

해설	
공통 14 정답 ① 345 내용 영역 귀납적으로 정의된 수열 행동 영역 추론 - 나열하기, 세어보기, 관찰 등을 통해 문제 해결의 핵심 원리를 발견하는 능력 $a_5=18$로부터 자연수 p의 값을 구하자. (i) S_4의 값이 짝수이면 $a_5=\frac{a_4}{2p+1}=18$이고, 그때의 a_5의 값은 짝수이므로 S_5의 값도 짝수이다. 따라서, $a_6=\frac{a_5}{2p+1}=\frac{18}{2p+1}$이다. 그런데 수열 $\{a_n\}$의 모든 항의 값은 자연수이고 p의 값도 자연수이므로 $2p+1=3$이거나 $2p+1=9$여야 한다. (a) $2p+1=3$이면 $p=1$인데, $a_6=\frac{18}{3}=6$이므로 S_6의 값은 짝수이다. 따라서, $a_7=\frac{6}{3}=2$이므로 S_7의 값은 짝수이다. 이 경우 $a_8=\frac{2}{3}$이므로 조건을 만족시키지 않는다. (b) $2p+1=9$이면 $p=4$인데, $a_6=\frac{18}{9}=2$이므로 S_6의 값은 짝수이다. 그러나 이 경우 $a_7=\frac{2}{9}$이므로 조건을 만족시키지 않는다. (a), (b)에 의하여, (i)은 조건을 만족시키지 않는다. (ii) S_4의 값이 홀수이면 $a_5=a_4+3p$에서 $a_4=18-3p$이다. 이때 p가 짝수인지 홀수인지에 따라 a_3의 값이 결정된다. (a) p가 짝수이면 $18-3p$의 값은 짝수이므로 a_4의 값은 짝수이고, S_3의 값은 홀수이다. 따라서, $a_4=a_3+3p$이고 $a_3=18-6p$이다. 이때 $18-6p$의 값도 짝수이므로 S_2의 값은 홀수이고, $a_3=a_2+3p$에서 $a_2=18-9p$이다. 마찬가지로 $S_1=a_1$의 값은 홀수이므로 $a_2=a_1+3p$에서 $a_1=18-12p$인데, 짝수 p의 최솟값은 $p=2$이므로 $a_1=18-12p\leq-6$이어서 조건을 만족시키지 않는다. (b) p가 홀수이면 $18-3p$의 값은 홀수이므로 a_4의 값은 홀수이고, S_3의 값은 짝수이다. 따라서, $a_4=\frac{a_3}{2p+1}$에서 $a_3=(18-3p)(2p+1)$ 임을 얻는다. 이때 $(2p+1)$의 값은 홀수이므로 a_3의 값은 홀수이고, S_2의 값은 홀수이다. 따라서, $a_3=a_2+3p$에서 $a_2=(18-3p)(2p+1)-3p$임을 얻는다. $3p$의 값은 홀수이므로 a_2의 값은 짝수이고, $S_1=a_1$의 값은 홀수이다. 따라서, $a_2=a_1+3p$에서 $a_1=(18-3p)(2p+1)-6p$임을 얻는다. 한편, S_4의 값이 홀수이고 a_5의 값은 짝수이므로 S_5의 값은 홀수이다. 따라서, $a_6=a_5+3p$에서 $a_6=18+3p$이고, $3p$는 홀수이므로 a_6의 값은 홀수이다.	즉 S_6의 값은 짝수이므로 $a_7=\frac{a_6}{2p+1}$에서 $a_7=\frac{18+3p}{2p+1}$이다. 이때 $\frac{18+3p}{2p+1}$의 값이 자연수가 되게 하는 홀수 p의 값은 $p=1, p=5$뿐이다. $p=1$이면 $a_7=\frac{21}{3}=7$이므로 a_7의 값은 홀수이고, S_7의 값도 홀수이다. 따라서, $a_8=a_7+3p=7+3=10$이고 S_8의 값은 홀수이므로 $a_9=a_8+3p=10+3=13$이다. 그런데 이때 S_9의 값은 짝수이므로 $a_{10}=\frac{a_9}{2p+1}=\frac{13}{3}$인데, 이는 모든 항의 값이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다. $p=5$이면 $a_8=\frac{33}{11}=3$이므로 a_7의 값은 홀수이고, S_7의 값도 홀수이다. 따라서, $a_8=a_7+3p=3+15=18$이고 S_8의 값은 홀수이므로 $a_9=a_8+3p=18+15=33$이다. 이때 S_9의 값은 짝수이므로 $a_{10}=\frac{a_9}{2p+1}=\frac{33}{11}=3$이다. 또한, $a_4=a_5-3p=18-15=3$ $a_3=(18-3p)(2p+1)=3\times 11=33$ $a_2=a_3-3p=33-15=18$ $a_1=a_2-3p=18-15=3$ 이므로, 즉, 수열 $\{a_n\}$의 항의 값은 모든 자연수 n에 대하여 $a_{3n-2}=3, a_{3n-1}=18, a_{3n}=33$ 이다. 따라서, $\sum_{n=1}^{4p} a_n$의 값은 $\begin{aligned} \sum_{n=1}^{4p} a_n &= \sum_{n=1}^{20} a_n \\ &= 6\times(3+18+33)+3+18 \\ &= 324+21 \\ &= 345 \end{aligned}$