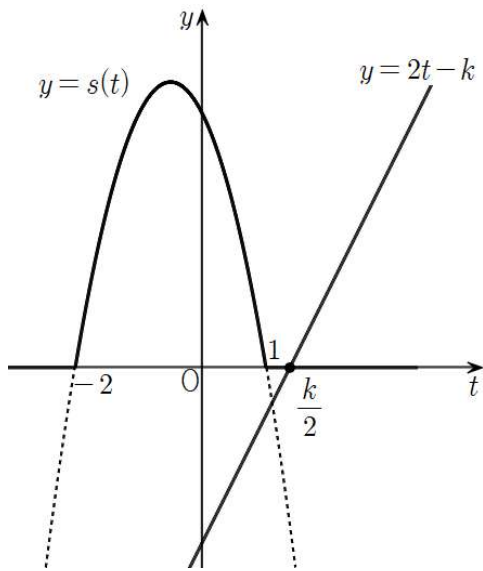
조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여 $\int_3^x g(t)s(t)dt \geq 0$ 을

만족시키려면 $-2 \leq t \leq 1$ 에서 $s(t) \geq 0$ 이므로

$-2 \leq t \leq 1$ 에서 $g(t) \leq 0$ 이 성립해야 한다.

$$\text{즉 } 2t - k = 0 \text{에서 } t = \frac{k}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{k}{2} \geq 1, \quad k \geq 2 \quad \dots\dots \text{㉢}$$



즉 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 실수 k 의 값이 2이므로 ㉢에서

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^3 + a(x-2)^2 + 2(x-2) + 2, \\ f'(x) &= 3(x-2)^2 + 2a(x-2) + 2 \\ &= 3x^2 + 2(a-6)x - 4a + 14 \\ &= 3\left(x - \frac{6-a}{3}\right)^2 + 14 - 4a - \frac{(6-a)^2}{3} \end{aligned}$$

이때 $x \geq 2$ 일 때 $f'(x) \geq 0$ 을 만족시켜야 하므로

(i) $\frac{6-a}{3} < 2$, 즉 $a > 0$ 일 때

함수 $f'(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 2를 가지고 $2 > 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\frac{6-a}{3} \geq 2$, 즉 $a \leq 0$ 일 때

함수 $f'(x)$ 는 $x = \frac{6-a}{3}$ 에서 최솟값

$14 - 4a - \frac{(6-a)^2}{3}$ 을 가지므로

$$14 - 4a - \frac{(6-a)^2}{3} \geq 0, \quad 6 - a^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\text{즉 } (a + \sqrt{6})(a - \sqrt{6}) \leq 0 \text{에서} \\ &-\sqrt{6} \leq a \leq 0 \end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여 $a \geq -\sqrt{6}$ ㉠

$$g(x) = \begin{cases} 2x-2 & (x \leq 2) \\ (x-2)^3 + a(x-2)^2 + 2x-2 & (x > 2) \end{cases}$$

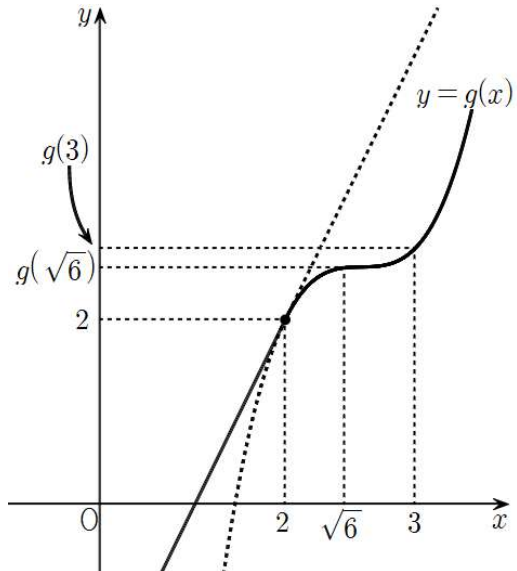
즉 $g(3) = a+5$ 이므로 ㉡에 의하여

$$g(3) \geq 5 - \sqrt{6}$$

따라서 $g(3)$ 의 최솟값은 $5 - \sqrt{6}$ 이다.

[참고]

$g(3)$ 의 값이 최소일 때, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



201) [정답] ㉡

[해설]

$$\int_{-3}^3 (x+1)f(x) dx = 36 + \int_{-3}^3 f(x) dx \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 (x+1)f(x) dx &= \int_{-3}^3 \{xf(x) + f(x)\} dx \\ &= \int_{-3}^3 xf(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 xf(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx &= 36 + \int_{-3}^3 f(x) dx \\ \therefore \int_{-3}^3 xf(x) dx &= 36 \end{aligned}$$

이때 $f(x) = x^2 + ax$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 xf(x) dx &= \int_{-3}^3 (x^3 + ax^2) dx \\ &= 2 \int_0^3 ax^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} ax^3 \right]_0^3 \\ &= 18a \end{aligned}$$

$18a = 36$ 이므로 $a = 2$

202) [정답] ㉣

[해설]

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = f(4)$$

$4 \leq x < 8$ 에서의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $0 \leq x < 4$ 에서의

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의

방향으로 16만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.

모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+4)=f(x)+16 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x+4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+16\} = 0+16 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4-} (x^3+ax^2+bx) \\ &= 64+16a+4b \end{aligned}$$

$$f(4)=f(0)+16=16$$

$$16=64+16a+4b$$

$$b=-4a-12$$

함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x+4)-f(4)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\{f(x)+16\}-16}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3+ax^2+bx}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2+ax+b) = b = -4a-12$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{(x^3+ax^2+bx)-16}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{x^3+ax^2+(-4a-12)x-16}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{ax(x-4)+(x-4)(x^2+4x+4)}{x-4}$$

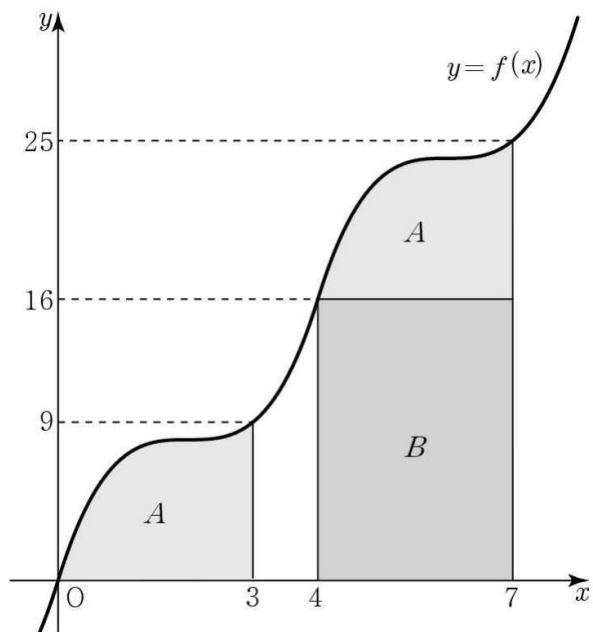
$$= \lim_{x \rightarrow 4-} \{x^2+(a+4)x+4\} = 4a+36$$

$$-4a-12=4a+36$$

$$a=-6, b=12$$

$$f(x)=x^3-6x^2+12x \quad (0 \leq x < 4)$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , 직선 $y=16$ 과 x 축 및 두 직선 $x=4$, $x=7$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하면

$$A = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^3-6x^2+12x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 \right]_0^3 = \frac{81}{4}$$

$$B = 3 \times 16 = 48$$

$$\text{따라서 } \int_4^7 f(x)dx = A+B = \frac{81}{4} + 48 = \frac{273}{4}$$

203) [정답] ①

[해설]

조건 (가)에서 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$x\{f(x)+g(x)\} = 12x^3 + 24x^2 - 6x$$

$$f(x)+g(x) = 12x^2 + 24x - 6$$

조건 (나)에서 $f(x)=xg'(x)$ 이므로

$$xg'(x)+g(x) = 12x^2 + 24x - 6$$

이때 $xg'(x)+g(x) = \{xg(x)\}'$ 이므로 위 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$xg(x) = 4x^3 + 12x^2 - 6x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $C=0$

$$xg(x) = 4x^3 + 12x^2 - 6x \text{ 에서 } g(x) = 4x^2 + 12x - 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^3 (4x^2 + 12x - 6)dx &= \left[\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 6x \right]_0^3 \\ &= 72 \end{aligned}$$

204) [정답] ④

[해설]

$xf(x)=ax^3+2x-3+\int_0^1 f'(t)dt$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 \times f(0) = -3 + \int_0^1 f'(t)dt \text{에서 } \int_0^1 f'(t)dt = 3$$

$$xf(x)=ax^3+2x, f(x)=ax^2+2$$

$$\int_0^1 f'(t)dt = f(1)-f(0)=a=3$$

$$\text{그러므로 } f(x)=3x^2+2$$

$$\text{따라서 } \int_0^2 f(x)dx = \left[x^3 + 2x \right]_0^2 = 12$$

205) [정답] ⑤

[해설]

$$G(x) = \int_1^x (x-t)f(t)dt \text{라 하자.}$$

함수 $G(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_1^x (x-t)f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x)}{x-2} = 3 \text{에서}$$

$$G(2)=0, G'(2)=3$$

$$G(x) = x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt \text{에서}$$

$$G'(x) = \int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_1^x f(t)dt$$

$$G'(2) = \int_1^2 f(t)dt = 3$$

$$G(2) = 2 \int_1^2 f(t)dt - \int_1^2 tf(t)dt = 0 \text{에서}$$

$$\int_1^2 tf(t)dt = 2 \int_1^2 f(t)dt = 6$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_1^2 (4x+1)f(x)dx &= 4 \int_1^2 xf(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\ &= 4 \times 6 + 3 = 27 \end{aligned}$$

206) [정답] ⑤

[해설]

$$g(x) = \int_{-4}^x f(t)dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$g'(x) = f(x) \text{이므로}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x + a & (x < 0) \\ 3x + a & (x \geq 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$g'(2) = 6 + a = 0 \text{에서 } a = -6 \text{이다.}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x+2)(x-1) & (x < 0) \\ 3(x-2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-2	$\dots$	2	$\dots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $g(x)$ 의 극댓값은

$$g(-2) = \int_{-4}^{-2} (3t^2 + 3t - 6)dt = \left[t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6t \right]_{-4}^{-2} = 26$$

207) [정답] 13

[해설]

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이면

$$g(x) = \int_x^{x+1} |f(t)|dt$$

$$= \int_x^{x+1} f(t)dt$$

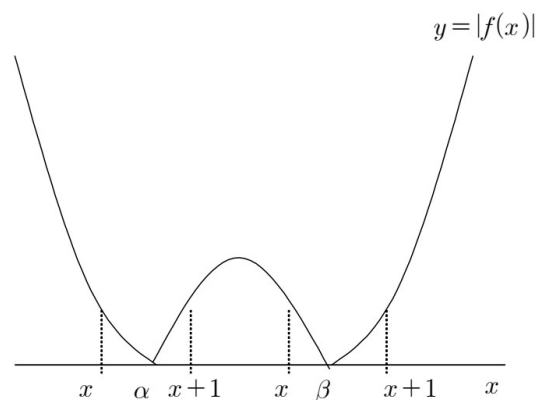
이므로 $g(x)$ 는 이차함수이고 이때 $g(x)$ 가 극소인 x 의 값은 1개뿐이다.

따라서 조건을 만족시키지 못한다.

$$f(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta) (\alpha < \beta) \text{라 하면}$$

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같고

$$x=1, x=4 \text{에서 함수 } g(x) \text{가 극소이므로 } g'(1)=0, g'(4)=0 \text{이다.}$$



(i) $x < \alpha < x+1$ 일 때

$$g(x)$$

$$= \int_x^{x+1} |f(t)|dt$$

$$= \int_x^{\alpha} f(t)dt + \int_{\alpha}^{x+1} \{-f(t)\}dt$$

$$= - \int_{\alpha}^x f(t)dt - \int_{\alpha}^{x+1} f(t)dt$$

$$= - \int_{\alpha}^x 2(t-\alpha)(t-\beta)dt - \int_{\alpha}^{x+1} 2(t-\alpha)(t-\beta)dt$$

$$= - \int_{\alpha}^x 2(t-\alpha)(t-\beta)dt - \int_{\alpha-1}^x 2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$$

이므로

$$g'(x) = -2(x-\alpha)(x-\beta) - 2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$$

$$g'(1) = -2(1-\alpha)(1-\beta) - 2(2-\alpha)(2-\beta)$$

$$=-6\alpha+6\beta-4\alpha\beta-10=0$$

$$3\alpha+3\beta-2\alpha\beta-5=0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

(ii) $x < \beta < x+1$ 일 때

$$g(x)$$

$$= \int_x^{x+1} |f(t)| dt$$

$$= \int_x^\beta \{-f(t)\} dt + \int_\beta^{x+1} f(t) dt$$

$$= \int_\beta^x f(t) dt + \int_\beta^{x+1} f(t) dt$$

$$= \int_\beta^x 2(t-\alpha)(t-\beta) dt + \int_\beta^{x+1} 2(t-\alpha)(t-\beta) dt$$

$$= \int_\beta^x 2(t-\alpha)(t-\beta) dt + \int_{\beta-1}^x 2(t+1-\alpha)(t+1-\beta) dt$$

이므로

$$g'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta) + 2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$$

$$g'(4) = 2(4-\alpha)(4-\beta) + 2(5-\alpha)(5-\beta)$$

$$= 82 - 18\alpha - 18\beta + 4\alpha\beta = 0$$

$$9\alpha + 9\beta - 2\alpha\beta - 41 = 0 \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $\alpha\beta = \frac{13}{2}$ 이므로

$$f(0) = 2\alpha\beta = 2 \times \frac{13}{2} = 13$$

208) [정답] 54

[해설]

$$\{f(x)\}^2 = 2 \int_3^x (t^2 + 2t) f(t) dt \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 에 $x=3$ 을 대입하면 $f(3)=0$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2f(x)f'(x) = 2(x^2 + 2x)f(x)$$

$$2f(x)\{f'(x) - x^2 - 2x\} = 0$$

$$f(x)=0 \text{ 또는 } f'(x)=x^2+2x$$

함수 $f(x)$ 에 대하여 집합 $A = \{x \mid f(x) \neq 0\}$ 이라 하자.

$A = \emptyset$ 이면 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)=0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$A \neq \emptyset$ 이라 하자.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + a \quad (a \text{는 실수})$$

라 하자. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 연속이므로 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x)=g(x)$ 이다.

(i) $g(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지는 경우

함수 $g(x)$ 의 극댓값은 $g(-2)$ 이고

$$g(-2) = \frac{4}{3} + a > 0$$

이므로 $g(3)=18+a \neq 0$ 이다.

함수 $f(x), g(x)$ 가 연속이므로

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3) = 0$$

그러므로 $g(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지는 함수 $f(x)$ 는 존재하지 않는다.

(ii) $g(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지는 경우

함수 $g(x)$ 의 극댓값 또는 극솟값이 0이다.

$$g(-2)=0 \text{ 일 때, } g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}$$

$$g(0)=0 \text{ 일 때, } g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$$

$f(3)=0$ 이고 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

미분가능하므로

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3} & (x < -2) \\ 0 & (x \geq -2) \end{cases} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x^2 & (x < 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

(iii) $g(x)=0$ 이 오직 하나의 실근을 가지는 경우

하나의 실근을 α 라 하면 함수 $f(x), g(x)$ 가 연속이므로

$$f(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = g(\alpha) = 0$$

이고 $f(3)=0$ 이므로 $\alpha=3$ 이다.

$$g(3) = 18 + a = 0, \quad a = -18$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 18 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

조건을 만족시키는 $f(x)$ 는 $\textcircled{2}$ 과 (i)~(iii)에서 $\textcircled{3}, \textcircled{4},$

$\textcircled{5}$ 이므로 정적분 $\int_{-3}^0 f(x) dx$ 의 값이 최대가 되는 $f(x)$ 는 $\textcircled{4},$

최소가 되는 $f(x)$ 는 $\textcircled{5}$ 이다.

$$\begin{aligned} M - m &= \int_{-3}^0 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) dx - \int_{-3}^0 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 18 \right) dx \\ &= \int_{-3}^0 18 dx = 54 \end{aligned}$$

209) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$n-1 \leq x < n$ 일 때,

$$f(x) = 6(x-n+1)(x-n) \text{ 또는 } f(x) = -6(x-n+1)(x-n) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 가 연속함수이므로 함수 $g(x)$ 는 $0 < x < 4$ 에서 미분가능하다.

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_x^4 f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_4^x f(t)dt \text{에서}$$

$$g'(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

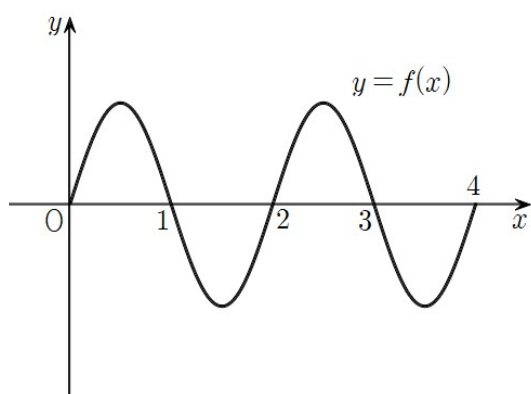
함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 최솟값 0을 가지므로 $g(2)=0$ 이고 $g'(2)=0$ 이다.

$$g(2) = \int_0^2 f(t)dt - \int_2^4 f(t)dt = 0 \text{에서 } \int_0^2 f(t)dt = \int_2^4 f(t)dt$$

..... ㉠

$g'(2)=0$ 에서 $f(2)=0$ 이고 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 최소이므로 함수 $g'(x)$ 의 부호, 즉 함수 $f(x)$ 의 부호가 $x=2$ 의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌어야 한다. ㉡

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx &= \int_0^4 f(x)dx - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \\ &= 0 - \int_0^{\frac{1}{2}} (-6x^2 + 6x)dx \\ &= 0 + \left[2x^3 - 3x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

210) [정답] ③

[해설]

$f'(2)=0$ 이므로 실수 k 에 대하여 $f(x)=x^2-4x+k$ 라 하자.

ㄱ. 만약 $f(2) \geq 0$ 이면 $x > 2$ 일 때 $f(x) > 0$ 이므로

정적분과 넓이의 관계에 의하여 $\int_2^4 f(x)dx > 0$,

$$\text{즉 } \int_4^2 f(x)dx = -\int_2^4 f(x)dx < 0 \text{이므로 주어진 조건을}$$

만족시키지 못한다. 즉 $f(2) < 0$ (참)

$$\text{ㄴ. } \int_4^3 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + kx \right]_4^3 = -k + \frac{5}{3}$$

$$-k + \frac{5}{3} \geq 0 \text{이므로 } k \leq \frac{5}{3}$$

$$\int_4^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + kx \right]_4^2 = -2k + \frac{16}{3}$$

$$\int_4^3 f(x)dx - \int_4^2 f(x)dx = k - \frac{11}{3}$$

$$k \leq \frac{5}{3} \text{에서 } k - \frac{11}{3} \leq -2 < 0 \text{이므로}$$

$$\int_4^3 f(x)dx < \int_4^2 f(x)dx \quad (\text{거짓})$$

$$\text{ㄷ. ㄴ에서 } k \leq \frac{5}{3} \text{이므로 } f(3) = k - 3 \leq -\frac{4}{3} < 0$$

$f(3)=f(1) < 0$ 이므로 구간 $[1, 3]$ 에서 $f(x) < 0$ 이고,

$n=1$ 또는 $n=2$ 일 때

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=n$, $x=3$ 으로

둘러싸인 부분의 넓이가 $-\int_n^3 f(x)dx$ 와 같다.

$$\text{즉 } \int_3^n f(x)dx = -\int_n^3 f(x)dx > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\int_4^5 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + kx \right]_4^5 = k + \frac{7}{3}$$

$$k + \frac{7}{3} \geq 0 \text{에서 } k \geq -\frac{7}{3} \text{이므로}$$

$$f(5) = 5 + k \geq \frac{8}{3} > 0$$

구간 $[5, \infty)$ 에서 $f(x) > 0$ 이다.

그러므로 6 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 곡선

$y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=5$, $x=n$ 으로 둘러싸인

부분의 넓이가 $\int_5^n f(x)dx$ 와 같다.

$$\text{즉 } \int_5^n f(x)dx > 0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \int_4^3 f(x)dx \geq 0, \int_4^5 f(x)dx \geq 0 \text{이면 함수}$$

$f(x)$ 가 주어진 조건을 만족시킨다.

$$\text{따라서 } -\frac{7}{3} \leq k \leq \frac{5}{3} \quad \dots\dots ㉢$$

$$\int_4^6 f(x)dx = 2k + \frac{32}{3} \text{이므로 ㉢에서}$$

$$6 \leq \int_4^6 f(x)dx \leq 14 \quad (\text{참})$$

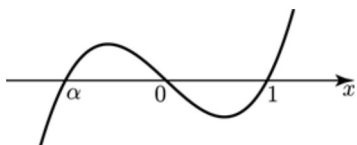
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

211) [정답] ⑤

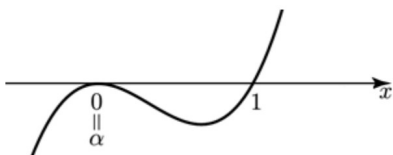
[해설]

$f(x)=x(x-1)(x-\alpha)$ 로 놓으면 α 의 범위에 따른 그래프의 개형은 다음과 같다.

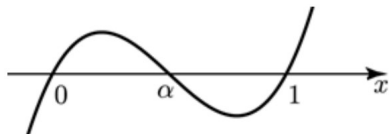
(i)



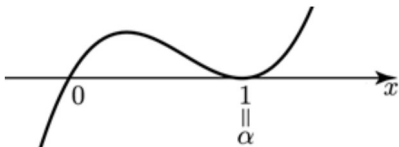
(ii)



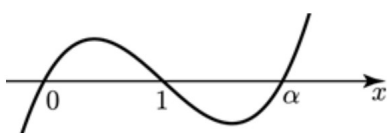
(iii)



(iv)



(v)



$$\neg. g(0) = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx = 0 \text{에서}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 |f(x)| dx \text{이므로 } 0 < x < 1 \text{에서}$$

$$f(x) \geq 0 \text{이다.}$$

따라서 그래프의 개형은 (iv), (v)이다.

즉, $\alpha \geq 1$ 이므로

이때,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 x(x-1)(x-\alpha) dx \\ &= \int_{-1}^0 \{x^3 - (\alpha+1)x^2 + \alpha x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{\alpha+1}{3}x^3 + \frac{\alpha}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{10\alpha+7}{12} \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{(\alpha+1)}{3}x^3 + \frac{\alpha}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\alpha+1}{3} + \frac{\alpha}{2} = \frac{2\alpha-1}{12} \end{aligned}$$

따라서 $f(x) \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} g(-1) &= \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx \\ &= \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \\ &= -\frac{10\alpha+7}{12} - \frac{2\alpha-1}{12} = -\frac{2\alpha+1}{2} \end{aligned}$$

이고 $\alpha \geq 1$ 이므로 $g(-1) < 0$ 이다. (참)

$$\neg. g(-1) = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx > 0 \text{이면}$$

$\int_{-1}^0 f(x) dx > \int_0^1 |f(x)| dx > 0$ 이므로 가능한 그래프의 개형은 (i)이다.

$$\text{이때, } \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 -f(x) dx \text{이므로}$$

$$g(-1) = -\frac{10\alpha+7}{12} + \frac{2\alpha-1}{12} = \frac{-8\alpha-8}{12} = -\frac{2\alpha+2}{3} > 0$$

에서 $\alpha < -1$ 이다.

따라서 $f(k)=0$ 을 만족시키는 $k=\alpha$ 이며 $\alpha < -1$ 이므로 $k < -1$ 이다. (참)

$$\neg. g(-1) = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx > 1 \text{이면}$$

$\int_{-1}^0 f(x) dx > 1 + \int_0^1 |f(x)| dx > 0$ 이므로 가능한 그래프의 개형은 (i)이다.

$$\text{이때, } \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 -f(x) dx \text{이므로}$$

$$g(-1) = -\frac{10\alpha+7}{12} + \frac{2\alpha-1}{12} = \frac{-8\alpha-8}{12} = -\frac{2\alpha+2}{3} > 1$$

에서 $\alpha < -\frac{5}{2}$ 이다.

이때,

$$g(0) = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 -f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = \frac{2\alpha-1}{6}$$

이고 $\alpha < -\frac{5}{2}$ 에서 $\frac{2\alpha-1}{6} < -1$ 이므로 $g(0) < -1$ 이다.

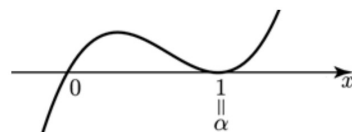
(참)

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$

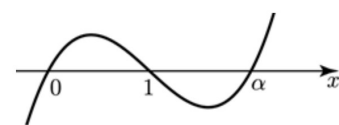
[다른 풀이]

$$\neg. g(0) = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx = 0 \text{이므로 } f(x) \geq 0 \text{이고}$$

만족하는 경우는 [그림1]과 [그림2]이다.



[그림1]



[그림2]

따라서 $1 \leq \alpha$ 이므로 $\int_{-1}^0 f(x) dx < 0$ 이고,

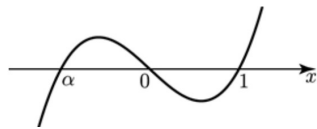
$$\int_0^1 f(x) dx > 0 \text{이다.}$$

$$g(-1) = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$= \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx < 0 \quad (\text{참})$$

$$\therefore g(-1) = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx > 0 \text{ 이면}$$

$\int_{-1}^0 f(x) dx > 0$ 이어야 하므로 만족하는 경우는 [그림3]과 같다.



[그림3]

$$\int_{-1}^0 f(x) dx > \int_0^1 |f(x)| dx \text{ 이므로 } \alpha < -1 \text{ 이다.}$$

따라서 $f(k)=0$ 인 $k=\alpha < -1$ 을 만족한다. (참)

$$\therefore g(-1) = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx > 1 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = x(x-1)(x-k) = x^3 - (k+1)x^2 + kx \text{ 라 두면}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{k+1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{k+1}{3} - \frac{k}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 \{-f(x)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{k+1}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{k+1}{3} - \frac{k}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$g(-1) = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx = -\frac{2k+2}{3} > 1$$

$$\text{즉, } 2k+2 < -3 \text{ 이므로 } 2k < -5, k < -\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{k+1}{3} + \frac{k}{2} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{k}{3} < -\frac{1}{6} - \frac{5}{6} = -1 \end{aligned}$$

이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

212) [정답] 30

[해설]

$$g(x) = \int_0^x \{f'(t+a) \times f'(t-a)\} dt \text{의 양변을}$$

$$x \text{에 대하여 미분하면 } g'(x) = f'(x+a) \times f'(x-a)$$

$f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는

0 또는 1 또는 2이다.

(i) 방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가

0 또는 1인 경우

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이므로

$$g'(x) = f'(x+a) \times f'(x-a) \geq 0$$

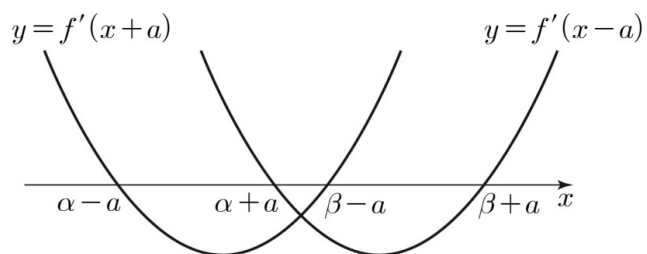
함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

$$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta) (\alpha < \beta) \text{라 하자.}$$

(a) $\alpha+a < \beta-a$ 일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	...	$\alpha-a$	...	$\alpha+a$	...	$\beta-a$	...	$\beta+a$	...
$f'(x+a)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x-a)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

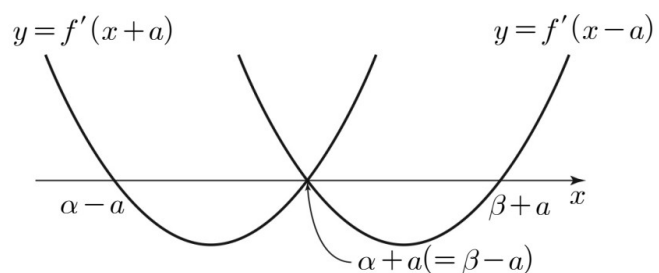
함수 $g(x)$ 는

$$x=\alpha-a, x=\alpha+a, x=\beta-a, x=\beta+a \text{에서}$$

극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(b) $\alpha+a=\beta-a$ 일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	...	$\alpha-a$	...	$\alpha+a(=\beta-a)$	...	$\beta+a$	...
$f'(x+a)$	+	0	-	0	+	+	+
$f'(x-a)$	+	+	+	0	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$ 는 $x=\alpha-a$, $x=\beta+a$ 에서만 극값을 가지므로 조건에 의하여

$$(\beta+a) - (\alpha-a) = \frac{13}{2} - \frac{1}{2} = 6$$

$\beta - \alpha = 2a$ 이므로

$$(\beta + a) - (\alpha - a) = (\beta - \alpha) + 2a = 4a$$

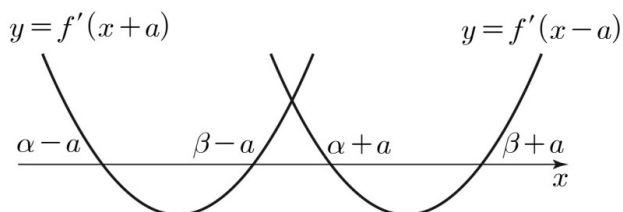
$$4a = 6 \text{에서 } a = \frac{3}{2}$$

그러므로 $\alpha - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ 에서 $\alpha = 2$ 이고,

$$\beta + \frac{3}{2} = \frac{13}{2} \text{에서 } \beta = 5 \text{이다.}$$

(c) $\beta - a < \alpha + a$ 일 때

두 함수 $y = f'(x+a)$, $y = f'(x-a)$ 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\dots$	$\alpha - a$	$\dots$	$\beta - a$	$\dots$	$\alpha + a$	$\dots$	$\beta + a$	$\dots$
$f'(x+a)$	+	0	-	0	+	+	+	+	+
$f'(x-a)$	+	+	+	+	+	0	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $g(x)$ 는 $x = \alpha - a$, $x = \beta - a$, $x = \alpha + a$,
 $x = \beta + a$ 에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\text{그러므로 } f'(x) = 3(x-2)(x-5)$$

$$f(x) = \int (3x^2 - 21x + 30)dx$$

$$= x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} \text{이므로 } f(x) = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x - \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a \times f(1) = \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{21}{2} + 30 - \frac{1}{2}\right) = 30$$

213) [정답] ①

[해설]

최고차항의 계수가 양수이고

$$f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0 \quad (0 < \alpha < \beta < \gamma)$$

이므로

$$f(x) = k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad (k > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이라 하자.

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

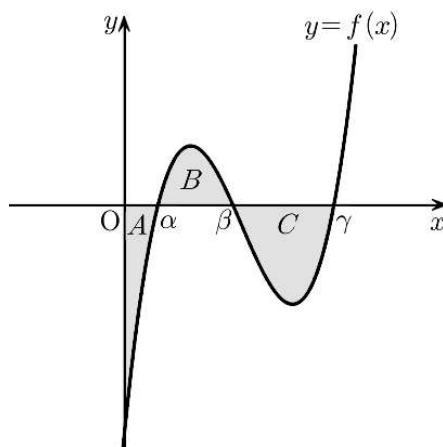
에서 양변을 x 에 대하여 미분하면 $g'(x) = f(x)$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = \alpha \text{ 또는 } x = \beta \text{ 또는 } x = \gamma$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	α	$\dots$	β	$\dots$	γ	$\dots$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

한편, ㉠에 의하여 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 곡선 $y = f(x)$ 와 x , y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , $\alpha \leq x \leq \beta$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 B , $\beta \leq x \leq \gamma$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 C 라 하면 함수 $g(x)$ 는 $x = \beta$ 에서 극댓값 0을 가지므로

$$g(\beta) = \int_0^\beta f(t) dt = -A + B = 0$$

$$h(\beta) = 8 \text{이므로 } A + B = 8$$

$$\therefore A = B = 4$$

$$h(\gamma) = 24 \text{이므로 } A + B + C = 24 \quad \therefore C = 16$$

$$\begin{aligned} \therefore g(\alpha) - g(\gamma) &= -A - (-A + B - C) \\ &= C - B \\ &= 12 \end{aligned}$$

214) [정답] 24

[해설]

$$2x^2 f(x) = 3 \int_0^x (x-t) \{f(x) + f(t)\} dt \text{에서}$$

$$2x^2 f(x) = 3 \int_0^x (x-t) f(x) dt + 3 \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

$$= 3f(x) \int_0^x (x-t) dt + 3 \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

$$= 3f(x) \left[xt - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^x + 3 \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

$$= \frac{3}{2}x^2 f(x) + 3 \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

$$x^2 f(x) = 6 \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

$$x^2 f(x) = 6x \int_0^x f(t) dt - 6 \int_0^x t f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2xf(x) + x^2f'(x) = 6 \int_0^x f(t)dt \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$f'(2)=4$ 이므로 다항함수 $f(x)$ 의 차수는 1 이상이다. 함수 $f(x)$ 의 차수를 n 이라 하고, 최고차항의 계수를 a ($a \neq 0$)이라 하자.

㉠의 양변의 최고차항의 계수를 비교하면

$$a(2+n) = \frac{6a}{n+1}$$

$$(n+1)(n+2) = 6, (n-1)(n+4) = 0$$

n 은 자연수이므로 $n=1$

함수 $f(x)$ 가 일차함수이고 $f'(2)=4$ 이므로

$a=4f(x)=4x+b$ (단, b 는 상수)라 하면 ㉠에서

$$2x(4x+b) + 4x^2 = 6 \left[2t^2 + bt \right]_0^x$$

$$12x^2 + 2bx = 12x^2 + 6bx \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

모든 실수 x 에 대하여 ㉡이 성립하므로 $b=0$

$f(x)=4x$ 이므로 $f(6)=24$

215) [정답] 10

[해설]

조건 (가)의

$$\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

에서 양변을 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 4x, \quad xf'(x) = 4x$$

$x \neq 0$ 인 모든 실수에 대하여 $f'(x) = 4$

$f'(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수에 대하여 $f'(x) = 4$

$$\therefore f(x) = 4x + C_1 \quad (C_1 \text{는 적분상수})$$

㉢의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=3$

$$\therefore f(x) = 4x - 1$$

$$F(x) = \int f(x)dx = 2x^2 - x + a \quad (a \text{는 적분상수})$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} f(x)G(x) + F(x)g(x) &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) \\ &= \{F(x)G(x)\}' \\ &= 8x^3 + 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

이므로

$$F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C_2 \quad (C_2 \text{는 적분상수})$$

$F(x)$, $G(x)$ 가 모두 다항함수이고 $F(x)$ 가 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로 $G(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x) = x^2 + bx + c$ 라 하면

$$(2x^2 - x + a)(x^2 + bx + c) = 2x^4 + x^3 + x + C_2$$

양변의 3차항의 계수를 비교하면

$$-1 + 2b = 1 \text{에서} \quad b = 1$$

양변의 2차항의 계수를 비교하면

$$a - b + 2c = 0 \text{에서} \quad a = 1 - 2c$$

양변의 1차항의 계수를 비교하면

$$ab - c = 1 \text{에서} \quad a = 1 + c$$

$$\therefore a = 1, c = 0, G(x) = x^2 + x$$

$$\therefore \int_1^3 g(x)dx = G(3) - G(1) = 12 - 2 = 10$$

216) [정답] 182

[해설]

방정식 $g(x)=0$ 에서

$x=t$ 일 때 $f(t)-t-f(t)+t=0$ 이므로 $g(t)=0$

$x \neq t$ 일 때 $f(x)-x-f(t)+t=0$ 에서 $\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=1$ 이다.

따라서 함수 $h(t)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(t, f(t))$ 를 지나고 기울기가 1인 직선 l 과 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 개수이다. 임의의 실수 s 에 대하여 $h(s) \geq 1$ 이다.

(i) $h(s)=1$ 인 경우

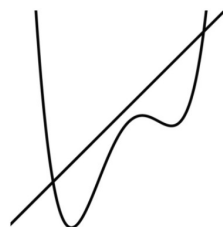


$$\lim_{t \rightarrow s} h(t) = 2 \text{이므로} \quad \lim_{t \rightarrow s} \{h(t) - h(s)\} = 1$$

(ii) $h(s)=2$ 인 경우



$$\lim_{t \rightarrow s} h(t) = 2 \text{이므로} \quad \lim_{t \rightarrow s} \{h(t) - h(s)\} = 0$$



$$\lim_{t \rightarrow s} h(t) = 2 \text{이므로} \quad \lim_{t \rightarrow s} \{h(t) - h(s)\} = 0$$



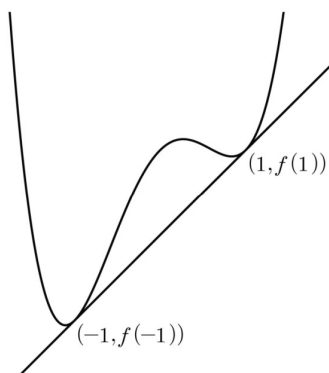
$$\lim_{t \rightarrow s} h(t) = 4 \text{ 이므로 } \lim_{t \rightarrow s} \{h(t) - h(s)\} = 2$$

(iii) $h(s) \geq 3$ 인 경우

$\lim_{t \rightarrow s} h(t) = 4$ 이거나 극한값이 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 l 이 두 점 $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$ 에서 접할 때

$\lim_{t \rightarrow -1} \{h(t) - h(-1)\} = \lim_{t \rightarrow 1} \{h(t) - h(1)\} = 2$ 를 만족시킨다.



함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a , 직선 l 의 방정식을 $y = x + b$ (a, b 는 상수)라 하자.

$$f(x) - (x + b) = a(x - 1)^2(x + 1)^2$$

$$f(x) = a(x - 1)^2(x + 1)^2 + x + b$$

조건 (나)에서 $\int_0^\alpha \{f(x) - |f(x)|\} dx = 0$ 을 만족시키는 실수

α 의 최솟값이 -1 이므로

$$-1 \leq x \leq 0 \text{에서 } f(x) \geq 0, f(-1) \geq 0$$

$f(-1) > 0$ 이면 실수 α 의 최솟값이 -1 이 아니므로

$$f(-1) = 0$$

$$f(-1) = -1 + b = 0 \text{ 이므로 } b = 1$$

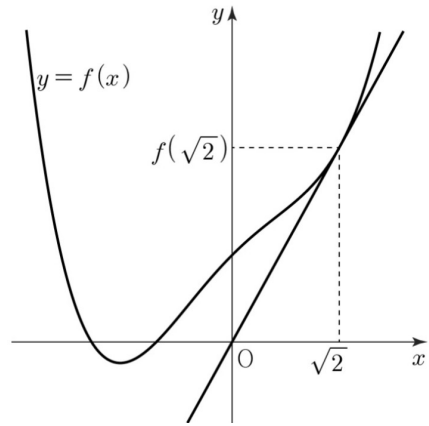
$$\therefore f(x) = a(x - 1)^2(x + 1)^2 + x + 1$$

조건 (다)에서 $\frac{d}{dx} \int_0^x \{f(u) - ku\} du = f(x) - kx \geq 0$

$f(x) \geq kx$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = kx$ 가 접하거나 만나지 않는다.

실수 k 의 최댓값이 $f'(\sqrt{2})$ 이므로 그림과 같이

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = f'(\sqrt{2})x$ 가 점 $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$ 에서 접한다.



$$f(x) = a(x - 1)^2(x + 1)^2 + x + 1 = ax^4 - 2ax^2 + x + a + 1$$

$$f'(x) = 4ax^3 - 4ax + 1$$

$$f(\sqrt{2}) = 4a - 4a + \sqrt{2} + a + 1 = a + \sqrt{2} + 1$$

$$f'(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}a - 4\sqrt{2}a + 1 = 4\sqrt{2}a + 1$$

$$f(\sqrt{2}) = f'(\sqrt{2}) \times \sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$a + \sqrt{2} + 1 = (4\sqrt{2}a + 1) \times \sqrt{2} = 8a + \sqrt{2}$$

$$\therefore a = \frac{1}{7}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{7}(x - 1)^2(x + 1)^2 + x + 1$ 이므로

$$f(6) = \frac{1}{7} \times 5^2 \times 7^2 + 6 + 1 = 182$$

217) [정답] 39

[해설]

$x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) \geq g(4) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$|g(x)| \geq |g(3)| \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

가 성립한다.

(i) $g(4) \geq 0$ 일 때,

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } x = 4 \text{일 때 } g(4) \geq |g(3)|$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } x = 3 \text{일 때 } g(3) \geq g(4)$$

$$\therefore |g(3)| \leq g(4) \leq g(3)$$

$$g(4) \geq 0, g(3) \geq 0 \text{이므로 } g(3) = g(4)$$

$x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) \geq g(3) = g(4) \text{이므로 함수 } g(x) \text{는 } x = 3 \text{과 } x = 4$$

모두에서 극솟값을 가져야 한다. 그러나 $g(x)$ 는

삼차함수이고 극솟값은 많아야 하나이므로 모순이다.

(ii) $g(4) < 0$ 일 때,

$x \rightarrow \infty$ 에 따라 $g(x) \rightarrow \infty$ 이므로 사잇값 정리에 의해

$x \geq 1$ 인 범위에서 $g(\alpha) = 0$ 인 α 가 존재한다.

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } |g(3)| \leq |g(\alpha)| = 0 \text{이므로 } g(3) = 0 \text{이다.}$$

$g(0) = 0$ 이고, $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 인

삼차함수이므로

$$g(x) = \frac{1}{3}x(x-3)(x-a) \quad (a \text{는 상수})$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3+a}{3}x^2 + ax$$

㉠에서 함수 $g(x)$ 는 $x=4$ 에서 극소이므로 $g'(4)=0$

$$g'(x) = x^2 - \frac{2}{3}(3+a)x + a \text{에서}$$

$$g'(4) = 16 - \frac{8}{3}(3+a) + a = 8 - \frac{5}{3}a = 0$$

$$\therefore a = \frac{24}{5}, \quad g'(x) = x^2 - \frac{26}{5}x + \frac{24}{5}$$

$$g'(x) = \frac{1}{5}(5x-6)(x-4) \text{이므로}$$

$$f(9) = g'(9) = \frac{1}{5} \times 39 \times 5 = 39$$

218) [정답] ④

[해설]

$$\int_{x_1}^{x_2} \{f(t) - f(a)\} dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a) dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt - \int_{x_1}^{x_2} f(a) dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a) dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a) dt + \int_{x_1}^{x_2} f(a) dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq \int_{x_1}^{x_2} \{f'(a)(t-a) + f(a)\} dt \text{이므로}$$

$x_1 \leq x_2$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq \int_{x_1}^{x_2} \{f'(a)(t-a) + f(a)\} dt$$

이러면 사차함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$$

두 점 $(-1, f(-1)), (3, f(3))$ 을 지나는 직선의 방정식을

$y = mx + n$ (m, n 은 상수)라 하면

$$m = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{f(3) - f(-1)}{4}$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$ 를

만족시키는 모든 실수 a 의 값의 범위가

$a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이므로,

$$x = -1, a = 3 \text{일 때 } f(-1) \geq -4f'(3) + f(3)$$

$$\frac{f(3) - f(-1)}{4} \leq f'(3) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x = 3, a = -1 \text{일 때 } f(3) \geq 4f'(-1) + f(-1)$$

$$f'(-1) \leq \frac{f(3) - f(-1)}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$f'(-1) \leq m \leq f'(3) \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x) - (mx+n)$ 이라 하자.

$$g(a) = f(a) - ma - n$$

$$g'(x) = f'(x) - m \text{에서 } g'(a) = f'(a) - m$$

모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$f(x) - (mx+n) \geq f'(a)(x-a) + f(a) - (mx+n)$$

$$f(x) - (mx+n) \geq \{f'(a) - m\}(x-a) + \{f(a) - ma - n\}$$

이므로 $g(x) \geq g'(a)(x-a) + g(a)$ 를 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 범위도 $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이다.

$$g(-1) = g(3) = 0 \text{이므로}$$

$$g(x) \geq g'(-1)(x+1) \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$g(x) \geq g'(3)(x-3) \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$$

㉣에서 $g'(-1) \leq 0 \leq g'(3)$ 이므로

㉣, ㉤에서 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$ 일 때 $g(x) \geq 0$

구간 $(-\infty, -1]$ 에서 $g(x)$ 의 최솟값은 $g(-1) = 0$ 이고,

구간 $[3, \infty)$ 에서 $g(x)$ 의 최솟값은 $g(3) = 0$ 이다.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$ 는 최솟값을

가지고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq g(c)$ 를 만족시키는

실수 c 가 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에 존재한다.

$g(c)$ 가 극솟값이므로 $g'(c) = 0$ 이고

$$g(x) \geq g(c) = g'(c)(x-c) + g(c)$$

실수 $a=c$ 가 $g(x) \geq g'(a)(x-a) + g(a)$ 를 만족시키므로

$c \leq -1$ 또는 $c \geq 3$

그러므로 $c = -1$ 또는 $c = 3$

$$\text{즉 } g(-1) = g(3) = 0, \quad g'(-1) = g'(3) = 0 \text{이므로}$$

$$g(x) = (x+1)^2(x-3)^2$$

$$f(x) = (x+1)^2(x-3)^2 + mx + n$$

$$f'(x) = 4(x+1)(x-3)(x-1) + m$$

$$f(1) = 15 \text{이므로}$$

$$16 + m + n = 15$$

$$m + n = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉥}$$

$$f'(1) = 1 \text{이므로 } m = 1$$

$m = 1$ 을 ㉥에 대입하면 $n = -2$

$$f(x) = (x+1)^2(x-3)^2 + x - 2$$

$$\text{따라서 } f(4) = 27$$

219) [정답] ①

[해설]

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$g(0) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = f(2) = 0$$

$f(x) = (x-2)(x-p)$ (p 는 상수)라 하면

$$f(x+2) = x(x+2-p)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = 2 - p$$

함수 $xf(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(h)-F(0)}{h} = F'(0) = 0$$

$$g'(0) = 2-p=0, \quad p=2$$

$$f(x) = (x-2)^2$$

그러므로

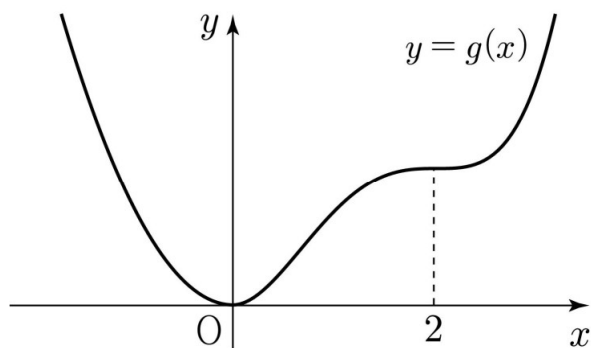
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ \int_0^x t(t-2)^2 dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x(x-2)^2 & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$ 인 경우

$h(x)=g(x)$ 이므로 함수 $h(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 0

(ii) $0 < g(a) < g(2)$ 또는 $g(2) < g(a)$ 인 경우

방정식 $h(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \alpha-} \frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha} \neq \lim_{x \rightarrow \alpha+} \frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$\lim_{x \rightarrow \beta-} \frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta} \neq \lim_{x \rightarrow \beta+} \frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=\alpha, x=\beta$ 에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$ 인 경우

방정식 $h(x)=0$ 의 두 근을 $\gamma(\gamma < 0)$, 2라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \gamma-} \frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma} \neq \lim_{x \rightarrow \gamma+} \frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=\gamma$ 에서 미분가능하지 않다.

$0 < x < 2$ 일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = -g'(2) = 0$$

$x > 2$ 일 때, $h(x)=g(x)-g(2)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = g'(2) = 0$$

함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다. 함수 $h(x)$ 가

$x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 1

$$g(2) = \int_0^2 t(t-2)^2 dt = \frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$g(\gamma) = \gamma^2 = \frac{4}{3}, \quad \gamma = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 함수 $h(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a 의 값의 곱은

$$2 \times \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

220) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면 주어진 방정식은

$$\int_t^x f(s)ds = F(x) - F(t) = 0 \text{이므로 } F(x) = F(t) \text{이다.}$$

따라서 $g(t)$ 는 곡선 $y=F(x)$ 와 직선 $y=F(t)$ 의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

ㄱ. $F'(x)=f(x)=x^2(x-1)$ 이다.

함수 $F(x)$ 는 $x < 1$ 에서 감소, $x > 1$ 에서

증가하므로 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다.

따라서 곡선 $y=F(x)$ 와 직선 $y=F(1)$ 은

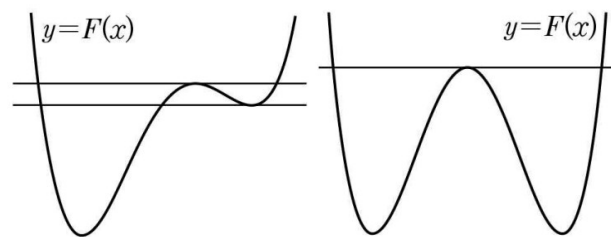
오직 한 점에서 만나므로 $g(1)=1$ 이다. (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때,

함수 $F(x)$ 의 두 극솟값이 같은 경우와 두 극솟값이 다른

경우가 있다. 각 경우 곡선 $y=F(x)$ 와 직선 $y=F(a)$ 가

서로 다른 세 점에서 만나는 실수 a 가 존재한다.



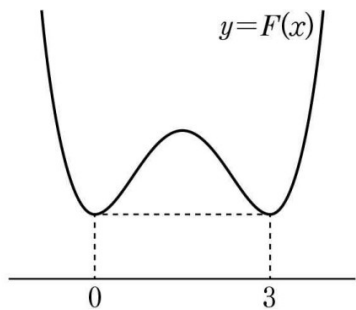
따라서 $g(a)=3$ 인 실수 a 가 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $F(x)$ 가 극댓값을 갖지 않거나, 극댓값을 갖지만 두

극댓값의 크기가 다른 경우에는 $\lim_{t \rightarrow b} g(t) + g(b) = 6$ 인

실수 b 가 존재하지 않는다. 따라서 곡선 $y=F(x)$ 의

개형은 다음과 같고, $F(0)=F(3)$ 이다.



$f(0) = F'(0) = 0$ 이고 $f(3) = F'(3) = 0$ 이므로

$$F(x) - F(0) = \frac{x^2(x-3)^2}{4} = \frac{x^4 - 6x^3 + 9x^2}{4}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

이므로 $f(4) = 64 - 72 + 18 = 10$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

221) [정답] 4

[해설]

삼차함수 $g(x)$ 의 상수항이 0이므로 $g(x)$ 는 x 를 인수로 갖는다. ㉠

조건 (가)의 $x|g(x)| = \int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$ 에 $x=2a$ 를 대입하면

$$2a|g(2a)| = 0$$

a 가 양수이므로 $g(2a) = 0$ 이고 $g(x)$ 는 $(x-2a)$ 를 인수로 갖는다. ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x) = x(x-2a)(x-b)$ (단, b 는 실수)

함수 $(a-x)f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,

$$\frac{d}{dx} \int_{2a}^x (a-t)f(t)dt = (a-x)f(x) \text{이다.}$$

즉, 함수 $x|g(x)|$ 는 $x=2a$ 에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2a+} \frac{x|g(x)| - 2a|g(2a)|}{x-2a} &= \lim_{x \rightarrow 2a+} \frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2a+} x^2|x-b| \\ &= 4a^2|2a-b| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2a-} \frac{x|g(x)| - 2a|g(2a)|}{x-2a} &= \lim_{x \rightarrow 2a-} \frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2a-} (-x^2|x-b|) \\ &= -4a^2|2a-b| \end{aligned}$$

이므로 $4a^2|2a-b| = -4a^2|2a-b|$ 에서 $b=2a$ 이다.

따라서 $g(x) = x(x-2a)^2$

$$\int_{2a}^x (a-t)f(t)dt = \begin{cases} -x^2(x-2a)^2 & (x < 0) \\ x^2(x-2a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

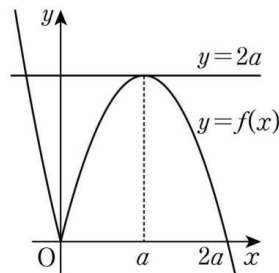
$$(a-x)f(x) = \begin{cases} -4x(x-a)(x-2a) & (x < 0) \\ 4x(x-a)(x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x(x-2a) & (x < 0) \\ -4x(x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

방정식 $g(f(x)) = 0$ 에서

$$f(x) = 0 \text{ 또는 } f(x) = 2a$$

방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근 $0, 2a$ 를 가지므로 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x) = 2a$ 는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=2a$ 의 교점의 개수가 2이어야 하므로

$$\begin{aligned} f(a) &= -4a(a-2a) \\ &= 4a^2 = 2a \end{aligned}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2a}^{2a} f(x)dx &= \int_{-1}^1 f(x)dx \\ &= \int_{-1}^0 (4x^2 - 4x)dx + \int_0^1 (-4x^2 + 4x)dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

222) [정답] 8

[해설]

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x \int_0^x f(t)dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) \\ &= 2x \int_0^x f(t)dt \end{aligned}$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt \text{라 하면 } h(0) = 0$$

조건 (나)에 의하여

방정식 $h(x) = 0$ 의 실근은 0과 3이므로

(i) $h(x) = ax^2(x-3)$ (a 는 상수)라 하면

$g'(x) = 2ax^3(x-3)$ 이고 함수 $g(x)$ 는 $x=0, x=3$ 에서 극값을 가지므로 모순

(ii) $h(x) = ax(x-3)^2$ (a 는 상수)라 하면

$g'(x) = 2ax^2(x-3)^2$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지

않는다.

$$g'(x) = f(x)$$

$$= a(3x^2 - 12x + 9) = 3a(x-1)(x-3)$$

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이므로 $a=1$

$$f(x) = 3(x-1)(x-3)$$

따라서

$$\int_0^3 |f(x)| dx$$

$$= 3 \int_0^3 |(x-1)(x-3)| dx$$

$$= 3 \int_0^1 (x-1)(x-3) dx - 3 \int_1^3 (x-1)(x-3) dx$$

$$= 3 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 - 3 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3$$

$$= 3 \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) - 3 \left(9 - 18 + 9 - \frac{1}{3} + 2 - 3 \right) = 8$$

223) [정답] ④

[해설]

ㄱ. $g'(x)$ 는 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $x=0$ 에서 연속이다.

또, $f(x)$ 도 $x=0$ 에서 연속이므로

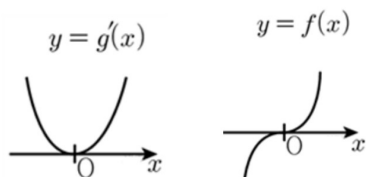
$$g'(x) = \begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases} \text{에서 } f(0)=0 \quad (\text{참})$$

ㄴ. ㄱ에서 $f(0)=g'(0)=0$ 이므로

$$g'(x) = 3x^2 - ax \text{라 하자.}$$

(i) $a=0$ 일 때

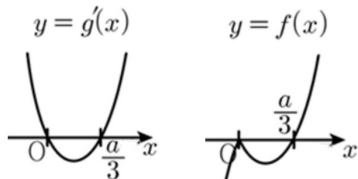
$y=g'(x)$ 와 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)$ 는 모든 실수에서 증가하므로 극댓값을 갖지 않는다.

(ii) $a>0$ 일 때

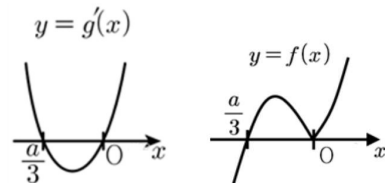
$y=g'(x)$ 와 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

(iii) $a<0$ 일 때

$y=g'(x)$ 와 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)$ 는 $x = \frac{a}{6}$ 에서 극댓값을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)$ 는 $a=0$ 일 때 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

$$\text{ㄷ. } g'(x) = \begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}, g'(x) = 3x^2 - ax \text{에서}$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + ax & (x < 0) \\ 3x^2 - ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

$f(1)=3-a$ 이므로 $2 < 3-a < 4$ 에서 $-1 < a < 1$

$$f(x)-x = \begin{cases} -3x^2 + (a-1)x & (x < 0) \\ 3x^2 - (a+1)x & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 $f(x)-x=0$ 에서

(i) $-3x^2 + (a-1)x = 0$ 일 때

$$x=0 \text{ 또는 } x = \frac{a-1}{3} \quad (x < 0)$$

이때, $-2 < a-1 < 0$ 이므로 $\frac{a-1}{3} < 0$ 이다.

(ii) $3x^2 - (a+1)x = 0$ 일 때

$$x=0 \text{ 또는 } x = \frac{a+1}{3}$$

이때, $0 < a+1 < 2$ 이므로 $\frac{a+1}{3} > 0$ 이다.

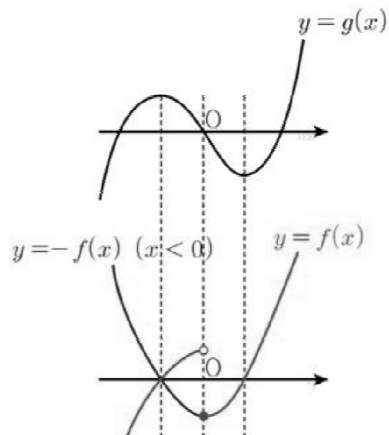
(i), (ii)에서 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

$g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, $g(0)=0$ 이다.

(i) $y=g(x)$ 가 x 축과 세 점에서 만나는 경우

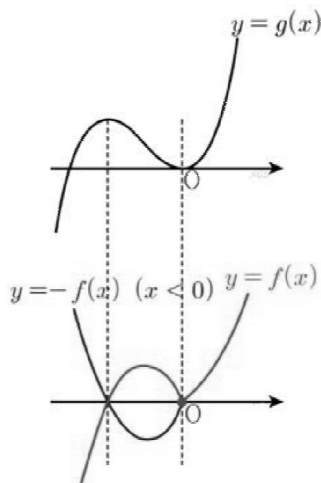


[그림1]

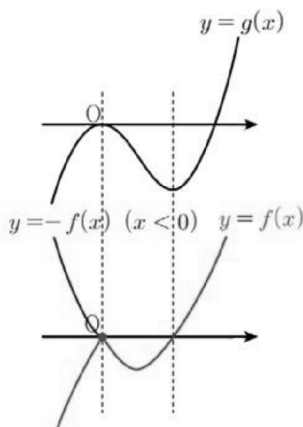
그림과 같이 $y=f(x)$ 가 연속함수가 아니므로 주어진 조건에 모순이다.

(ii) $y=g(x)$ 가 x 축과 접하는 경우

(두 점에서 만나는 경우)



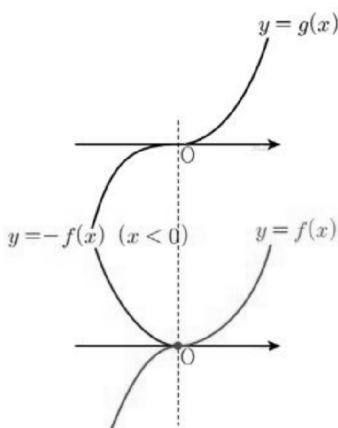
[그림2-1]



[그림2-2]

그림과 같이 $y=f(x)$ 가 연속함수이므로
주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $y=g(x)$ 가 원점에서 삼중근을 갖는 경우



그림과 같이 $y=f(x)$ 가 연속함수이므로 주어진 조건을
만족시킨다.

ㄱ. 조건에 맞는 [그림2], [그림3]은 모두 $f(0)=0$ 이다.
(참)

ㄴ. [그림2]에서는 극댓값을 가지지만, [그림3]은
극댓값을 가지지 않는다. (거짓)

ㄷ. [그림 2-1]에서 $g(x)=(x+3\alpha)x^2$ 이라 두면

$$f(x)=\begin{cases} -3x(x+2\alpha) & (x<0) \\ 3x(x+2\alpha) & (x\geq 0) \end{cases} \text{에서 } 2<f(1)<4 \text{ 일 때}$$

즉, $2<3(1+2\alpha)<4$ 이므로

$$\frac{2}{3}<1+2\alpha<\frac{4}{3}, -\frac{1}{6}<\alpha<\frac{1}{6} \text{ 이다.}$$

이때, $f'(0^+)=2\alpha$ 이고 $-\frac{1}{3}<2\alpha<\frac{1}{3}$ 이므로 $y=x$ 와

$f(x)$ 가 원점 근방에서는 교점이 두 개이므로
[그림2-1]에서는 $f(x)=x$ 의 서로 다른 실근의
개수가 3이다. [그림 2-2]에서 [그림 2-1]과
대칭인 경우이므로 $f(x)=x$ 의 서로 다른 실근의
개수가 3이다.

[그림3]에서 $f'(0)=0$ 이므로 $f(x)=x$ 의 서로 다른
실근의 개수가 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

224) [정답] 32

[해설]

조건 (나)에서 $|x|<2$ 일 때 $g'(x)=-x+a$ 이고

조건 (다)에서 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서

극값을 가지므로 $g'(1)=-1+a=0, a=1$

$|x|<2$ 일 때 $g'(x)=-x+1$ 에서

함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서만 극값을 가지므로 $|b|\geq 2$

함수 $g'(x)$ 가 $x=-2, x=2$ 에서 연속이므로

$$g'(-2)=\lim_{x\rightarrow-2+}g'(x)=\lim_{x\rightarrow-2+}(-x+1)=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$g'(2)=\lim_{x\rightarrow2-}g'(x)=\lim_{x\rightarrow2-}(-x+1)=-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

에서 $b\neq\pm 2$ 이므로 $|b|>2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$

조건 (나)에서 $|g'(b)|=f(b)=0$ 이고

$|x|\geq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여

이차함수 $f(x)$ 는 $f(x)=|g'(x)|\geq 0$ 이므로

$$f(x)=m(x-b)^2 \quad (m>0)$$

㉠, ㉡에 의하여

$$f(-2)=|g'(-2)|=3, f(2)=|g'(2)|=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

이고 $f(-2)>f(2)$ 에서

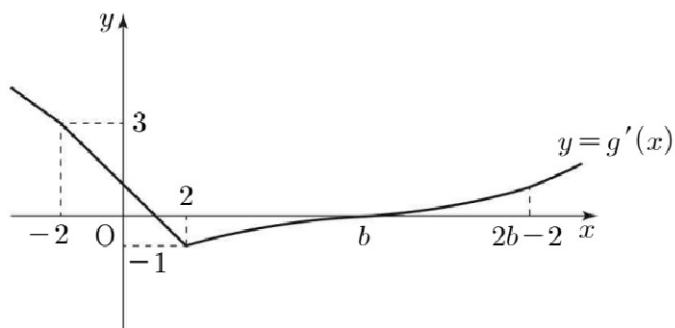
$$m(-2-b)^2>m(2-b)^2$$

$$b^2+4b+4>b^2-4b+4 \text{에서 } b>0$$

㉢에 의하여 $b>2$ 이고

조건을 만족시키는 함수 $g'(x)$ 는

$$g'(x)=\begin{cases} m(x-b)^2 & (x\leq-2) \\ -x+1 & (-2<x<2) \\ -m(x-b)^2 & (2\leq x<b) \\ m(x-b)^2 & (x\geq b) \end{cases}$$



㉣에 의하여

$$f(-2)=m(-2-b)^2=3, f(2)=m(2-b)^2=1$$

두 식을 연립하면

$$m(-2-b)^2=3m(2-b)^2$$

$$b^2-8b+4=0 \text{에서 } b>2 \text{이므로}$$

$$b=4+2\sqrt{3}$$

$$\text{조건 (나)에서 } g(0)=\int_0^0 (-t+1)dt=0 \text{이므로}$$

$$g(k)=\int_0^k g'(t)dt \text{에서}$$

(i) $k<0$ 일 때

$$x \leq 0 \text{에서 } g'(x)>0 \text{이므로}$$

$$g(k)=\int_0^k g'(t)dt = -\int_k^0 g'(t)dt < 0$$

그러므로

$$g(k)=0 \text{을 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $k=0$ 일 때

$$g(0)=\int_0^0 g'(t)dt=0 \text{이므로}$$

$$g(k)=0 \text{을 만족시킨다.}$$

(iii) $0 < k \leq 2$ 일 때

$$\int_0^k g'(t)dt = \int_0^k (-t+1)dt$$

$$= \left[-\frac{t^2}{2} + t \right]_0^k$$

$$= -\frac{k^2}{2} + k = 0 \text{에서}$$

$$k=2 \text{일 때 } g(k)=0 \text{을 만족시킨다.}$$

(iv) $k>2$ 일 때

$$2 < x < b \text{에서 } g'(x) < 0 \text{이므로}$$

$$\int_0^k g'(t)dt = 0 \text{이라면 } k > b$$

$$\int_0^k g'(t)dt$$

$$= \int_0^2 g'(t)dt + \int_2^b g'(t)dt + \int_b^k g'(t)dt$$

$$= 0 - \int_2^b m(t-b)^2dt + \int_b^k m(t-b)^2dt$$

$$= -m \int_2^b (t^2 - 2bt + b^2)dt + m \int_b^k (t^2 - 2bt + b^2)dt$$

$$= -m \left[\frac{t^3}{3} - bt^2 + b^2t \right]_2^b + m \left[\frac{t^3}{3} - bt^2 + b^2t \right]_b^k$$

$$= -\frac{m}{3}(b^3 - 6b^2 + 12b - 8) + \frac{m}{3}(k^3 - 3k^2b + 3kb^2 - b^3)$$

$$= -\frac{m}{3}(b-2)^3 + \frac{m}{3}(k-b)^3 = 0 \text{에서}$$

$$(k-b)^3 = (b-2)^3$$

$$k-b, b-2 \text{는 모두 실수이므로 } k-b=b-2$$

$$\text{그러므로 } k=2b-2=6+4\sqrt{3} \text{일 때}$$

$$g(k)=0 \text{을 만족시킨다.}$$

(i)~(iv)에 의하여

$$g(k)=0 \text{을 만족시키는 모든 실수 } k \text{의 값의 합은}$$

$$0+2+(6+4\sqrt{3})=8+4\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$p=8, q=4$$

$$\text{따라서 } p \times q = 32$$

225) [정답] ①

[해설]

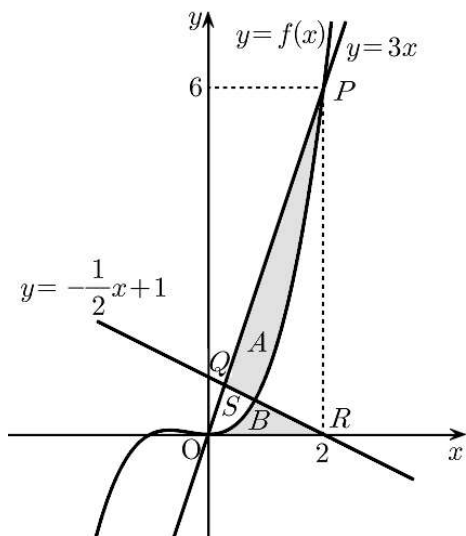
$$\text{함수 } f(x)=\frac{1}{2}x^2(x+1) \text{에서 점 } P \text{의 좌표는 } (2, 6)$$

$$\text{점 } P \text{를 지나는 직선의 방정식은 } y=3x$$

$$\text{직선 } y=3x \text{와 직선 } y=-\frac{1}{2}x+1 \text{의 교점이 } Q \text{이므로}$$

$$3x = -\frac{1}{2}x+1, \quad x=\frac{2}{7}, \quad Q\left(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

$$\text{직선 } y=-\frac{1}{2}x+1 \text{의 } x \text{절편은 } 2, y \text{절편은 } 1 \text{이다.}$$



$$\text{따라서 두 직선 } y=3x, y=-\frac{1}{2}x+1 \text{과 곡선 } y=f(x) \text{로}$$

둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$A-B=A+S-(B+S)$$

$$= \int_0^2 \{3x-f(x)\}dx - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{6}{7}$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) dx - \frac{6}{7}$$

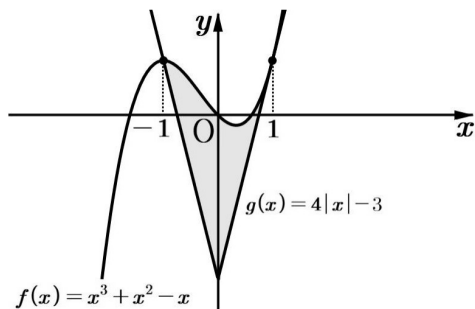
$$= \left[-\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 - \frac{6}{7}$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{6}{7}$$

$$= \frac{38}{21}$$

226) [정답] 80

[해설]



두 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,
 $x > 0$ 에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 접하고 $x < 0$ 에서 만난다.
 $x \geq 0$ 일 때, $g(x) = 4x + k$ 이므로
 $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 4$
 $(3x+5)(x-1) = 0$
 $\therefore x = 1$ 일 때 $(1, 1)$ 에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 접한다.
 따라서 $g(x) = 4x - 3$ 이고 $k = -3$ 이다.
 $x < 0$ 일 때,
 $x^3 + x^2 - x = -4x - 3$
 $x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0$
 $(x^2 + 3)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 일 때 $(-1, 1)$ 에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 만난다.
 따라서 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{(x^3 + x^2 - x) - (-4x - 3)\} dx \\ &\quad + \int_0^1 \{(x^3 + x^2 - x) - (4x - 3)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 + x^2 + 3x + 3) dx + \int_0^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + 3) dx + \int_{-1}^0 3x dx + \int_0^1 -5x dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 + 3 dx + \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{5}{2} x^2 \right]_0^1 \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 + 3x \right]_0^1 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore 30 \times S = 80$$

[다른 풀이]

$$x^3 + x^2 - x = 4|x| + k \text{에서}$$

$$x^3 + x^2 - x - 4|x| = k \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$h(x) = x^3 + x^2 - x - 4|x| \text{라 하면}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 5x & (x \geq 0) \\ x^3 + x^2 + 3x & (x < 0) \end{cases} \text{에서}$$

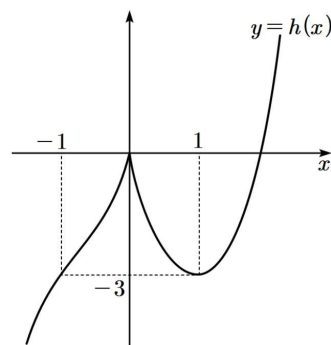
$$h'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 5 & (x > 0) \\ 3x^2 + 2x + 3 & (x < 0) \end{cases}$$

$$3x^2 + 2x - 5 = (3x+5)(x-1) \text{이므로 } h'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	+		-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$x = 0$ 에서 극댓값 $h(0) = 0$, $x = 1$ 에서 극솟값 $h(1) = -1$ 을 가지므로 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



㉠이 서로 다른 두 실근을 가지고 $k < 0$ 이므로 $k = -3$
 따라서 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 (x^3 + x^2 + 3x + 3) dx + \int_0^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 3x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 3x \right]_0^1 \\ &= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 3 \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 3 \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore 30 \times S = 80$$

227) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$ 는 $x = k$ 에서 미분가능하다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x = k$ 에서 연속이므로

$$f(k) = \lim_{x \rightarrow k-} f(x) = ak$$

한편, 함수 $f(x)$ 가 $x = k$ 에서 미분가능하므로

$$f'(k) = \lim_{x \rightarrow k-} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k-} \frac{ax - ak}{x - k} = a$$

㉡. $f'(k) = a$ 이고 $a = 1$ 이므로 $f'(k) = 1$ 이다. (참)

㉢. $g(x) = -x^2 + 4bx - 3b^2$ 이라 하자.

직선 $y = ax$ 는 원점에서 곡선 $y = g(x)$ 에 그은 기울기가 양수인 접선 중 하나이고, 접점의 좌표는 $(k, g(k))$ 이다.

$$g'(x) = -2x + 4b \text{이므로 곡선 } y = g(x) \text{ 위의}$$

점 $(k, g(k))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (-k^2 + 4bk - 3b^2) = (-2k + 4b)(x - k)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 - (-k^2 + 4bk - 3b^2) = (-2k + 4b)(0 - k)$$

$$k^2 - 3b^2 = 0$$

$$k > 0, b > 0 \text{이므로 } k = \sqrt{3}b$$

$$k = 3 \text{이므로 } b = \sqrt{3} \text{이고}$$

$$a = g'(k) = -2k + 4b = (4 - 2\sqrt{3})b$$

$$= -6 + 4\sqrt{3} \quad (\text{참})$$

ㄷ. ㄴ에서

$$f(x) = \begin{cases} (4 - 2\sqrt{3})bx & (x < \sqrt{3}b) \\ -x^2 + 4bx - 3b^2 & (x \geq \sqrt{3}b) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} (4 - 2\sqrt{3})b & (x < \sqrt{3}b) \\ -2x + 4b & (x \geq \sqrt{3}b) \end{cases}$$

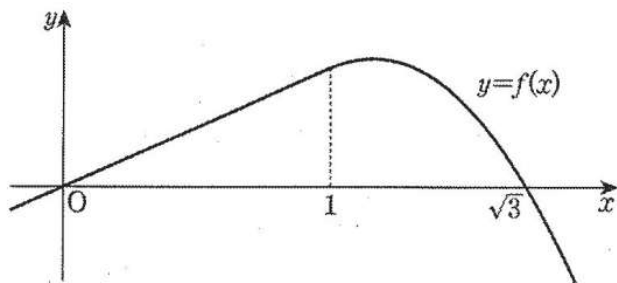
$$f(k) = f'(k) \text{에서 } f(\sqrt{3}b) = f'(\sqrt{3}b) \text{이므로}$$

$$-3b^2 + 4\sqrt{3}b^2 - 3b^2 = -2\sqrt{3}b + 4b$$

$$\text{따라서 } b = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이고}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4\sqrt{3}-6}{3}x & (x < 1) \\ -x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}x - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축은 $x=0$, $x=\sqrt{3}$ 에서 만나므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4\sqrt{3}-6}{3} + \int_1^{\sqrt{3}} \left(-x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}x - 1 \right) dx$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{3} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - x \right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{3} + \frac{4-2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \quad (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

228) [정답] 54

[해설]

$$f(x) = |x^2 - 3| - 2x$$

$$= \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & (x \leq -\sqrt{3} \text{ 또는 } x \geq \sqrt{3}) \\ -x^2 - 2x + 3 & (-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}) \end{cases}$$

x_1, x_4 는 이차방정식 $x^2 - 2x - 3 = -x + t$ 의

두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

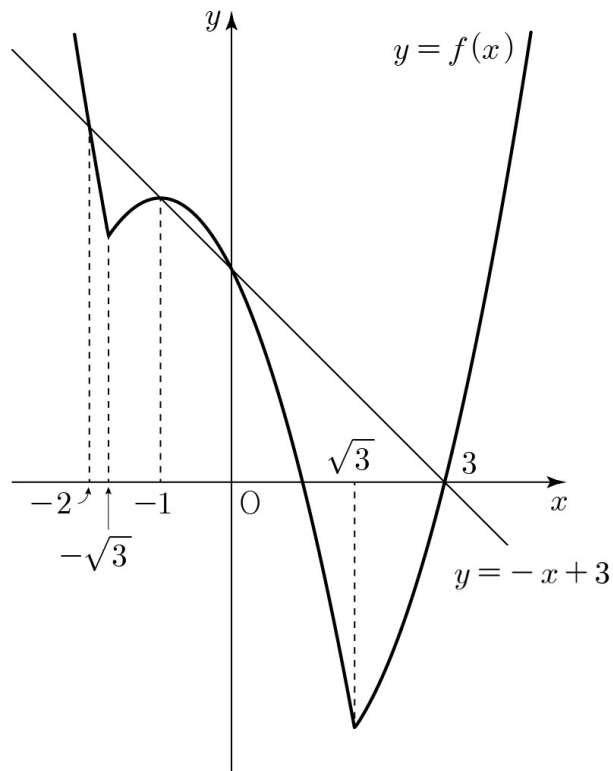
$$x_1 + x_4 = 1, \quad x_1 x_4 = -t - 3$$

$$x_4 - x_1 = 5 \text{이므로 } x_1 = -2, \quad x_4 = 3$$

$$x_1 x_4 = -t - 3 = -6, \quad t = 3$$

x_2, x_3 은 이차방정식 $-x^2 - 2x + 3 = -x + 3$ 의

두 근이므로 $x_2 = -1, \quad x_3 = 0$



닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \{(-x+3) - (-x^2-2x+3)\} dx$$

$$+ \int_{\sqrt{3}}^3 \{(-x+3) - (x^2-2x-3)\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{\sqrt{3}}^3$$

$$= \frac{27}{2} - 4\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } p \times q = \frac{27}{2} \times 4 = 54$$

229) [정답] ②

[해설]

$$(A \text{의 넓이}) - (B \text{의 넓이})$$

$$= \int_0^2 f(x) dx - \left(- \int_2^3 f(x) dx \right)$$

$$= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$$

$$= \int_0^3 f(x) dx$$

$$= \int_0^3 kx(x-2)(x-3) dx$$

$$= k \int_0^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) dx$$

$$= k \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3$$

$$= \frac{9}{4}k$$

$$\frac{9}{4}k = 3 \text{ 에서 } k = \frac{4}{3}$$

230) [정답] ②

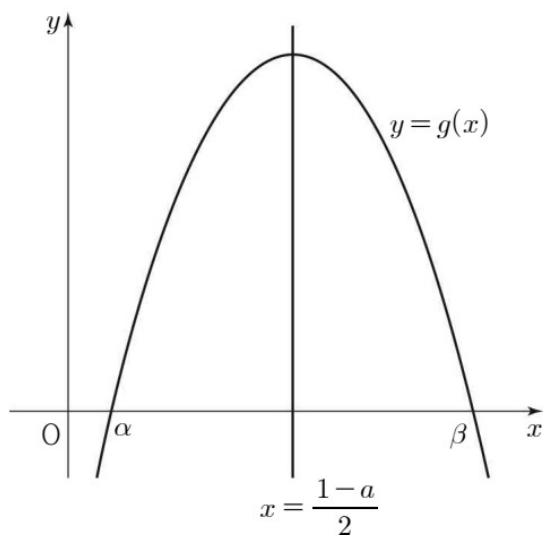
[해설]

두 함수 $f(x), g(x)$ 를

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수), $g(x) = x - 3 - f(x)$ 라 하자.

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < 3 < \beta$)라 하면

$$g(\alpha) = g(\beta) = 0$$



$$S_2 = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - (x-3)| dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \text{ 이므로}$$

직선 $x=3$ 은 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 이등분한다.

이때 $g(x) = -x^2 + (1-a)x - 3 - b$ 에서 이차함수 $y=g(x)$ 의

그래프는 직선 $x = \frac{1-a}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 $\frac{1-a}{2} = 3$,

$$a = -5$$

$$S_2 - 2S_1 = 6 \text{ 에서 } \frac{1}{2}S_2 - S_1 = 3$$

$$\frac{1}{2}S_2 - S_1$$

$$= \int_{\alpha}^3 |f(x) - (x-3)| dx - \int_0^{\alpha} |f(x) - (x-3)| dx$$

$$= - \int_{\alpha}^3 \{f(x) - (x-3)\} dx - \int_0^{\alpha} \{f(x) - (x-3)\} dx$$

$$= - \int_0^3 \{f(x) - (x-3)\} dx$$

$$= - \int_0^3 (x^2 - 6x + b + 3) dx$$

$$= - \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (b+3)x \right]_0^3$$

$$= 18 - 3(b+3) = 9 - 3b = 3$$

$$b = 2$$

따라서 $f(x) = x^2 - 5x + 2$ 이므로 $f(-1) = 8$

231) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$ 에서

$$f(x) = \frac{1}{9}(x^3 - 15x^2 + 54x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{9}(3x^2 - 30x + 54) = \frac{1}{3}(x^2 - 10x + 18)$$

방정식 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 5 \pm \sqrt{7}$

$0 < t < 6$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다.

$0 < x < 6$ 이고, $f'(x) = 0$ 인 실수 x 의 값을 k 라 하자.

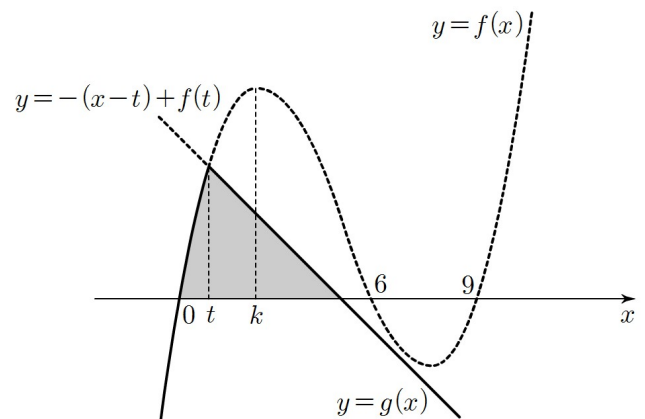
$$f'(k) = 0, \quad k = 5 - \sqrt{7}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$ 라 하자.

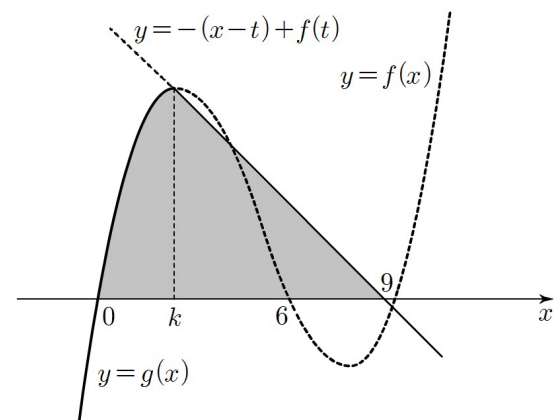
(i) $0 < t < k$ 일 때

아래 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$S(t)$ ($0 < t < k$)이다.



아래 그림에서 색칠한 도형의 넓이는 $S(k)$ 이다.



..... ㉠

위의 그림에 의하여 $0 < t < k$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$$S(t) < S(k)$$

이다.

(ii) $k \leq t < 6$ 일 때

직선 $y = -(x-t) + f(t)$ 의 기울기는 -1 이다.

$k \leq x < 6$ 에서 $f'(x) = -1$ 인 실수 x 를 a 라 하자.

$$f'(a) = -1 \quad (k \leq a < 6)$$

$$f'(a) = -1 \quad (5 - \sqrt{7} \leq a < 6) \text{ 이므로}$$

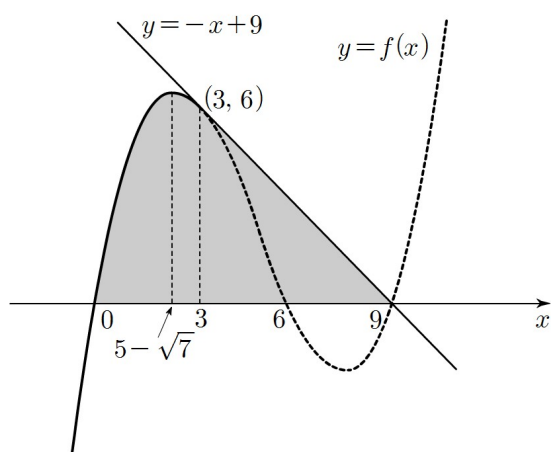
$$\frac{1}{3}(a^2 - 10a + 18) = -1, \quad a^2 - 10a + 21 = 0$$

$$5 - \sqrt{7} \leq a < 6 \text{ 이므로}$$

$$a = 3$$

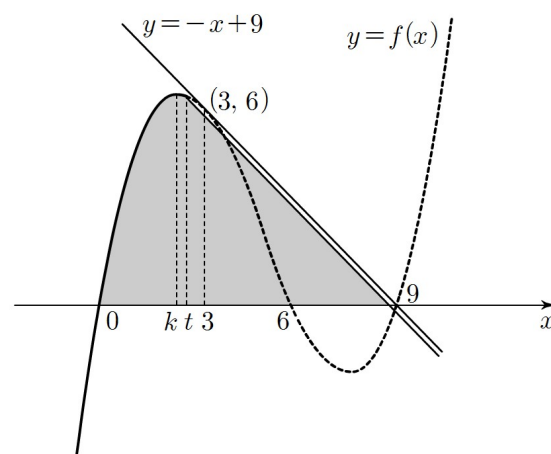
따라서 $f'(3) = -1$ 이다.

아래 그림에서 색칠한 도형의 넓이는 $S(3)$ 이다.

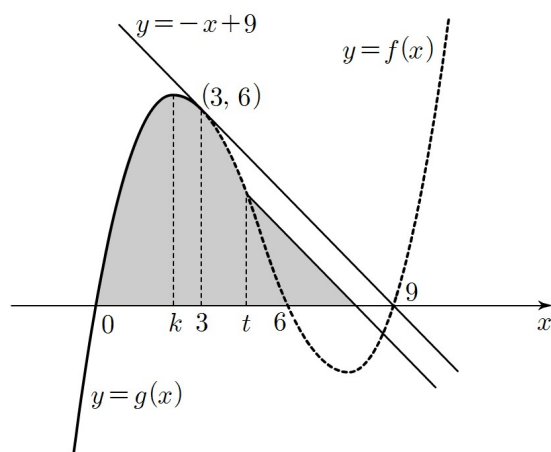


$g'(t) \neq -1$, $k \leq t < 6$ 인 실수 t 에 대하여 색칠한 도형의 넓이는 다음 두 그림과 같다.

(1) $k < t < 3$ 일 때



(2) $3 < t < 6$ 일 때



(1), (2)와 ㉠에 의하여 $0 < t < 6$ 인 실수 t 에 대하여

$S(t)$ 의 값의 최댓값은 $S(3)$ 이다.

(i), (ii)에 의하여 $S(t)$ 의 값의 최댓값은

$$\begin{aligned} S(3) &= \int_0^9 g(x) dx \\ &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^9 \{-(x-3) + f(3)\} dx \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{1}{4} x^4 - 5x^3 + 27x^2 \right]_0^3 + \frac{1}{2} \times 6^2 \\ &= \frac{129}{4} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$ 에서

$$f(x) = \frac{1}{9}(x^3 - 15x^2 + 54x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{9}(3x^2 - 30x + 54) = \frac{1}{3}(x^2 - 10x + 18)$$

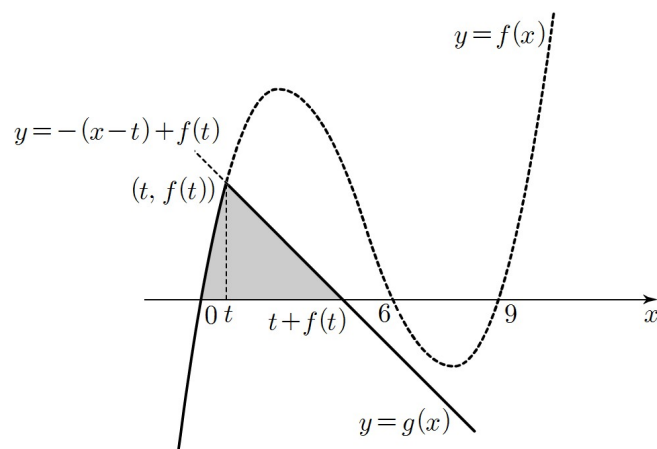
방정식 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 5 \pm \sqrt{7}$

$0 < t < 6$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다.

함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$ 라 하자.



위의 그림에서 색칠한 도형의 넓이가 $S(t)$ 이다.

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{t+f(t)} g(x) dx \\ &= \int_0^t g(x) dx + \int_t^{t+f(t)} g(x) dx \\ &= \int_0^t f(x) dx + \frac{1}{2} \{f(t)\}^2 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} S'(t) &= f(t) + f(t)f'(t) \\ &= f(t)\{f'(t) + 1\} \end{aligned}$$

$S'(t) = 0$ 에서 $f(t) = 0$ 또는 $f'(t) + 1 = 0$

$0 < t < 6$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $f(t) > 0$ 이다.

$$f'(t)+1=0 \text{ 에서 } \frac{1}{3}(t^2-10t+18)=-1$$

$0 < t < 6$ 이므로 $f'(t)=0$ 에서

$$t=3$$

$0 < t < 6$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	3	...	6
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	최대	↘	

따라서 $S(t)$ 의 최댓값은 $S(3)$ 이다.

$$\begin{aligned} S(3) &= \int_0^9 g(x) dx \\ &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^9 \{-(x-t)+f(t)\} dx \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 27x^2 \right]_0^3 + \frac{1}{2} \times 6^2 \\ &= \frac{129}{4} \end{aligned}$$

232) [정답] ④

[해설]

$A=B$ 이므로

$$\int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\} dx = 0$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\} dx &= \int_0^2 (x^3+2x^2-k) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - kx \right]_0^2 \\ &= 4 + \frac{16}{3} - 2k \\ &= \frac{28}{3} - 2k \end{aligned}$$

따라서 $\frac{28}{3} - 2k = 0$ 에서

$$2k = \frac{28}{3}, \quad k = \frac{14}{3}$$

233) [정답] ②

[해설]

$f'(x)=3x^2-12x+8$ 이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $B(k, f(k))$ 에서의 접선의 방정식은 $y-(k^3-6k^2+8k+1)=(3k^2-12k+8)(x-k)$

이 직선이 점 $A(0, 1)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} 2k^3-6k^2 &= 2k^2(k-3) \\ &= 0 \text{ 에서} \end{aligned}$$

$k > 0$ 이므로 $k=3$ 이고

직선 AB의 방정식은 $y=-x+1$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^3 |f(x)-(-x+1)| dx \\ &= \int_0^3 \{f(x)+x-1\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^3 |g(x)-(-x+1)| dx \\ &= \int_0^3 \{-g(x)-x+1\} dx \end{aligned}$$

$S_1=S_2$ 에서

$$\int_0^3 \{f(x)+x-1\} dx = \int_0^3 \{-g(x)-x+1\} dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 g(x) dx &= \int_0^3 \{-f(x)-2x+2\} dx \\ &= \int_0^3 (-x^3+6x^2-10x+1) dx \end{aligned}$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x \right]_0^3$$

$$= -\frac{81}{4} + 54 - 45 + 3$$

$$= -\frac{33}{4}$$

234) [정답] ⑤

[해설]

두 점 A, B의 좌표를 각각

$\left(a, \frac{a}{2}\right), \left(b, \frac{b}{2}\right)$ ($0 < a < b$)라 하자.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 가 원점 O에서

접하고 두 점 A, B에서 만나므로

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2}x &= x^2(x-a)(x-b) \\ &= x^4 - (a+b)x^3 + abx^2 \\ S_1 - S_2 &= \int_0^a \left| f(x) - \frac{1}{2}x \right| dx - \int_a^b \left| f(x) - \frac{1}{2}x \right| dx \\ &= \int_0^a \left\{ f(x) - \frac{1}{2}x \right\} dx + \int_a^b \left\{ f(x) - \frac{1}{2}x \right\} dx \\ &= \int_0^b \left\{ f(x) - \frac{1}{2}x \right\} dx \\ &= \int_0^b \{x^4 - (a+b)x^3 + abx^2\} dx \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{a+b}{4}x^4 + \frac{ab}{3}x^3 \right]_0^b$$

$$= -\frac{b^5}{20} + \frac{ab^4}{12} = 0$$

에서 $5a-3b=0$ 이고,

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(b-a) = \sqrt{5}$$

에서 $b-a=2$ 이므로 두 식을 연립하여 계산하면

$$a=3, b=5$$

$$\text{그러므로 } f(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\text{따라서 } f(1) = \frac{17}{2}$$

235) [정답] ②

[해설]

시각 t ($t \geq 0$)에서의 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하자.

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)dt$$

$$= 16 + \int_0^t 3t(a-t)dt$$

$$= 16 + \int_0^t (-3t^2 + 3at)dt$$

$$= 16 + \left[-t^3 + \frac{3}{2}at^2 \right]_0^t$$

$$= -t^3 + \frac{3}{2}at^2 + 16$$

시각 $t=2a$ 에서 점 P의 위치가 0이므로

$$x(2a) = -(2a)^3 + \frac{3}{2}a \times (2a)^2 + 16$$

$$= 16 - 2a^3 = 0$$

$$a^3 = 8, a = 2$$

$$v(t) = 3t(2-t) = -3t^2 + 6t$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=5$ 까지

점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5 |v(t)|dt$$

$$= \int_0^5 |-3t^2 + 6t|dt$$

$$= \int_0^2 (-3t^2 + 6t)dt + \int_2^5 (3t^2 - 6t)dt$$

$$= \left[-t^3 + 3t^2 \right]_0^2 + \left[t^3 - 3t^2 \right]_2^5$$

$$= \{(-8+12)-0\} + \{(125-75)-(8-12)\}$$

$$= 58$$

236) [정답] ③

[해설]

실수 a ($a \geq 0$)에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도를 $v(t)$ 라 할 때

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

점 P가 시각 $t=0$ 일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸는 경우는 다음과 같다.

(i) $a=0$ 일 때

$$v(t) = -t^3(t-1) \text{ 이므로 } t=1 \text{ 에서 운동 방향을 바꾸며}$$

시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 (-t^4 + t^3)dt = \left[-\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} \right]_0^2 = -\frac{12}{5}$$

(ii) $a=\frac{1}{2}$ 일 때

$$v(t) = -t(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right) \text{ 이므로 } t=\frac{1}{2} \text{ 에서 운동 방향을}$$

바꾸며 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의

변화량은

$$\int_0^2 \left(-t^4 + \frac{5}{2}t^3 - 2t^2 + \frac{1}{2}t \right) dt$$

$$= \left[-\frac{t^5}{5} + \frac{5}{8}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2 \right]_0^2 = -\frac{11}{15}$$

(iii) $a=1$ 일 때

$$v(t) = -t(t-1)^2(t-2) \text{ 이므로 } t=2 \text{ 에서 운동 방향을}$$

바꾸며 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의

변화량은

$$\int_0^2 (-t^4 + 4t^3 - 5t^2 + 2t)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{5}t^5 + t^4 - \frac{5}{3}t^3 + t^2 \right]_0^2 = \frac{4}{15}$$

이상에서 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$ 이다.

237) [정답] 16

[해설]

속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = \begin{cases} -t^2 + t + 2 & (0 \leq t \leq 3) \\ k(t-3) - 4 & (t > 3) \end{cases}$$

$$\text{방정식 } -t^2 + t + 2 = 0 \text{ 에서 } -(t-2)(t+1) = 0$$

$$t=2 \text{ 또는 } t=-1$$

처음으로 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각 $t=2$ 이다.

따라서 두 번째로 운동 방향이 바뀌는 시각은

$$\text{방정식 } k(t-3) - 4 = 0 \text{ 에서 } t = \frac{4}{k} + 3$$

$t = \frac{4}{k} + 3$ 에서의 점 P의 위치가 1이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^3 (-t^2 + t + 2)dt + \int_3^{\frac{4}{k}+3} (kt - 3k - 4)dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_0^3 + \left[\frac{k}{2}t^2 - 3kt - 4t \right]_3^{\frac{4}{k}+3} \\ &= \left(-9 + \frac{9}{2} + 6 \right) + \left\{ \frac{k}{2} \left(\frac{4}{k} + 3 \right)^2 - 3k \left(\frac{4}{k} + 3 \right) - 4 \left(\frac{4}{k} + 3 \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{9k}{2} - 9k - 12 \right) \right\} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{8}{k} = 1 \\ &\therefore k = 16 \end{aligned}$$

238) [정답] ⑤

[해설]

점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치를 $x_1(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t (2-t)dt \\ &= \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^t \\ &= 2t - \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

따라서, 출발 후 점 P가 다시 원점으로 돌아온 시각은

$$2t - \frac{1}{2}t^2 = 0, \quad t^2 - 4t = 0$$

$$t(t-4) = 0$$

$$t = 4$$

이므로

출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아

올 때까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^4 |3t|dt = \int_0^4 3t dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t^2 \right]_0^4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

239) [정답] ②

[해설]

시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 라 하면

$$x_1(t) = \int_0^t (t^2 - 6t + 5)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t \right]_0^t$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t$$

$$x_2(t) = \int_0^t (2t - 7)dt = [t^2 - 7t]_0^t = t^2 - 7t$$

시각 t 에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(t) &= \left| \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t - (t^2 - 7t) \right| \\ &= \left| \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \right| \end{aligned}$$

이때 $g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t$ 라 하면

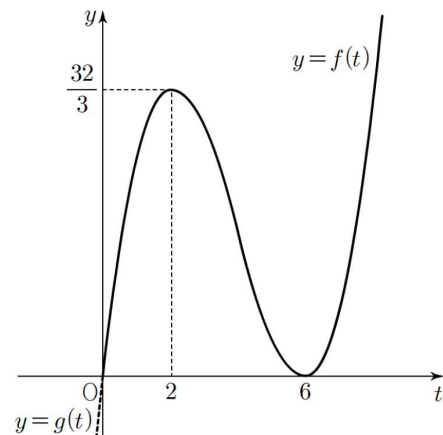
$$g'(t) = t^2 - 8t + 12 = (t-2)(t-6)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t = 2 \text{ 또는 } t = 6$$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	2	...	6	...
$g'(t)$		+	0	-	0	+
$g(t)$	0	↗	$\frac{32}{3}$	↘	0	↗

따라서 $t \geq 0$ 에서 함수 $y = g(t)$, 즉 $y = f(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(t)$ 가 구간 $[0, 2]$ 에서 증가하고, 구간 $[2, 6]$ 에서 감소하고, 구간 $[6, \infty)$ 에서 증가하므로

$$a = 2, \quad b = 6$$

이때 시각 $t=2$ 에서 $t=6$ 까지 점 Q가 움직인 거리를 l 이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_2^6 |2t - 7| dt \\ &= \int_2^{\frac{7}{2}} (-2t + 7) dt + \int_{\frac{7}{2}}^6 (2t - 7) dt \\ &= \left[-t^2 + 7t \right]_2^{\frac{7}{2}} + \left[t^2 - 7t \right]_{\frac{7}{2}}^6 \\ &= \frac{17}{2} \end{aligned}$$

240) [정답] ⑤

[해설]

시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v_1(t)| dt = \int_0^2 |3t^2+1| dt = \left[t^3+t \right]_0^2 = 10$$

시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v_2(t)| dt = \int_0^2 |mt-4| dt$$

(i) $m \leq 2$ 일 때

$$\int_0^2 |mt-4| dt = \int_0^2 (-mt+4) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}mt^2+4t \right]_0^2 = -2m+8$$

이므로 $-2m+8=10$, $m=-1$

(ii) $m > 2$ 일 때

$$\int_0^2 |mt-4| dt$$

$$= \int_0^{\frac{4}{m}} |mt-4| dt + \int_{\frac{4}{m}}^2 |mt-4| dt$$

$$= \int_0^{\frac{4}{m}} (-mt+4) dt + \int_{\frac{4}{m}}^2 (mt-4) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}mt^2+4t \right]_0^{\frac{4}{m}} + \left[\frac{1}{2}mt^2-4t \right]_{\frac{4}{m}}^2$$

$$= 2m-8+\frac{16}{m}$$

$$\text{이므로 } 2m-8+\frac{16}{m}=10$$

$$m^2-9m+8=(m-1)(m-8)=0$$

$$m > 2 \text{ 이므로 } m=8$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 m 의 값의 합은
 $-1+8=7$

241) [정답] ⑤

[해설]

두 점 P, Q는 시각 $t=0$ 일 때 각각 점 A(1), 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 라 하자.

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도가 각각 $v_1(t)=3t^2+4t-7$, $v_2(t)=2t+4$ 이므로

$$x_1(t)=1+\int_0^t (3t^2+4t-7)dt=t^3+2t^2-7t+1$$

$$x_2(t)=8+\int_0^t (2t+4)dt=t^2+4t+8$$

두 점 P, Q 사이의 거리가 4이므로

$$|x_1(t)-x_2(t)|=4, \quad |t^3+t^2-11t-7|=4$$

(i) $t^3+t^2-11t-7=-4$ 일 때

$$t^3+t^2-11t-3=0, \quad (t-3)(t^2+4t+1)=0$$

$t > 0$ 이므로 $t=3$

(ii) $t^3+t^2-11t-7=4$ 일 때

$$t^3+t^2-11t-11=0, \quad (t+1)(t^2-11)=0$$

$t > 0$ 이므로 $t=\sqrt{11}$

(i), (ii)에 의하여 $t=3$ 일 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 된다.

점 P가 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_1(t)| dt$$

$$= \int_0^3 |3t^2+4t-7| dt$$

$$= -\int_0^1 (3t^2+4t-7)dt + \int_1^3 (3t^2+4t-7)dt$$

$$= -\left[t^3+2t^2-7t \right]_0^1 + \left[t^3+2t^2-7t \right]_1^3$$

$$= 32$$

242) [정답] ④

[해설]

시각 t ($t \geq 0$)에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 라 하면

$$x_1(t)=t^3-3t^2-2t, \quad x_2(t)=-t^2+6t$$

$$x_1(t)-x_2(t)=t^3-2t^2-8t=t(t+2)(t-4)=0 \text{에서}$$

두 점 P, Q가 다시 만날 때의 시각은 $t=4$ 이다. 점 Q가 시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v_2(t)| dt = \int_0^4 |-2t+6| dt$$

$$= \int_0^3 |-2t+6| dt + \int_3^4 |-2t+6| dt$$

$$= \int_0^3 (-2t+6)dt + \int_3^4 (2t-6)dt$$

$$= \left[-t^2+6t \right]_0^3 + \left[t^2-6t \right]_3^4 = 9+1=10$$