제 2 교시

2022학년도 사관학교 1차 선발 시험

수학 영역

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

미적

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sum_{k=1}^{9} k(2k+1)$의 값은? [2점]

① 600 ② 605 ③ 610 ④ 615 ⑤ 620

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x+a}{x-2} = b$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 1, \quad \frac{a_4+a_5}{a_2+a_3} = 4$$

일 때, a_9의 값은? [3점]

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

4. 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = 4x^3 + ax$$

이고 $f(0) = -2$, $f(1) = 1$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

5. $\sqrt[m]{64} \times \sqrt[n]{81}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? [3점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

6. 함수 $f(x) = x^3 - 4x^2 + ax + 6$ 에 대하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h \times f(h)} = 1$$

일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

7. 함수 $f(x) = \cos^2 x - 4\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ 의 최댓값은? [3점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

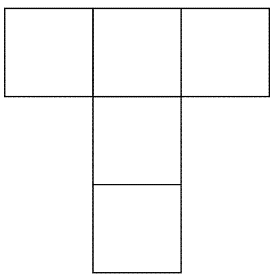
8. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5a & (x<a) \\ -2x+4 & (x\ge a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(-x)f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

9. 그림과 같은 5개의 칸에 5개의 수 $\log_a 2$, $\log_a 4$, $\log_a 8$, $\log_a 32$, $\log_a 128$을 한 칸에 하나씩 적는다. 가로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합과 세로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합이 15로 서로 같을 때, a의 값은? [4점]



① $2^{\frac{1}{3}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ 2 ④ $2^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{3}}$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t,\quad v_2(t)=2t$$

이다. 두 점 P, Q가 시각 $t=a\,(a>0)$에서 만날 때, 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

11. 첫째항이 1 인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$$

라 하자. $\dfrac{S_{10}}{T_{10}} = 6$일 때, T_{37}의 값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

12. 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 5 & (-1 \le x \le 1) \\ x^2 - 4x + a & (1 < x \le 3) \end{cases}$$

의 최댓값과 최솟값의 합이 0일 때, $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값은?

(단, a는 상수이다.) [4점]

① -5 ② $-\dfrac{9}{2}$ ③ -4 ④ $-\dfrac{7}{2}$ ⑤ -3

13. $a>1$인 실수 a에 대하여 좌표평면에 두 곡선

$$y=a^x,\ y=\left|a^{-x-1}-1\right|$$

이 있다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 곡선 $y=\left|a^{-x-1}-1\right|$은 점 $(-1,0)$을 지난다.

ㄴ. $a=4$이면 두 곡선의 교점의 개수는 2이다.

ㄷ. $a>4$이면 두 곡선의 모든 교점의 x좌표의 합은 -2보다 크다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 함수 $f(x)=x^3-x$와 상수 $a\,(a>-1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(-1,f(-1))$, $(a,f(a))$를 지나는 직선을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ g(x) & (-1\le x\le a) \\ f(x-m)+n & (x>a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(나) 함수 $h(x)$는 일대일대응이다.

$m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이다.) [4점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

(가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다. (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n} = a_3 \times a_n + 1$, $a_{2n+1} = 2a_n - a_2$ 이다.

$a_1 = m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은? [4점]

① -53 ② -51 ③ -49 ④ -47 ⑤ -45

단답형

16. 함수 $f(x) = (x+3)(x^3+x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

17. $0 \le x < 8$일 때, 방정식 $\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{3}{4}$의 모든 해의 합을 구하시오. [3점]

18. 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식

$$x^3-5x^2+3x+n \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [3점]

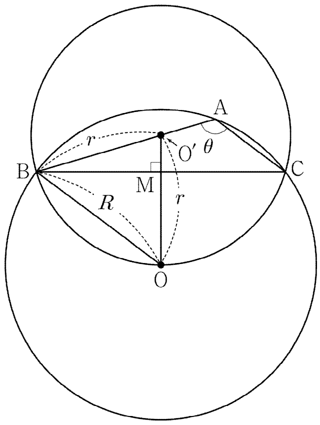
19. 함수 $f(x)=\log_2 kx$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(5)$의 값을 구하시오. (단, k는 0이 아닌 상수이고, O는 원점이다.) [3점]

20. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{a}x^2 & (-a \leq x \leq a) \\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은 S이다. $40S$의 값을 구하시오. [4점]

21. $\angle \mathrm{BAC} = \theta \left(\frac{2}{3}\pi \le x < \frac{3}{4}\pi \right)$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 세 점 B, O, C를 지나는 원의 중심을 O′이라 하자. 다음은 점 O′이 선분 AB 위에 있을 때, $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 값을 θ에 대한 식으로 나타내는 과정이다.



> 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여
>
> $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta} = 2R$
>
> 세 점 B, O, C를 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하자.
> 선분 O′O는 선분 BC를 수직이등분하므로 이 두 선분의 교점을 M이라 하면
>
> $\overline{\mathrm{O'M}} = r - \overline{\mathrm{OM}} = r - |R\cos\theta|$
>
> 직각삼각형 O′BM에서
>
> $R = \boxed{\text{(가)}} \times r$
>
> 이므로
>
> $\sin(\angle \mathrm{O'BM}) = \boxed{\text{(나)}}$
>
> 따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
>
> $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \boxed{\text{(다)}}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$라 하자. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{10}}{5}$인 α, β에 대하여 $f(\alpha) + g(\beta) + \left\{ h\left(\frac{2}{3}\pi \right) \right\}^2 = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_0^x (x-2)f(s)\,ds$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y = tx$와 곡선 $y = g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(4)$의 값의 합을 구하시오. [4점]

> $g(k) = 0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 함수 $h(t)$는 $t = -k$에서 불연속이다.

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-\sqrt{2n^2+1}\right)=1$ 일 때, ab의 값은?

(단, a, b는 상수이다.) [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

24. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+3k}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}\ln 2$ ② $\frac{2}{3}\ln 2$ ③ $\ln 2$ ④ $\frac{4}{3}\ln 2$ ⑤ $\frac{5}{3}\ln 2$

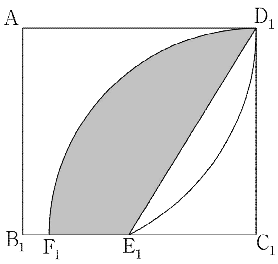
25. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

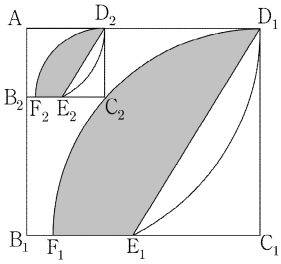
$$x=e^{t}\cos(\sqrt{3}t)-1,\quad y=e^{t}\sin(\sqrt{3}t)+1\ \ (0\le t\le \ln 7)$$

의 길이는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

26. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}}=2$, $\overline{\mathrm{AD_1}}=\sqrt{5}$인 직각사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD_1}}$인 원과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 교점을 $\mathrm{E_1}$, 중심이 $\mathrm{C_1}$이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{C_1D_1}}$인 원과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 교점을 $\mathrm{F_1}$이라 하자.
호 $\mathrm{D_1F_1}$과 두 선분 $\mathrm{D_1E_1}$, $\mathrm{F_1E_1}$로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{AB_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 호 $\mathrm{D_1F_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AD_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{AB_2}}:\overline{\mathrm{AD_2}}=2:\sqrt{5}$인 직사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다.
중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD_2}}$인 원과 선분 $\mathrm{B_2C_2}$의 교점을 $\mathrm{E_2}$, 중심이 $\mathrm{C_2}$이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{C_2D_2}}$인 원과 선분 $\mathrm{B_2C_2}$의 교점을 $\mathrm{F_2}$라 하자. 호 $\mathrm{D_2F_2}$와 두 선분 $\mathrm{D_2E_2}$, $\mathrm{F_2E_2}$로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]





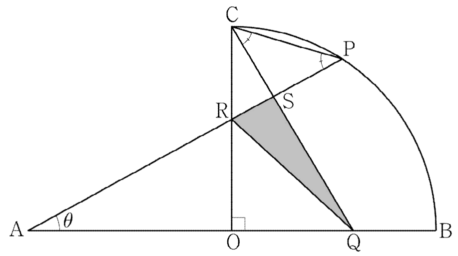
① $\dfrac{8\pi+8-8\sqrt{5}}{7}$ ② $\dfrac{8\pi+8-7\sqrt{5}}{7}$ ③ $\dfrac{9\pi+9-9\sqrt{5}}{8}$
④ $\dfrac{9\pi+9-8\sqrt{5}}{8}$ ⑤ $\dfrac{10\pi+10-10\sqrt{5}}{9}$

27. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(2x^2+2x+1)\ (x>0)$과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $f'(2\ln 5)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{14}$ ② $\frac{13}{7}$ ③ $\frac{27}{14}$ ④ 2 ⑤ $\frac{29}{14}$

28. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OB를 반지름으로 하는 사분원 OBC가 있다. 호 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 OB 위의 점 Q가 $\angle \mathrm{APC} = \angle \mathrm{PCQ}$를 만족시킨다. 선분 AP가 두 선분 CO, CQ와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$일 때, 삼각형 RQS의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4} \text{ 이다.}\right)$ [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

단답형

29. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-1 \le x \le 1$에서 $f(x) < 0$이다.
>
> (나) $\int_{-1}^{0} |f(x)\sin x|\,dx = 2$, $\int_{0}^{1} |f(x)\sin x|\,dx = 3$

함수 $g(x) = \int_{-1}^{x} |f(t)\sin t|\,dt$에 대하여

$\int_{-1}^{1} f(-x)g(-x)\sin x\,dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x \le 2) \\ \dfrac{f(x)}{x-1} & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $g(2) \ne 0$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$가 $x = a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.
>
> (다) $g(k) = 0$, $g'(k) = \frac{16}{3}$인 실수 k가 존재한다.

함수 $g(x)$의 극솟값이 p일 때, p^2의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.