Series.

수Ⅰ·수Ⅱ·미적분

Σ (2026학년도 6월 모의평가 주요 문항)

Team_Archive.

Team_Archive.

윤우성 (서울시립대학교 수학과 재학)
15, 21, 22, 28, 30 제작, 유사 기출 수집, 교재 제작.

김창섭 (서울시립대학교 수학과 재학)
14 제작, 15 제작 도움

Chapter. I

수 I & 수 II

01. 26학년도 6월 모의평가 15번

상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\leq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다. (나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

About. 26학년도 6월 모의평가 15번

26학년도 6월 모의 15번 문항은 주어진 조건을 어떻게 받아들이느냐에 따라 체감 난이도는 명확히 갈렸을 것으로 예상됩니다.

우미분계수의 존재성이라는 조건을 통하여 삼차함수 $f(x)$의 개형추론을 시도하는 다소 신박한 느낌의 문항이었습니다. 비슷하게 기억나는 문항은 [19사관30_나형]; 새롭게 정의한 함수의 우극한값을 제시하고, 이를 통해 원시함수를 추론하는 문항정도가 떠오릅니다. 두 문항의 유사도는 높은 편은 아니나, 비슷한 표현법이 제시 되어있어 첨부해둡니다. 2번 문항에 첨부된 [230322] 문항도 비슷한 표현법이라고 생각될 수 있겠습니다.

본격적인 [260615] 문항에 대한 분석을 진행해보겠습니다. 구간별로 정의된 $g(x)$라는 함수가

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\leq 1) \end{cases}$$

와 같이 비교적 쉬운 형태로 제시되었습니다. 구간의 명확한 제시가 한 몫을 했죠.

• 구간 $|x|>1$에선 $f(x)$를 $|k|$만큼 들어올리거나 내리면 되겠구나.

• 구간 $|x|\leq 1$에선 $f(x)$를 x축을 기준으로 뒤집으면 되겠구나.

와 같이 간단하게 받아들일 수 있었습니다. ~~이마저도 해결하지 못하였다면 당신은 허수.~~

이 문항에서 고전한 학생들 중 대다수는 $g(x)$에 대한 기초적인 해석을 금방 마무리 지었지만 (가) 조건 해석에서 가로막혔을 것으로 보여집니다. 우극한이 항상 존재하며..... 0이하이려면 어떻게 해야할까요...?

차근차근 해석해 나가보죠. 사실 $|x|=1$인 경우를 제외한 모든 실수 x에서는 다항함수의 형태를 따라가기에, 우미분계수와 좌미분계수가 같을 수 밖에 없다는 것을 받아들이고 가면 편합니다.

극단적인 상황부터 먼저 바라볼게요. x가 ∞로 다가갈 때 또한 극한값이 0이하여야만 하므로 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수가 되는 것은 자명합니다.

이정도의 해석만 충분히 해줘도, 구간 $|x|>1$과 $|x|<1$에서 $g(x)$는 감소해야만 하고, $|x|=1$에서만 특수한 상황이겠구나를 짐작할 수 있습니다.

미리 진행해뒀던 $g(x)$의 해석을 통해 구간 $|x|<1$에선 원시함수 $f(x)$를 뒤집어서 감소함수를 만들어야함을 눈치챘으면, 원시함수 $f(x)$는 구간 $|x|<1$에서 증가했음을 알 수 있습니다.

정리하면, 삼차함수 $f(x)$는 최고차항이 음수이고, $x=-1$에서 극소를, $x=1$에서 극대를 갖는 함수임을 보다 쉽게 처리할 수 있습니다.

다만, 여기서 주의해야할 점은 함수 $g(x)$의 구간입니다. 등호가 구간 $|x|\leq 1$에 붙어있음을 잘 생각해줘야합니다.

제가 느낀 이 문항의 출제의도는 "등호가 저렇게 제시된다면 *$x=-1$에서 $g(x)$가 독자적으로 우미분계수가 존재*하는 것을 알고있니?"를 묻고 싶었던 것 아닐까 싶습니다. *반대로 $x=1$에서는 연속인 상황을 만들어주어야 우미분계수의 값이 존재하게 됩니다.* 이 마지막 해석 과정에서 (나) 조건이 활용되고 함수가 확정될 수 있도록 설계가 되어있습니다. 2줄이 넘어가는 조건인데 사실은 크게 중요한 조건이라고 보긴 어려웠습니다. 사실 저도 (나) 조건에 실망했어요. 이럴거면 '극댓값이 13이다'와 같은 조건으로 간결했으면 좋았을 것 같네요. ~~(불연속이면 극대가 될 수 없지 않나요와 같은 헛소리는 안받습니다.)~~

[260615] 문항은 제 입장에선 난이도와 문제 세팅에 있어, 몇가지 아쉬움이 남는 것은 맞으나 뜯어보면 분명히 배워갈만한 점이 충분하다고 생각이 듭니다. 여러 아쉬운 점들을 보완하여 15번 문항에 대한 **변형문항**을 제작하여 첨부해뒀으니 꼭 풀어보시길 바랍니다.

01.1 19학년도 사관학교 나형 30번

최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재하지 않을 때, $g(t)=0$이다.
> (나) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재할 때, $g(t)$는 $f(x)=t$의 실근의 최댓값이다.

함수 $g(t)$가 $t=k$, $t=30$에서 불연속이고

$$\lim_{t \to k+} g(t) = -2, \quad \lim_{t \to 30+} g(t) = 1$$

일 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, $k<30$) [4점]

01.2 26학년도 6월 모의평가 15번 *변형*

양수 k와 $f(0)=0$인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -f(x)+k & (f(x) \le x) \\ f(x) & (f(x) > x) \end{cases}$$

가 미분불가능한 점이 존재하고 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a-} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 $f'(a)$ 이하가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가
> $0<k \le 2$ 또는 $4 \le k < \alpha$이다.

$f'\left(\frac{k}{4}\right)$의 최댓값을 β라 할 때, $12(\alpha+\beta)$의 값을 구하시오. (단, α, β는 상수이다.) [4점]

Commentary.

본 변형문항은 $f(x)$를 사차함수로, k를 양수로 바꾸며 새로운 함수 $g(x)$를 기존의 함수보다 보다 복잡하게 변형하였습니다. 벌써 체감 난이도가 확 올라가는 것이 느껴지시나요? 그만큼 [260615] 문항의 설계가 단순하다는 것을 알 수 있습니다. 박스 조건에선 기존의 우미분계수를 좌미분계수로, 0을 $f'(a)$로 변경하였습니다. 또한 (나) 조건을 과감히 삭제하고, $f'\left(\dfrac{k}{4}\right)$의 최댓값을 구하도록 바꾸었습니다.

[260615] 문항 분석과 같은 태도로 접근해보도록 하겠습니다. 구간별로 정의된 $g(x)$라는 함수가

$$g(x)=\begin{cases} -f(x)+k & (f(x)\le x) \\ f(x) & (f(x)>x) \end{cases}$$

와 같이 $y=x$ 가 경계로 제시되었습니다.

• 만약 함수 $f(x)$가 $y=x$보다 위쪽에 존재한다면 $f(x)$ 그대로 유지하면 되겠구나.

• 만약 함수 $f(x)$가 $y=x$보다 아래쪽에 존재한다면 $f(x)$를 x축을 기준으로 뒤집고, k만큼 들어올리면 되겠구나.

정도로 판단을 내릴 수 있겠습니다. 이제 박스 조건을 해석해보도록 하죠.

모든 실수 a에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 $f'(a)$ 이하가 되어야 한다고 제시되었습니다.

우선, [260615] 문항처럼 **경계점이 아닌 부분**에선 항상 좌미분계수가 존재하는 것을 알 수 있습니다. 더하여, **함수 $f(x)$가 그대로 유지되는 구간**에서는 항상 좌미분계수가 변함이 없기에, $f'(a)$ 이하 조건 또한 만족시킵니다.

이와 같은 분석 뒤에는 자연스레 다음과 같은 의문이 들어야합니다.

• $f(x)$를 x축을 기준으로 뒤집고, k만큼 들어올리는 구간에서는 어떤 현상이 발생해야 할까?

당연히도 이 부분에서 출제자의 의도가 느껴져야 합니다. 앞선 해석은, 기본적인 해석일 뿐, 이 상황이 언제 발생하고, 어떻게 해결할 지를 고민해야 합니다.

함수 $g(x)$에 따르면, 해당 구간에서의 함수식은 $-f(x)+k$입니다. 즉, 미분계수의 부호는 정반대가 된다는 것입니다. 그런데 뒤집었을 때의 미분계수 값이 $f'(a)$ 이하가 되어야한다?

• 해당 구간에서는 $f'(x)$의 값이 0혹은 양수가 되어야 하겠구나! ($f'(x)\ge 0$)

와 같은 결론에 도달해야 합니다. 이때, 자연스럽게 $f(x)$의 최고차항의 부호가 결정되죠. 당연히 양수입니다. 만약 음수였다면, $f(x)\le x$이면서 $f'(x)<0$인 구간이 무조건 발생합니다. (극단적인 상황을 생각하세요.)

이제 자연스레 $f(0)=0$라는 조건의 역사를 알 수 있게 됩니다. 이 조건이 $f(x)=x$의 경계점을 제시한 것이겠죠. 머리 속에 다양한 상황이 그려질 것입니다. 남은 조건

• k는 양수
• 미분이 불가능한 점이 존재한다.
• 모든 실수 k의 값의 범위가 $0<k\le 2$ 또는 $4\le k<\alpha$이다.

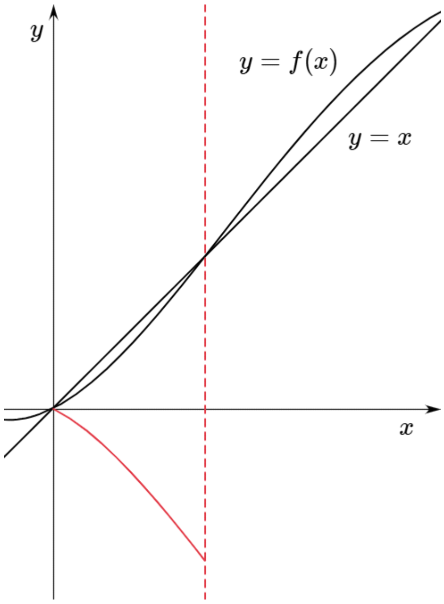
을 한번에 만족하는 상황을 찾으려고 노력하는 것 보단, 이 상황은 왜 안되는지 단계적으로 처리해나가는 것이 효율적이겠죠.

일단 $y=f(x)$와 $y=x$가
• 4중근을 갖는 상황
• 중근 1개와 허근 2개를 갖는 상황
• 서로 다른 중근 2개를 갖는 상황
은 미분이 불가능한 점이 발생하지 않으므로 배제하도

록 하겠습니다.

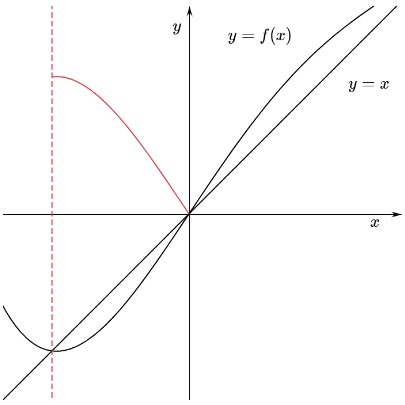
다시 돌아가 $f(0)=0$ 조건을 어떻게 처리할지 고민해보도록 하죠.

만약 $f(x)=x$의 실근 중 가장 작은 실근이 0이면서 접하지 않는다면 어떻게 될까요?



위 그림과 같은 상황이 발생하게 될 것이며, **k가 양수**라는 조건과 **좌미분계수가 항상 존재해야 한다**는 조건이 서로 양립이 불가능하다는 것을 알 수 있습니다.

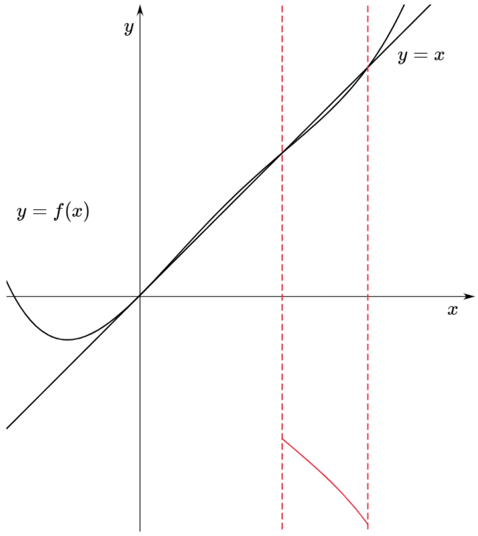
그럼 $f(x)=x$의 실근 중 두 번째로 작은 실근이 0이면서 접하지 않는다면 어떻게 될까요?



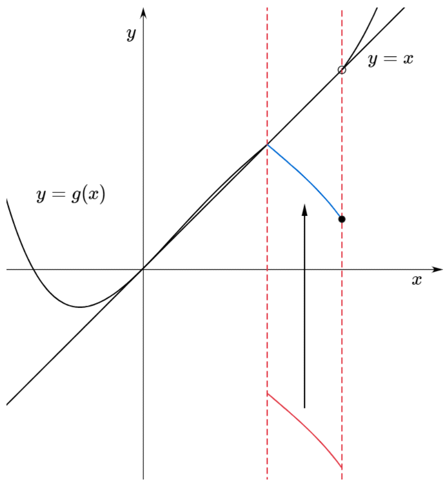
역시 같은 이유로 모순이 되는 것을 알 수 있습니다. 정확히 같은 이유로 $f(x)=x$가 $x=0$에서 접해야 함을 알 수 있습니다.

여기가 중요했습니다.

앞서 배제한 상황을 잘 생각해보고, k가 양수임을 잘 고려하여 보면, 함수 $f(x)$는 $y=x$와 $x=0$에서 접하며 서로 다른 두 개의 근을 더 가져야합니다. 다음 그림과 같이요.



여기서, 좌미분계수가 존재하려면 k만큼 들어올렸을 때 다음 그림과 같아져야하겠죠.



정답 상황은 확정이 되었습니다. 이때 $x=0$이 아닌 첫 번째 실근을 t라고 해보죠. 그럼 $f(t)=t$가 될 것이고, $-f(t)=-t$가 됩니다. 즉, $-t+k=t$가 되어야하므로, 첫 번째 실근의 x좌표는 $\frac{k}{2}$가 됩니다. (사실 $y=x$니까 이등변삼각형으로 접근하면 더 빠르게 처리할 수 있겠죠.)

따라서, $f(x)$의 함수 식을 다음과 같습니다.

$$f(x)-x=px^2\left(x-\frac{k}{2}\right)(x-u)$$

단, $p>0$이고 $\frac{k}{2}<u$입니다. 무슨 조건이 남았을까요?

구간 $\left[\frac{k}{2}, u\right]$에서의 미분계수는 모두 0 또는 양수가 되어야만 하는 것을 잊지 않으셨어야합니다. 이는

$$f'\left(\frac{k}{2}\right)\geq 0$$

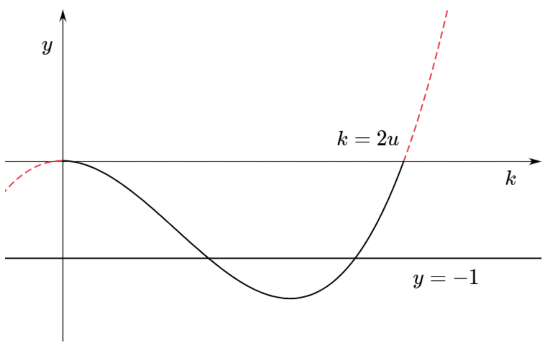
와 필요충분조건이 됩니다. 계산하면

$$f'\left(\frac{k}{2}\right)=p\times\frac{k^2}{4}\times\left(\frac{k}{2}-u\right)+1\ \geq 0$$

입니다. 정리하면

$$\frac{p}{4}k^2\left(\frac{k}{2}-u\right)\geq -1$$

입니다. 좌변을 k에 대한 함수로 인정할 수 있으면 다음과 같은 삼차함수 개형을 그릴 수 있습니다.



여기서 k는 양수이고, $\frac{k}{2}<u$임을 잘 생각해주셔야합니다. 따라서, $\alpha=2u$임을 알 수 있습니다.

이때, 모든 실수 k의 값의 범위를 $0<k\leq 2$ 또는 $4\leq k<\alpha$로 제시한 것은

함수 $y=\frac{p}{4}k^2\left(\frac{k}{2}-u\right)$와 직선 $y=-1$

의 교점이 $x=2$와 $x=4$라는 것을 보장해준 것입니다. 계산하면

$$p(1-u)=-1\,,\ \ 4p(2-u)=-1$$

$$\Rightarrow p=\frac{3}{4}\,,\ \ u=\frac{7}{3}\,,\ \ \alpha=\frac{14}{3}$$

입니다. 따라서 $f(x)$의 함수식은

$$f(x)=\frac{3}{4}x^2\left(x-\frac{k}{2}\right)\left(x-\frac{7}{3}\right)+x$$

이 되며, $f'\left(\frac{k}{4}\right)$값은

$$f'\left(\frac{k}{4}\right)=-\frac{1}{64}k^2\left(\frac{3}{2}k-7\right)+1$$

이므로 주어진 구간 $0<k\leq 2$ 또는 $4\leq k<\frac{14}{3}$에서의 최댓값은 $f(2)=f(4)=\frac{5}{4}$임을 알 수 있습니다.

마무리하면, $\alpha=\frac{14}{3}$, $\beta=\frac{5}{4}$이므로 구하는 값은

$12\left(\frac{14}{3}+\frac{5}{4}\right)=\boxed{71}$ 입니다.

02. 26학년도 6월 모의평가 21번

함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여 두 극한값
>
> $$\lim_{x \to a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}, \quad \lim_{x \to a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$
>
> 이 모두 존재한다.

$g(-1)$의 값을 구하시오.

About. 26학년도 6월 모의평가 21번

오랜만에 함수의 극한에서 난도 높은 문항이 출제되었습니다. ~~(난도가 높진 않은 것 같은데 21번이니 난도가 높다고 표현만 할게요 그냥)~~

여러분들은 이 문항에 대하여 어떤 느낌을 받으셨을지는 모르겠습니다만, 필자는 이 문항이 과거의 소재가 최근 유형의 탈을 쓰고 재등장한 것으로 느껴졌습니다.

[150621_A형]을 살펴보도록 하죠. (밑에 있습니다.)

(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2) \quad (n=1, 2, 3, 4)$

위 (나) 조건의 논리가 [260621]과 매우 유사한 구조를 띄고 있습니다. 문항이 아예 같을수는 없다는 것을 감안하면 정말 비슷한 구조를 갖고있다는 것을 느낄 수 있겠습니다.

[260621] 문항을 먼저 살펴보자면

$f(x)=0$의 근이 $x=1$, $x=2$이고 각각 1차로 만나기 때문에 극한값

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$$

이 존재하기 위해선 $g(1)=g(2)=0$이 되어야만 합니다.

이제 $g(1)=g(2)=0$이라는 **정보가 연계**되어 극한값

$$\lim_{x \to a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

이 존재하기 위해서는 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=1$과 $x=2$에서 **서로 접해야만 한다는 것**을 뽑아내면 너무 쉽게 문항이 풀리게 됩니다. 허무하긴 하죠.

[150621_A형] 문항 또한

(가) $g(1)=0$ 조건이

(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2) \quad (n=1, 2, 3, 4)$

조건의 $n=1$일 때

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

의 상황으로 연계되어, $g(1)=0$이 몇차로 x축과 만나느냐에 따라 다양한 상황이 연출됩니다. 이러한 상황 속에서 $n=2$일 때

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

또한 동시에 고려해야하는 멋진 문항이죠.

[260621]을 설계하면서 평가원 내부에서도 많은 고민이 있었으리라 생각됩니다. 비교적 최근에 출제 된 함수의 극한이 결합된 문제들을 검토해보며 문항의 형태를 잡고자 노력했던 것 같습니다.

우선 [240915], [230622], [230322]를 살펴보도록하죠.

[240915] 문항은 난이도 자체는 터무니 없이 쉽죠. 형태를 보자면,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x) \neq 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

로 제시하며 겉보기 난이도만 높여놨습니다. 얘는 이 정도면 충분합니다.

[230622] 이 친구가 진짜죠. 난이도요? 만만치 않아요. 형태부터

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} - |g(t)|}{(x+3)^2}$$

이러는데 손대기부터가 무섭죠. 이런 느낌을 원했던 것 같아요.

[230322] 도 평가원 문항은 아니지만 뜯어보자면
사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|f(x)-t|$$

라고 학생들이 버거워하는 절댓값 함수로 제시해놓고

$$\lim_{x \to k} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$$

의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라며 새로운 함수를 정의합니다. 문항 설계부터 이미 무너진 학생들이 있겠죠.

필자는 [260621]을 다음과 같이 평가할 수 있을 것 같습니다.

𝟙. **[240915], [230622], [230322] 문항**들처럼 **<u>겉보기 난이도</u>를 올려두고는 싶은데, 너무 심하지는 않게** 설계를 해두고 싶었다.

𝟚. 하지만, **[240915] 처럼** 막상 문항을 풀었을 때, **누구든 풀 수 있도록** 문항을 만들고 싶다.

필자가 이러한 분석을 한 배경이 있습니다.

𝟙. **애초에 [15], [22], [30]번 문항을 건드리지도 않는 학생들이 많다.** 더하여 사교육 시장이 이에 맞춰 The 27, 서킷 등 [15], [22], [30]번 문항을 배제한 사설 모의들이 나오기도 한다. 이에 따라 평가원은 [15], [22] 또한 도전만 한다면 누구든 풀 수 있도록 난이도 조절을 하고자 하는 것 같다.

𝟚. **공통을 쉽게 내야만 선택과목 체제의 표점 유불리가 갈리지 않는다.** 실제로 이번 26학년도 6월 모의는 성공적인 표점 분포를 이루어냈습니다. 하지만 **[15]번이 갖고 있는 위상**을 생각해보면 겉보기 난이도를 대폭 낮출 수는 없다.

지극히 주관적인 평가긴하지만, 나름 설득력있는 칼럼이라 생각합니다. 그러면 이 칼럼을 읽는 독자라면 어떠한 방향성을 잡고 공부를 해야할까요?

𝟙. 기출을 무시해서는 안된다. 뒤에 있을 22번 문항에서도, 미적분에서도 반복하여 강조드리겠지만, 특히나 **이번 [26학년도 6월 모의평가]는 [24학년도 9월 모의평가]의 느낌이 상당히 많이 드러나고 있으며 기출에 대한 강조**를 하고 있다는 것을 알 수 있습니다.

𝟚. **거르는 문항 없이 모든 문항을 손대야한다.** 공통 시험지에 한정하여 **모든 문항이 크게 어렵지 않게 잔잔하게 출제**가 되고 있는 시험지인만큼, 모든 문항을 시도해봐야 합니다. 이를 위해선 실수 없이 계산하는 능력, 시간 분배 능력, 체력 등이 필요하겠습니다.

물론, 뒤에 있을 9월 모의 및 수능 또한 이런 기조로 출제가 된다는 보장은 없습니다만 6월 모의평가를 분석함에 있어서는 이정도면 충분할 것 같습니다.

이번 [260615] 문항에 대해서는 [150621_A형]이라는 충분한 대체 기출이 있으므로 따로 변형문제를 제작하지는 않았습니다. 뒤에 첨부해드린 [150621_A형], [230622], [230322] 문항들을 꼭 풀어보시며 최근 평가원의 함수의 극한 출제 경향을 몸소 느껴보시길 바라겠습니다.

02.1 15학년도 6월 모의평가 A형 21번

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$
(나) $\lim_{x \to n} \dfrac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2) \quad (n=1, 2, 3, 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

02.2 24학년도 9월 모의평가 15번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이라 하자. $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

02.3 23학년도 6월 모의평가 22번

두 양수 a, b $(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이
> 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

02.4 23학년도 3월 학력평가 22번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때, $\displaystyle\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{t\to 4+} h(t)=5$
>
> (나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

03. 26학년도 6월 모의평가 22번

$k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2}\,,\ \ y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

이 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

About. 26학년도 6월 모의평가 22번

감히 제가 평가하기엔 이번 6월 모의평가 22번은 논란의 여지가 충분히 생길 수 있다는 생각이 든 문항입니다.

Q.1 점 A의 좌표를 어떻게 구하는데? 그리고 걔 정체가 대체 뭔데?

Q.2 기울기가 -1인 직선과 곡선 $y=2^{x-2}-3$이 갑자기 왜 주어진거지?

Q.3 그래서 k의 값은 뭐고, 왜 하필 $k+\log_2 k$의 값을 구하라고 하는건데?

와 같은 논쟁이 충분히 일어날 수 있다고 생각합니다.

하지만, 제가 평기하기에는 이번 22번은 명백히 기출의 중요성을 피력하고 있는 문항입니다.

과거 기출 [140313_B형], [180309_가형] 에서도 볼 수 있듯, 이미 지수함수의 좌표 연립은 이미 여러번 출제되었습니다.

$$2^x+\frac{k}{2}=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

$$\text{Let } 2^x \coloneqq t,\ t+\frac{k}{2}=\frac{k}{t}+k-2$$

$$\Rightarrow 2t^2+(4-k)t-2k=0$$

$$\Rightarrow (t+2)(2t-k)=0$$

$$\therefore t=\frac{k}{2}\ (\because t>0),\ \mathrm{A}\left(\log_2\frac{k}{2}, k\right)$$

이 부분까지는 누구나 무난히 풀이했을 것으로 예상합니다. 다만, 그래서 점 A의 정체가 무엇이냐는 다른 질문으로 귀결됩니다.

이것에 대한 제 답변은 [151017_A형]에 있습니다. 실제로 아예 같은 문항 아니야? 라고 싶을 정도로 유사합니다. [151017_A형] 문항의 점 C의 좌표는 $(\log_2 a, a)$로 나타낼 수 있습니다. $y=2^x$ 위의 점이 되죠.

이 해석방법에 따르면 저희는 $\mathrm{A}\left(\log_2\frac{k}{2}, k\right)$의 좌표 또한 역함수적으로 접근할 수 있습니다.

한 번 거꾸로 생각해볼까요?

$\mathrm{A}'\left(k, \log_2\frac{k}{2}\right)$를 생각하고 나서 점 A를 추론해보죠. [151017_A형]의 IDEA를 비슷하게 적용시켜서요.

점 $\mathrm{A}'\left(k, \log_2\frac{k}{2}\right)$은 함수

$$y=\log_2 x-1$$

위의 점인 것이 자명하므로, $\mathrm{A}\left(\log_2\frac{k}{2}, k\right)$는 위 함수의 역함수

$$y=2^{x+1}$$

위의 점이 되는 것을 알 수 있습니다. 기출의 힘이죠.

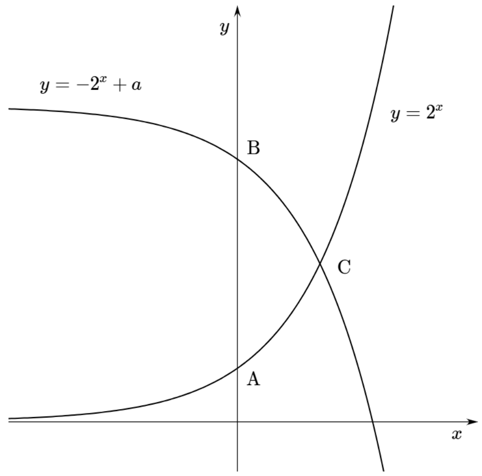
점 $\mathrm{A}\left(\log_2\frac{k}{2}, k\right)$는 함수 $y=2^{x+1}$위의 점 인 것을 해석할 수만 있다면 자연스레 기울기가 -1인 직선이 나오게 된 역사를 알 수 있게 되고, 정확한 k의 값은 알 수 없지만, 넓이를 계산하는 과정에서 $k+\log_2 k$의 값이 자연스레 나오게 되죠. [151017_A형]와 정확히 똑같은 마무리 단계입니다.

여기서 저는 자연스레 [251120] 문항이 떠올랐습니다. 해당 문항 또한 k의 값을 정확히 알아낼 수 없음에도 불구하고 정답은 구할 수 있었죠.

[260622] 문항의 총평을 드리자면 **생각보다 많은 역사를 갖고 있는 문항**이며 평가원 및 교육청의 역사를 뒤져보면 충분한 대비를 할 수 있다는 것을 말씀드립니다. 유사 기출이 충분하니, 문항의 변형보다는 첨부해드린 기출을 풀어보시는 것이 더 좋을 것이라 판단되어 본 문항은 유사 기출만을 첨부합니다.

03.1 14학년도 3월 학력평가 B형 13번

2보다 큰 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=2^x$, $y=-2^x+a$가 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선의 교점을 C라 하자. 다음 물음에 답하시오.



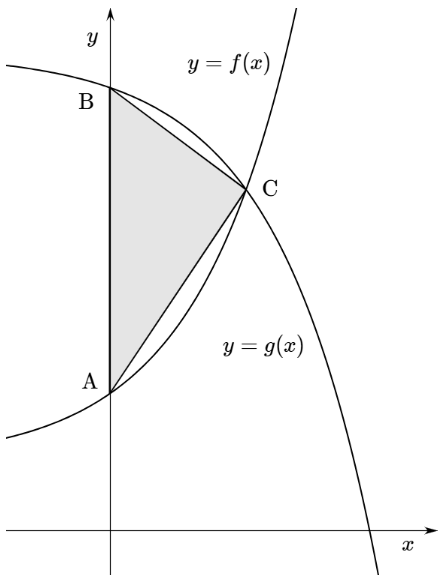
$a=6$일 때, 삼각형 ACB의 넓이는? [3점]

① $2\log_2 3$ ② $\frac{5}{2}\log_2 3$ ③ $3\log_2 3$

④ $\frac{7}{2}\log_2 3$ ⑤ $4\log_2 3$

03.2 18학년도 3월 학력평가 가형 9번

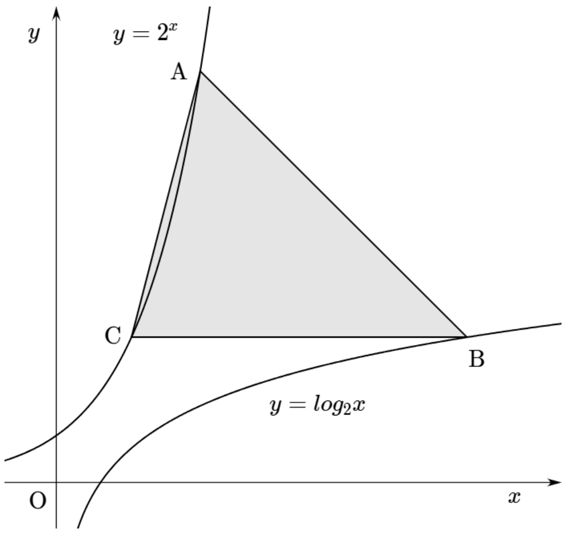
그림과 같이 두 함수 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=-2^{x-1}+7$의 그래프가 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ACB의 넓이는? [3점]



① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

03.3 15학년도 10월 학력평가 A형 17번

그림과 같이 기울기가 -1인 직선이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C라 하자. 선분 AB의 길이가 $12\sqrt{2}$, 삼각형 ABC의 넓이가 84이다. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $a-\log_2 a$의 값은? [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03.4 25학년도 수능 20번

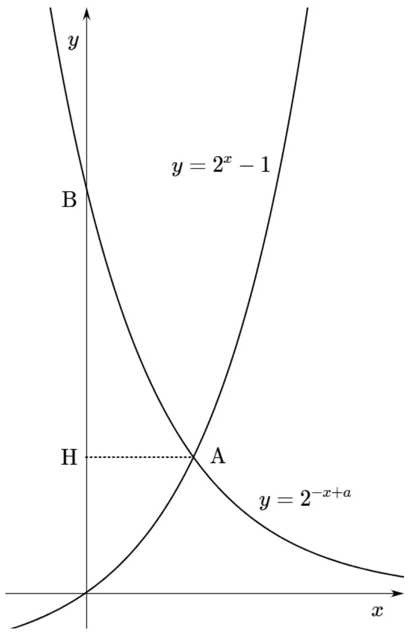
곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x>k$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 이고 $f(f(x))=3x$이다.

$f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

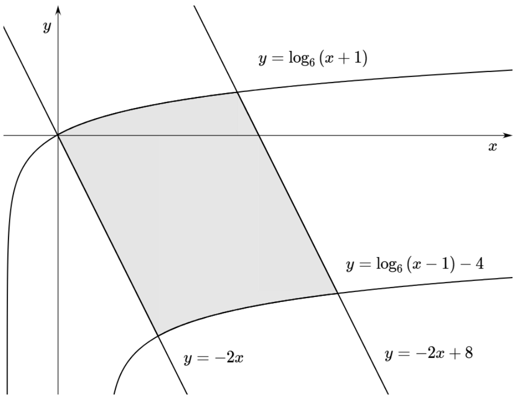
03.5 22학년도 4월 학력평가 9번

그림과 같이 두 곡선 $y=2^{-x+a}$, $y=2^{x}-1$이 만나는 점을 A, 곡선 $y=2^{-x+a}$이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{OB}}=3\times\overline{\mathrm{OH}}$이다. 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



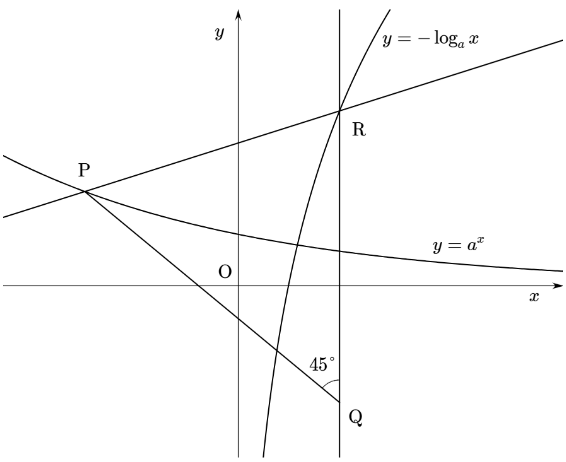
03.6 10학년도 3월 학력평가 가형 30번

그림과 같이 두 곡선 $y=\log_6(x+1)$, $y=\log_6(x-1)-4$ 와 두 직선 $y=-2x$, $y=-2x+8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]



03.7 20학년도 10월 학력평가 가형 15번

그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=a^x\ (0<a<1)$ 위의 점 P가 제2사분면에 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q와 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점 R에 대하여 $\angle PQR=45^\circ$ 이다. $\overline{PR}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이고 직선 PR의 기울기가 $\frac{1}{7}$ 일 때, 상수 a의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

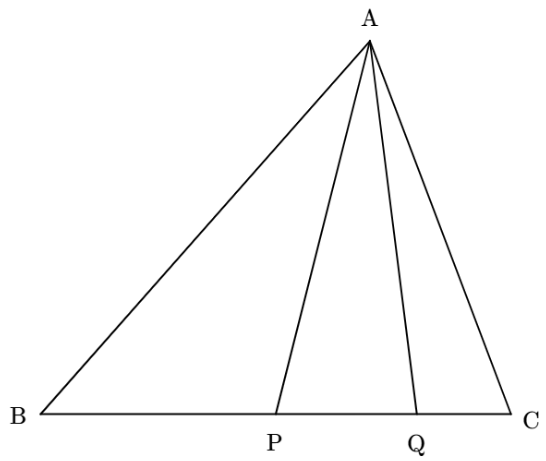
04. 26학년도 6월 모의평가 14번

$\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{7}$ 인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P, 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점을 Q라 하자.

$$\overline{\mathrm{AQ}} = 3\sqrt{2},\ \sin(\angle \mathrm{QAP}) : \sin(\angle \mathrm{AQP}) = \sqrt{2} : 3$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점]

① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$ ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



About. 26학년도 6월 모의평가 14번

14번 문제는 도형으로 출제되었습니다. 삼각형이 어떻게 확정되는지를 판별하는 능력은 평가원 도형 문제뿐만 아니라 모든 도형 문제를 풀 때 가장 중요한 능력입니다.

• 세 변의 길이를 앎으로써(SSS)
• 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 앎으로써(SAS)
• 한 변의 길이와 양 끝 각의 크기를 앎으로써(ASA)
삼각형이 확정되는지 판별할 수 있어야 합니다.

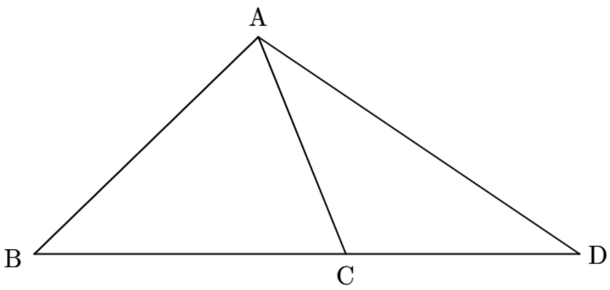
만약 어떤 문제에서 도형이 확정되지 않는다면, 그 문제는 넓이 또는 길이의 비율을 구하는 문제이거나, 넓이 또는 길이의 최댓값 또는 최솟값을 묻는 문제일 가능성이 높습니다.

판별에 성공했다면 그 삼각형의 정보를 모두 찾아내는 것은 어렵지 않습니다. 그 과정에서 계산이 복잡할 수는 있으므로, 스튜어트 정리 등의 스킬을 사용하시는 것은 본인의 자유입니다. 이번 14번 문제는 스튜어트 정리를 쓰면 편하게 풀리도록 설계됐지만, 사용하지 않더라도 계산이 크게 부담되는 문제는 아니였습니다.

유사 문항은 어떻게 삼각형이 확정되는지 관찰한 후, 길이를 차례차례 구하다 보면 자연스레 문제가 해결되도록 평이하게 출제하였습니다. 다만, 여러 접근 방식을 시도해 보시면서 계산을 줄일 방법을 고안해 보신다면 여러 가지 재밌는 해석들이 나올 것입니다.

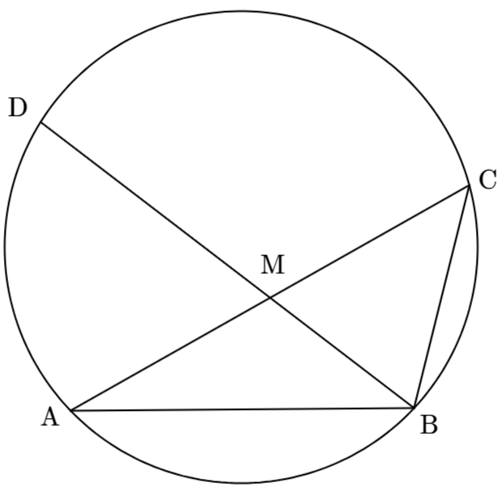
04.1 03학년도 모의평가 인문계 30번

아래 그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{CA}}=3$이고, 변 BC의 연장선 위에 점 D를 $\overline{\mathrm{CD}}=3$이 되도록 잡을 때, $\overline{\mathrm{AD}}^2$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]



04.2 23학년도 6월 모의평가 10번

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 BD의 길이는? [4점]

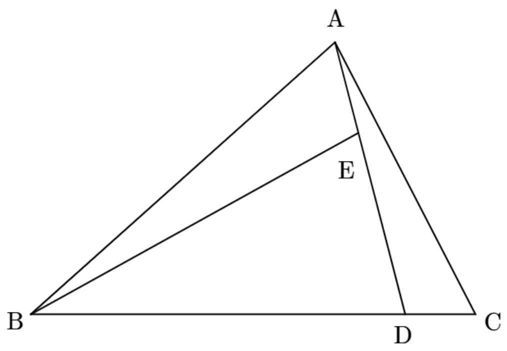


① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

04.3 26학년도 6월 모의평가 14번 *변형*

그림과 같이 삼각형 ABC와 $\cos(\angle \mathrm{ADB})=\dfrac{1}{4}$를 만족시키는 선분 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{AD}}=3$, $\overline{\mathrm{BD}}=4$이다. 선분 AD를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{DC}}=16:3$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



Commentary.

본 변형문항은 이번 14번과 비슷한 접근 방식으로 출제하고자 노력하였습니다. 특히 $\triangle\mathrm{ABD}$의 정보와 $\overline{\mathrm{BE}}$의 길이를 확정하는 데 있어서는 코사인법칙을 사용하더라도, 그 외의 방식을 사용하더라도 비슷한 속도로 구할 수 있도록 편하게 출제했습니다.

또한, 문제 속 길이 조건에 의해 $\overline{\mathrm{DC}}$의 길이가 확정되며, 우리는 $\angle\mathrm{ADC}$의 정보까지 알고 있으므로 결국 그림 속 모든 정보가 확정되며 문제가 풀리게 됩니다.

다소 허무할 수 있는 문제입니다. 실제로 이렇게 그림 속의 모든 길이를 확정하고 나면 외접원의 넓이를 구하는 것은 시간문제입니다. 하지만 이 과정에서 계산이 아마 만만치 않을 것입니다. 한 번 계산을 줄일 수 있는 방안에 대해 고안해보겠습니다.

$\triangle\mathrm{BDE}$가 이등변삼각형임은 누구나 문제를 풀며 발견하셨을 것입니다. 그러면 $\angle\mathrm{ABE}$와 $\angle\mathrm{CDA}$가 같다는 사실 또한 알 수 있습니다. 그렇다면, 닮음인 삼각형을 찾을 수 있고 $\triangle\mathrm{ABE} \sim \triangle\mathrm{CAD}$가 $4:3$ 비의 닮음이 성립함 또한 확인됩니다. 이 방식이라면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 길이를 구하는 과정이 편해질 수 있겠네요.

한편, 닮음 정보로 알 수 있는 또 다른 재밌는 사실이 있습니다. 만약 여러분께서 $\overline{\mathrm{BE}}$의 길이를 구하기 위해 점 B에서 $\overline{\mathrm{DE}}$에 수선의 발 H을 내렸다면 $\triangle\mathrm{ABH}$에서 $\cos(\angle\mathrm{BAD})$의 값을 알 수 있습니다. 이 때, $\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{ACD}$이므로 우리는 각 C의 정보까지 편하게 알아낼 수 있고, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 비교적 간단하기 때문에, 처음 해설보다는 계산이 비교적 간단해집니다.

이 풀이는 다소 사후적으로 보일 수 있으며, 시험장에서는 절대 생각해 내지 못하리라 생각하실 수도 있습니다. 그럼에도 불구하고 제가 이 풀이를 소개해드리는 이유는 도형을 바라보는 또다른 관점을 보여드리고 싶어서입니다. 특히 평가원 도형은 넓게 바라보면 바라볼수록 해석의 여지가 많아집니다.

제가 꼽는 추천 문항은 230913입니다. 얼마든지 사후적으로 해결할 수 있지만, 평가원 기출이기 때문에 수능에서 어떤 방식으로든 재등장할 수 있습니다. 특히 도형 유형에서는 사후적 풀이를 너무 배척하는 것은 좋지 않다고 생각합니다.

제가 도형을 분석할 때는 '수선'을 가장 애용합니다. 특히 코사인법칙을 수선으로 대체하여 계산하는 방식은 분석에 큰 도움이 될 때가 많습니다. 또한 계산을 줄이기에도 도움이 됩니다. 변형 문항 2.3을 보시면, 문제 조건에서 $\overline{\mathrm{BD}} = 4,\ \cos(\angle\mathrm{ADB}) = \dfrac{1}{4}$인 상황입니다. 이 상황에서 점 B에서 $\overline{\mathrm{DE}}$에 수선의 발을 내리는 것은 어쩌면 당연해 보입니다.

수선을 내린다면 그 수선이 다른 삼각형을 해석하는데 도움을 주기도 합니다. 왼쪽에 제가 쓴 코멘트를 보시면 $\overline{\mathrm{BH}}$로 $\angle\mathrm{BAD}$의 크기까지 얻어냈습니다. 유사 문항으로 첨부한 2.1에서도 점 B에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 수선을 내린다면 $\angle\mathrm{ACD}$의 정보를 알게 되어 $\triangle\mathrm{ACD}$를 바로 확정할 수 있게 되죠.

도형 분석은 반드시 필요할까요? 지금껏 그래왔다시피, 평가원에서 도형 문제는 킬러 급의 위상으로 출제된 적은 없습니다. 하지만 그럴수록 우리는 도형 분석을 소홀히 해선 안 된다 생각합니다. 오히려 준킬러 유형이기 때문에 빠르게 쳐내고 킬러 문제인 수열, 그래프 개형 추론 유형에 집중하는 것이 바람직하지 않을까 싶습니다. 평상시 여러 도형 문제를 이렇게 사후적으로 분석하는 습관을 들인다면, 시험장에서는 그렇게 분석했던 사후적 지식들이 여러분만의 사전적 풀이가 되어 결국 시험 운용에 도움이 될 것이라 확신합니다.

Chapter. Ⅱ

미적분

05. 26학년도 6월 모의평가 28번

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^{b}$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$(f(x))^5 + (f(x))^3 + ax + b = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$$

이다.

(나) $f(-3)f(3) < 0$, $f'(2) > 0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$　② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$　③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

④ $e^{-\frac{4}{3}}$　⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

About. 26학년도 6월 모의평가 28번[미적]

필자는 문항을 보자마자 [240628_미적]과 매우 유사한 형태를 띄고 있다만, 차이점은 명확하다고 느껴졌습니다. 한번 보실까요?

- $\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$
- $(f(x))^5+(f(x))^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)$

다만, 문제가 아예 같을 순 없으니, 조건 제시에서 명확한 차이를 주고자한 것 같습니다. 실제로

- $f(0)=f(2)+1$
- $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

비슷한 느낌을 유지하되, $f(x)$를 연속함수에서 이계도함수가 존재하는 함수로 변화를 주며 상황 자체에 차이를 제시했습니다. 이쯤 되면 이번 평가원의 명확한 목적이 느껴져야합니다. 제가 앞서 거듭 강조했던 기출의 중요성을 평가원 또한 강조하고 있습니다.

이러한 문항에서 제가 강조하는 역량은 "항등식에 대한 이해"입니다. 당황하지 않고 항등식을 처리할 수 있는 능력을 키워야합니다. 비슷한 문항으로는 [24수능28_미적]이 떠오르네요. 해당 문항에서는

두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$2g(t)+h(t)=k$ (k는 상수)

라는 항등식이 제시되었습니다. 문항마다 요구하는 조건이 다르겠지만, 그때마다 잘 대처할 수 있는 능력이 필요합니다.

본론으로 다시 돌아와, [260628_미적]에서 제시된 항등식

$$(f(x))^5+(f(x))^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$$

은 어떻게 받아들여야할까요?

일단 저는 다음과 같은 질문을 먼저해보겠습니다.

$\mathbb{Q}$. a, b값을 알아냈다고 쳐봅시다. $f(x)$를 양함수로 나타낼 수 있나요?

$\mathbb{A}$. 저는 자신 없는걸요?

그럼 이 문항에서의 목적의식은 어떻게 가져가야 할까요? $f(x)$의 양함수적 표현을 찾는 것이 아니라, 주어진 조건을 활용해 a, b의 값을 어떻게든 알아내는 것이 중요하겠다는 것이 되어야합니다.

저희가 일단 이계도함수의 존재성을 밝혀주었으니, 언젠간 미분을 두 번 해야만하겠다는 것은 생각하고 있어야 합니다. 그런데 저희가 밝혀야하는 상수 a, b값은 직선 $ax+b$에 달려있는 것을 잘 생각해보아야 합니다. 이 두 가지 생각이 잘 어울러 "직선은 두 번 미분하면 죽는데..?"라는 생각까지 올 수 있었으면 좋았겠습니다.

우선 미분을 한 번 해보죠.

$$5(f(x))^4f'(x)+3(f(x))^2f'(x)+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$$

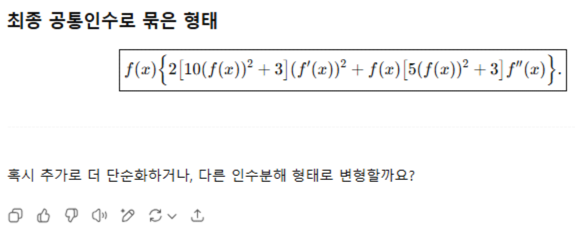
한번 더 해볼까요?

$$f(x)\left[2\left\{10(f(x))^2+3\right\}(f'(x))^2+f(x)\left\{5(f(x))^2+3\right\}f''(x)\right]$$

$$=\frac{2\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)-(2x+1)^2}{\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)^2}$$

$f(x)$를 인수로 갖는 것을 알 수 있습니다.

그런데 현실적으로 바라봅시다. 저 미분을 시험장에서 하고싶을까요? ~~저도 칼럼을 쓰기 위해 GPT한테 미분하라고 시키고~~, 문제 풀 땐 일부만 계산했어요.



현실적으로는 다음과 같은 방법이 가장 효율적일 듯 싶습니다.

$$(f(x))^5+(f(x))^3=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$$

로 식을 조작하고, 좌변만 컨트롤 하는 것입니다. 첫 번째 미분은 누구나 다 합니다.

$$5(f(x))^4f'(x)+3(f(x))^2f'(x)$$

여기서 공통인수로 묶습니다.

$$(f(x))^2\times f'(x)\times\{5(f(x))^2+3\}$$

이제 여기서 다시 한 번 미분을 한다고 생각을 해볼까요.

$$\underline{(f(x))^2}\times \underline{f'(x)\times\{5(f(x))^2+3\}}$$

곱함수 미분법이라 인정하고

$$\frac{d}{dx}((f(x))^2)=2f(x)f'(x)$$

또한 $f(x)$를 인수로 가지니, 무조건 $f(x)$를 인수로 갖는다. 정도로 일부만 해석하는 능력이 중요했어요. 물론 미적분 선택한 친구들이면 이정도의 기교는 여유롭게 해내시겠죠?

여기서 (나) 조건이 활용됩니다. 다들 아실테지만 사잇값 정리죠. 일단은 사잇값 정리에 대한 기출도 2문항 넣어드렸습니다.

하지만, 제가 이 문항에서 의외로 집중했던 부분은 사잇값 정리보단 "왜 하필 5차랑 3차로 준걸까?"였습니다. 의도가 있었을텐데 말이죠.

여기에 대한 제가 내린 결론은 미분식

$$(f(x))^2\times f'(x)\times\{5(f(x))^2+3\}$$

의 해석입니다. $f'(x)$의 부호를 거의 완벽하게 따라간다는 것을 알 수 있네요. 하지만 이게 끝은 아닐 것 같은데... 무언가 평가원이 하고싶었던 얘기들이 더 있었던 것 같은 찝찝함이 남아있습니다.

이런 관점도 취해볼 수 있겠습니다.

$$g(t)=t^5+t^3$$

이라는 함수에 대해

$$g(f(x))=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$$

입니다. 이때 $g(t)$는 t에 대한 단조증가인 함수로, 역함수가 존재하는 것을 충분히 알 수 있죠. 사실 $f(x)$는

$$f(x)=g^{-1}\left(\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)\right)$$

와 같이 표현해볼 수 있겠습니다. 결론적으로 바라보면 직선 $ax+b$가 변곡접선이 되어, 속함수도 일대일대응이 되므로 $f(x)$도 일대일대응 함수가 됩니다. 사실은 이런 쪽으로 해석하게 만들고 싶었던 것이 아닐까 싶긴합니다만, 30번 문항이 합성함수 문항인지라, 약간 아쉬움을 남긴 채 문항을 마무리한 것 같네요.

이러한 지극히 주관적인 평가를 드리는 것에 있어, 상당히 조심스러운 태도를 보일 수 밖에 없습니다. 읽어주시는 독자님들 모두 이 글은 단지 칼럼일 뿐, 공식적인 평가원의 입장이 아니라는 것을 염두해두고 읽어주시는 것이 좋겠습니다. 저의 이러한 해석을 바탕으로 변형한 문항을 아래에 첨두해두었으니, 한번 풀어보시는 것을 추천드립니다.

30번 문항에서도 이어서 말씀드리겠지만, 평가원 내부에서 어느정도 합성함수에 대한 출제 방향성 논의가 완료된 듯 싶습니다. ℕ축을 사용하지 않으면서 변별할 수 있도록 말이죠.

05.1 24학년도 06월 모의평가 28번[미적]

두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
>
> $$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$
>
> 이다.
>
> (나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\dfrac{1}{16}$ ② $-\dfrac{7}{64}$ ③ $-\dfrac{5}{32}$

④ $-\dfrac{13}{64}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

05.2 24학년도 수능 28번[미적]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이고, $x < 0$일 때 $f(x) = -4xe^{4x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$2g(t) + h(t) = k$ (k는 상수)

를 만족시킨다. $\displaystyle\int_0^7 f(x)\,dx = e^4 - 1$일 때, $\dfrac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}e^5$ ② $\dfrac{4}{3}e^7$ ③ $\dfrac{5}{4}e^9$ ④ $\dfrac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\dfrac{7}{6}e^{13}$

05.3 25학년도 4월 학력평가 28번[미적]

두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=a\sin x-\cos x,\ g(x)=e^{2x-b}-1$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan b$의 값은? [4점]

> (가) $f(k)=g(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.
>
> (나) 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 방정식 $\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$의 모든 해의 합은 $\dfrac{\pi}{4}$이다.

① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

05.4 23학년도 10월 학력평가 04번

두 자연수 m, n에 대하여 함수 $f(x) = x(x-m)(x-n)$가

$$f(1)f(3) < 0\ ,\ \ f(3)f(5) < 0$$

을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? [3점]

① 30　② 36　③ 42　④ 48　⑤ 54

05.5 20학년도 9월 모의평가 21번

함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)\,dx=-1$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05.6 19학년도 3월 학력평가 가형 20번

함수 $f(x)=x^2+ax+b$ $\left(0<b<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 함수 $g(x)=\sin(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=-g'(x)$이다.
> (나) 점 $(k, g(k))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고, $2kg(k)=\sqrt{3}\,g'(k)$이다.

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$
④ $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

05.7 26학년도 6월 모의평가 28번[미적] *변형*

상수 $a\,(a \neq 0)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 역함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
>
> $$\frac{1}{e}\{f(x)\}^3 + e^{f(x)} + ax = \tan\left(\frac{\pi(1-e^x)}{2(1+e^x)}\right)$$
>
> 이다.

$f'(0) = -e\pi$가 되도록 하는 a의 값을 k라 할 때, $\frac{1}{\pi}(a+3k)$의 최솟값을 구하시오.

Commentary.

본 변형문항은 역함수를 직접적으로 언급하며 합성함수로 해석을 강요하고 있습니다.

우선 다음과 같이 세팅을 하고 들어가도록 하죠.

$$p(x)=\tan\left(\frac{\pi(1-e^x)}{2(1+e^x)}\right)-ax$$

$$q(x)=\frac{1}{e}x^3+e^x$$

그럼 주어진 박스 조건은 다음과 같이 변형됩니다.

$$q(f(x))=p(x)$$

이때, 함수 $q(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하기 때문에 역함수가 존재하는 것이 자명합니다. 따라서, $f(x)$는 다음과 같이 표현할 수 있겠습니다.

$$f(x)=q^{-1}(p(x))$$

위 칼럼에 작성된 내용을 잘 이해하셨다면 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해선, $p(x)$가 일대일대응이 되어야한다는 것을 알 수 있습니다. 여기서는 본래 문항과 비슷한 결과가 유도되겠죠.

무작정 이계도함수를 구하려고 드는 순간 계산의 폭탄에 빠지게 될 것입니다. 그럼 자연스레 속함수 $\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$은 어떤 성질을 갖고 있을까요? 원점 대칭인 함수입니다.
(이 부분에 대해선 마지막 부분에서 더 자세히 다뤄드리도록 하겠습니다.)

속함수 $\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$도 원점 대칭, 겉함수 $\tan x$도 원점 대칭이므로 함수 $\tan\left(\dfrac{\pi(1-e^x)}{2(1+e^x)}\right)$도 원점 대칭임을 알 수 있습니다. 원점이 변곡점인 단조감소함수입니다.

이때,

$$p'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\tan\left(\frac{\pi(1-e^x)}{2(1+e^x)}\right)\right\}-a$$

이므로 기하적으로 $p'(x)\le 0$이 되어야만 한다는 것을 알 수 있습니다. 미분을 해주면

$$\sec^2\left(\frac{\pi(1-e^x)}{2(1+e^x)}\right)\times\frac{\pi}{2}\times\frac{d}{dx}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$$

이므로 $x=0$에서의 미분계수는 $-\dfrac{\pi}{4}$가 되므로

$$a\ge-\frac{\pi}{4}$$

임을 알 수 있습니다.

우선, $p(0)=0$, $q(-1)=0$임을 통해 $f'(0)$의 값을 구하면

$$f'(x)=\left[\left\{\frac{d}{dx}\left(q^{-1}(x)\right)\right\}\circ p(x)\right]\times p'(x)$$

$$q'(x)=\frac{3}{e}x^2+e^x,\ q'(-1)=\frac{4}{e}$$

$$f'(0)=\frac{1}{q'(-1)}\times p'(0)=\frac{e}{4}\times\left(-\frac{\pi}{4}-a\right)$$

이므로,

$$\frac{e}{4}\times\left(-\frac{\pi}{4}-k\right)=-e\pi,\ k=\frac{15}{4}\pi$$

입니다.

정리하면,

$$a+3k\ge 11\pi$$

이므로, 구하는 값은 $\boxed{11}$ 입니다.

𝕻𝕊.1 함수 $\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ 은 미분적분학에서 배우는 쌍곡선함수입니다.

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$
$$\Rightarrow \frac{1-e^x}{1+e^x} = -\tanh\left(\frac{x}{2}\right)$$

흥미가 있으신분들은 쌍곡선함수에 대하여 찾아보시면 재미있으실 겁니다.

그런데 왜 함수 $\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ 를 활용을 했냐라고 하면 저는 30번 문항에서 제시된 함수를 활용했을 뿐입니다.
$\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ 라는 함수는 $(0,1)$에 대해 점대칭이죠.
함수 $\dfrac{2}{1+e^x}$ 도 마찬가집니다. 이 친구를 단지 y축으로 -1만큼 평행이동시켜 원점대칭을 만든 함수입니다.

평가원이 30번 문항에서도 숨겨둔 대칭성을 약간 활용했을 뿐입니다. 이렇게 바라보면 평가원이 정말로 하고 싶었던 이야기들이 많았는데, 정말 많이 참고 참아서 이번 6월 모의평가 시험지가 완성된 것이라는 것이 느껴지셨으면 좋겠습니다.

다만, 시험 범위가 전범위가 아니라는 점. 6월 모의는 당해 수험생들의 실력 및 분포가 어떻게 이루어지는지 확인도 해야하는 점. 미적분 및 기하의 생명이 5회밖에 남지 않았다는 점. 상당히 고려해야할 변수들이 많았던 것을 고려한다면 충분히 이해할 수 있습니다.

𝕻𝕊.2 일대일대응에 관하여

함수 $f(x)$가 역함수를 갖는다는 것은 $f(x)$가 일대일대응이라는 의미입니다.

$$f(x) = q^{-1}(p(x))$$

이고, $q(x)$는 일대일대응인 것이 분명한데.... 이때 $p(x)$ 또한 일대일대응이 되어야만 해? 라는 의문이 드실 수 있습니다. 이에 대한 증명은 다음과 같습니다.

서로 다른 실수 x_1, x_2가 있다고 생각해보죠.

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

가 되어야만 합니다.

이때 다음과 같은 가정을 하고 시작해보죠.

$$p(x_1) = p(x_2)$$

라고 가정합니다. 그러면 $q^{-1}(x)$가 일대일대응이므로

$$q^{-1}(p(x_1)) = q^{-1}(p(x_2))$$

가 되는데, 이는

$$f(x_1) = f(x_2)$$

가 됩니다. 이는 f가 일대일대응이라는 조건에 모순입니다. 정리하면 귀류법에 의해

$$p(x_1) \neq p(x_2)$$

즉, p 또한 일대일대응입니다.

가 되어야하므로 $p(x)$ 또한 일대일대응이 되어야만 합니다.

이렇게 길고 길었던 28번의 칼럼이 끝이났습니다. 30번 문항으로 얼른 마무리 지어보도록 하겠습니다.

06. 26학년도 6월 모의평가 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \left| f\left(\frac{2}{1+e^{-x}} \right) \right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$ 이다.
(나) $g'(\ln 3)<0$, $\lvert g'(-\ln 3) \rvert = \frac{3}{8} g(-\ln 3)$

$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

About. 26학년도 6월 모의평가 30번[미적]

네. [240628]문항을 합성함수 문항으로 인정하지 않는다면 [2406]~[2509]까지 멸종했었던 합성함수가 돌아왔습니다.

긴 말 없이 당장 [25사관29], [25수능30_미적], [260630_미적]만 보아도 평가원 내부에서 합성함수에 대한 토의가 마무리 되었음을 짐작해볼 수 있겠습니다. ~~(사관이 합성함수를 출제해서 평가원도 아몰랑 수능에 출제해봤는데 별탈 없어서 이번에도 내본걸 수도 있음)~~

실제 교육부의 06월 26일에 발표된 *최근 3년간 수능 및 2406모의평가에 대한 킬러문항 사례에* [23수능22], [23수능30_미적] 두 문항을 저격하며 **직접적으로 '합성함수'에 대한 불편함**을 드러냈습니다.

그럼 우선 과거의 평가원이 합성함수를 어떻게 다루었었나 훑어보죠. 17학년도부터 다 긁어왔습니다.

[170930_가형]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$

$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$

$h(x)=f(g(x))$

[190930_가형]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$

$g(x)=(ax+b)e^{f(x)}$

[19수능30_가형]

최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$

$g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$

[21수능28_가형]

$f(x)=(x-a)(x-b)^2$

$g(x)=x^3+x+1$

$h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$

[21수능30_가형]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$

$g(x)=f(\sin^2\pi x)$

[220929_미적]

이차함수 $f(x)$

$g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$

[22수능28_미적]

$f(x)=6\pi(x-1)^2$

$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$

[23수능30_미적]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$

함수 $g(x)=e^{\sin\pi x}-1$

합성함수 $h(x)=g(f(x))$

[25수능30_미적]

두 상수 $a\,(1\le a\le 2)$, b

$f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$

[260630_미적]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$

함수 $g(x)=\left|f\left(\dfrac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$

별의별 함수들을 합성시켜 만든 합성함수의 특징들을 갖고 문항들을 출제해왔다는 것을 알 수 있습니다. 이때 주로 다뤄던 내용은 역시 『합성함수 개형추론』, 『합성함수 극대, 극소』입니다.

이러한 문항들이 킬러급의 난이도로 자주 출제되기 시작하자, **ℕ축이라는 기술이 사교육 시장을 뒤흔들기 시작했습니다.** ~~저도 애용하구요.~~

평가원 혹은 교육청이 과연 이 ℕ축 풀이법을 원했던 것인가로 돌아가봐야 합니다. 당연하게도 ℕ축을 원하지 않겠죠. 목적성에서 어긋남과 동시에, 교과서에도 나오지 않는 내용이기 때문에 더욱 더 변화를 원했을 것입니다.

$\mathbb{Q}$. 그래서 25학년도부터 어떻게 변화하였나요?
기존의 킬러들은 다음과 같은 정서가 강했습니다.

1. 조건을 이렇게 제시할거야.
2. 이 조건들을 모두 만족하는 삼(사)차함수 $f(x)$를 결정지어볼래?
3. 그리고 정답은 너가 결정지은 f에 관련해서 내도록 할게.

이때 2 과정에서 $\mathbb{N}$축이 적극적으로 활용될 수 있었습니다.

$\mathbb{A}$. [25수능30_미적], [260630_미적] 문항에서는 다음과 같은 정서로 변화했습니다.

1. 조건을 이렇게 제시할거야.
2. **근데 계산부터 좀 할래?**
3. 계산하고 나니까 보이지? 사실 이런 상황이야.
4. 이제 나머지 조건을 사용해서 마무리 지어 봐.
5. 근데 **마무리 계산도 빡빡하게** 만들어봤어.

이때, **$\mathbb{N}$축을 사용하지 않더라도** 쉽게 정답에 도달할 수 있습니다.

소위 말하는 계산량으로 밀고 가는 수학입니다. 다만, 합성함수라는 단원에서 극대, 극소를 빼놓기는 힘들기에 출제를 강행하지 않았나 싶네요.

먼저, [25수능30_미적]을 간단히 살펴보도록 하죠.
$f(0)=0$를 통해 $\sin(b)=0$을,
$f(2\pi)=2\pi a+b$를 통해 $\sin(2\pi a+b)=2\pi a+b$를.
즉, $b=-2\pi a$가 되므로 사실 **$\mathbb{N}$축을 통한 개형추론이 아니라**, $a=1$, $a=\dfrac{3}{2}$, $a=2$중에서 무엇이 답인지를 ㈏ 조건을 통해 마무리 지으면 되는 문항입니다만, 마무리 과정에서 체력을 더 소모시킵니다.

다음으로, [260630_미적]을 살펴볼까요?
합성함수 $g(x)$가

$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

로 제시되었습니다. 겉함수가 $|f(x)|$, 속함수가 $\dfrac{2}{1+e^{-x}}$입니다. 속함수는 치역이 열린 구간 $(0, 2)$이고, 실수 전체 집합에서 증가하는 함수으로 설계를 해두어, $\mathbb{N}$축이 만일 사용된다한들, 거의 사용하지 않은 것 만큼의 **$\mathbb{N}$축의 사용이 의미가 없도록** 설계를 해두었습니다.

$g(x)$를 절댓값 함수로 정의했음에도 불구하고, 계산 과정에서 $g(x)$의 도함수의 절댓값을 씌운 값을 계산해야하므로 이 과정에서 체력을 또 한번 소모시키는 것을 알 수 있습니다.

이처럼 평가원이 약 2년의 공백의 기간이 지난 현재 평가원이 취하고 있는 합성함수에 대한 방향성을 알아보았습니다.

- **$\mathbb{N}$축 없이도 풀 수 있는 문항을 만들겠다.**
- **계산량을 보다 늘릴 것이다.**

이 두가지는 명확하게 드러납니다만, 아직 시행횟수가 터무니 없이 적어 확실한 대답을 드리기는 어려울 것 같습니다.

그럼에도 불구하고, **합성함수가 다시 돌아왔다**는 것을 잊지 않으셔야합니다. 9월 모의에 다시 합성함수가 나와 평가원이 원하는 합성함수가 무엇인지 제대로 느낄 수 있었으면 좋겠습니다.

밑에 첨부해드린 평가원의 [170930_가형]~[25수능30_미적] 문항은 꼭 풀어볼 것을 추천드리며, [25사관29] 및 교육청 문항도 2문항까지 총 12문항의 유사 기출 문항을 첨부하여두었으니 필요 시 풀어보시는 것을 추천드립니다.

더하여 [260630_미적]에 대한 **변형문항** 또한 제작하여 마지막에 첨부해두었습니다. 해당 문항은 수능특강을 보고 감명을 받아 제작한 문항으로 합성함수에서의 새로운 시도를 제시하고 있습니다. 미출제 요소를 담고 있으니 학습적 방면에서 도움이 될 수 있기를 바랍니다.

06.1 17학년도 9월 모의평가 가형 30번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

06.2 19학년도 9월 모의평가 가형 30번

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수

$$h(x)=(f \circ g)(x)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \to \infty} g(x)=0$) [4점]

06.3 19학년도 수능 가형 30번

최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$ 라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.
(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

(단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

06.4 21학년도 수능 가형 28번

두 상수 a, b $(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=\left(f \circ g^{-1}\right)(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)\lvert h(x)\rvert$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) $h'(3)=2$

06.5 21학년도 수능 가형 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f\left(\sin^2 \pi x\right)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.

(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

06.6 22학년도 9월 모의평가 29번[미적]

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다. (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

06.7 22학년도 수능 28번[미적]

함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극소가 되는 x 의 개수는?

06.8 23학년도 수능 30번

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin \pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다. (나) 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

06.9 25학년도 수능 30번[미적]

두 상수 $a\,(1 \le a \le 2)$, b에 대하여 함수
$f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$, $f(2\pi)=2\pi a+b$
(나) $f'(0)=f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0, 4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면, $n\alpha_1 - ab = \frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

06.10 25학년도 사관학교 29번

두 실수 a, b에 대하여 x에 대한 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 하자. $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{34\pi}{3}$일 때, 함수 $f(x)=\sin\left(x^2+ax+b\right)$가 $x=c$에서 극값을 갖도록 하는 c의 값 중에서 열린구간 (α, β)에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ (n은 자연수)라 하자. $(1-n)\times\sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right)$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta$) [4점]

06.11 21학년도 7월 학력평가 가형 30번

두 자연수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=ax^2+b$가 있다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\ln f(x)-\frac{1}{10}\{f(x)-1\}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=|g(t)|$와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
> (나) 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 7이다.

$\int_0^a e^x f(x)\,dx=me^a-19$일 때, 자연수 m의 값을 구하시오. [4점]

06.12 20학년도 10월 학력평가 가형 30번

최고차항의 계수가 $k\,(k>0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(-2)$, $f(0)\neq 0$이다. 함수

$$g(x)=(ax+b)e^{f(x)} \qquad (a<0)$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\leq 0$을 만족시키는
> 실수 m의 최솟값은 -2이다.
>
> (나) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\int_{-2f(0)}^{1} g(x)\,dx=\frac{e-e^4}{k}$

$f(ab)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다. [4점]

06.13 26학년도 6월 모의평가 30번 *변형*

최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f\left(\frac{1}{1+e^{x-\alpha}}\right)$$ (단, α는 상수)

의 역함수 $h(x)$의 정의역을 I라 할 때 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $[\beta-t, \beta+t] \subset I$ 인 모든 실수 t에 대하여
$\int_{\beta-t}^{\beta+t} h(x)\,dx = 2t$ 이다. (단, β는 상수)
(나) 함수 $g(|x|)-|h(x)|$가 $x=k\ (k \in I)$에서 미분불가능한 실수 k의 개수는 1이다.

$f'(\gamma)=0$ 일 때, $e^{\alpha} \times \left\{\beta+f\left(\gamma \times \frac{3e-1}{e+1}\right)\right\} = p-e^{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 자연수이다.) [4점]

Commentary.

조건의 표현이 “역함수 $h(x)$의 정의역을 I라 할 때” 로 시작하며 신박하게 제시 되었는데, 마땅히 다른 표현법이 생각나지 않아 대학 수학처럼 제시하게 되었습니다. 양해 부탁드리겠습니다. ~~(능력 부족 이슈.. 다른 표현을 찾게 된다면 언제든 연락주시면 감사하겠습니다)~~

함수 $g(x)=f\left(\dfrac{1}{1+e^{x-\alpha}}\right)$를 살펴보도록 하죠.

겉함수는 최고차가 음수인 삼차함수 $f(x)$.

속함수는 $\left(\alpha, \dfrac{1}{2}\right)$에서 점대칭이면서 치역은 $(0,1)$이고 감소하는 함수입니다.

앞서 28번 문항에서 쌍곡선함수까지 언급하며 대칭성을 매우 강조했죠. 이번 문항도 이 부분을 저격한 문항입니다.

㈎ 조건에 따르면 $g(x)$의 역함수인 $h(x)$가 점 $(\beta, 1)$에 대해 점대칭임을 제시하고 있습니다.

그러면 $g(x)$는 자연스레 점 $(1, \beta)$에 대하여 점대칭이 되겠습니다. 이때, 속함수가 $\left(\alpha, \dfrac{1}{2}\right)$에서 점대칭임을 알아내면, 겉함수 $f(x)$가 $\left(\dfrac{1}{2}, \beta\right)$에 대해 점대칭인 삼차함수가 되어야하고, $\alpha=1$, $\gamma=\dfrac{1}{2}$임이 자연스레 유도됩니다.

㈏ 조건은 어떻게 해결해야할까요? 이 부분이 직접적으로 수능특강과 연계됩니다. 굉장히 재밌는 표현이에요.

다음과 같은 질문을 먼저드려보겠습니다.

$\mathbb{Q}.\mathbb{1}$ $y=x^3$의 역함수는 $x=0$에서 연속인가요?
$\mathbb{Q}.\mathbb{2}$ $y=x^3$의 역함수는 $x=0$에서 미분가능한가요?

$\mathbb{A}$. 연속이긴하지만, **미분은 불가능**합니다.

이 부분이 실제로 수능에 미출제요소입니다. 신박한 관점이라 한번쯤 연계해보고 싶었는데 이번 기회에 변형문제를 제작하며 활용할 수 있게되었네요.

그럼 $f'(\gamma)=0$이라는 조건의 역사를 자연스레 눈치챌 수 있어야합니다. **함수 $h(x)$가 $x=\beta$에서 미분이 불가능하다는 것을 제시한 것과 다름이 없겠네요.**

자 이제, 상황을 정리해볼까요?

함수 $g(x)$는 점 $(1,\beta)$에 대하여 점대칭이며 증가하고
함수 $h(x)$는 점 $(\beta,1)$에 대하여 점대칭이며 증가합니다.
이때, 함수 $h(x)$는 $x=\beta$에서 미분이 불가능합니다.

더하여, 함수 $g(|x|)$는 $x=0$에서 미분이 불가능하다는 것을 쉽게 알 수 있습니다. ㈏ 조건에 따르면 차의 함수

$$g(|x|)-|h(x)|$$

가 오직 한 점에서만 미분이 불가능해야합니다만, 우리는 미분 불가능한 지점을 이미 두 개나 알고있네요. 어떠한 경향을 갖추어야만 차의 함수가 한 점에서만 미분이 불가능할까요?

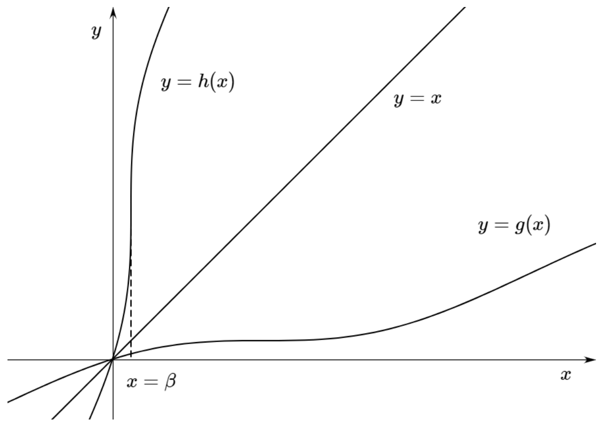
우선 미적분러들은 다음과 같은 내용은 숙지하고 있을거라 믿고 있습니다.

- (미분가능) $\pm$ (미분가능) = (미분가능)
- (미분불가) $\pm$ (미분가능) = (미분불가)
- (미분불가) $\pm$ (미분불가) = ***<u>CHECK 필요</u>***

함수 $g(|x|)$가 $x=\beta$에서 미분이 불가능할 수가 없다는 것은 자명하므로 다음과 같은 상황으로 귀결될 수 밖에 없습니다.

따라서, 함수 $|h(x)|$가 $x=0$에서 미분불가능해야합니다. 정리하면 $h(0)=0$가 되겠네요.

기하적으로 관찰하면, 다음과 같겠습니다.



~~(여기서 조건 제시에 있어서 표현법이 저렇게 될 수 밖에 없었던 이유를 알아주셨으면 좋겠습니다..)~~

이제 **차의 함수가 $x=0$ 에서 미분이 가능해지려면** 다음과 같은 간단한 계산을 할 수 있겠습니다.

함수 $g(|x|)-|h(x)|$ 의 좌미분계수

$: \ -g'(0)+h'(0)$

함수 $g(|x|)-|h(x)|$ 의 우미분계수

$: \ g'(0)-h'(0)$

가 같으면 되겠습니다. 이때 $g(0)=h(0)=0$ 임을 감안하면

$$-g'(0)+\frac{1}{g'(0)}=g'(0)-\frac{1}{g'(0)}$$

$$\Rightarrow g'(0)=\frac{1}{g'(0)}$$

$$\Rightarrow g'(0)=1 \quad (\because g'(x)\geq 0)$$

이제 마무리 계산단계만 남았네요. 트렌드에 맞게 여기 계산을 다소 빡빡하게 만들어두었습니다. (계산량이 조금 많다고 느껴지실 수도 있는데, **의도된겁니다.**)

$$g(0)=f\left(\frac{1}{1+e^{-1}}\right)=0$$

$$\Rightarrow g'(x)=f'\left(\frac{1}{1+e^{x-1}}\right)\times\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{x-1}}\right)$$

$$\Rightarrow g'(0)=f'\left(\frac{1}{1+e^{-1}}\right)\times\frac{-1}{e(1+e^{-1})^2}=1$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{1+e^{-1}}\right)=-e(1+e^{-1})^2$$

이때, $f(x)=p\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\beta$ (단, $p<0$) 라고 하면

$$f'(x)=3p\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$f'\left(\frac{1}{1+e^{-1}}\right)=3p\left(\frac{e}{e+1}-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=3p\left(\frac{e-1}{2e+2}\right)^2=-e\left(\frac{e+1}{e}\right)^2$$

$$\Rightarrow p=-\frac{4(e+1)^4}{3e(e-1)^2}$$

$$f(x)=-\frac{4(e+1)^4}{3e(e-1)^2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\beta$$

$$f\left(\frac{1}{1+e^{-1}}\right)=-\frac{4(e+1)^4}{3e(e-1)^2}\left(\frac{e-1}{2e+2}\right)^3+\beta=0$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{(e-1)(e+1)}{6e}$$

정리하면, $f(x)=-\frac{4(e+1)^4}{3e(e-1)^2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{e^2-1}{6e}$

이고, $f\left(\frac{3e-1}{2e+2}\right)=-\frac{7(e^2-1)}{6e}$ 이므로 구하는 값은

$$e^{\alpha}\times\left\{\beta+f\left(\gamma\times\frac{3e-1}{e+1}\right)\right\}=e\times-\frac{(e^2-1)}{e}=1-e^2$$

$$\Rightarrow p=1,\ q=2$$

$\Rightarrow p+q=\boxed{3}$ 입니다.