

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호						-				
----	--	-------	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--

- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

잊혀짐도 잊을 만큼 나를 지워가
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

- ※공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.
- 공통 과목 1~8쪽
 - 선택 과목
 - 확률과 통계 9~12쪽
 - 미적분 13~16쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 정답 >

공통

1	2	3	4	5
③	②	③	①	⑤
6	7	8	9	10
①	②	②	①	⑤
11	12	13	14	15
④	②	④	③	⑤
16	17	18	19	20
4	148	80	24	6
21	22			
25	73			

확통과동계

23	24	25	26	27
①	②	③	⑤	⑤
28	29	30		
①	813	41		

미적분

23	24	25	26	27
④	①	③	⑤	②
28	29	30		
④	4	34		

기하

23	24	25	26	27
②	③	③	①	⑤
28	29	30		
④	20	53		

예상 1컷

미적 : 81~84

기하 : 84

확통 : 85

총평

공통은 어렵게, 미적은 6평보다는 수월하게 출제하였습니다.

기하랑 확통은 매우 어렵게 출제하였고, 새로운 유형을 많이 넣었습니다.

공통 중에서도 주관식 4점(21, 22)의 난이도가 가장 높고, 객관식 4점(10~15) 또한 만만치 않은 난이도입니다.

다만, 이를 고려하여 3점과 9번, 20번 등의 쉬운 4점은 매우 쉽기 때문에 앞에서 빨리 쳐냈다면 시간적 여유가 있었을 것입니다.

미적은 무난무난한 난이도로, 미적분을 선택하셨다면 미적에서 2개 이상 틀리면 안되는 난이도입니다.

기하는 29번과 30번이 정말 어렵기 때문에 28번까지 빨리 풀어냈어야 29번과 30번을 풀 시간을 확보할 수 있습니다.

확통은 29번 30번 모두 어렵습니다.

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $3^{\sqrt{3}} \times 3^{1-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

$$3^{0.3+1-0.3} = 3$$

2. 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1, \quad f'(1) = 6$$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 = 4(a_2 - a_1), \quad a_2 = 2$$

일 때, $a_1 + a_3$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$$2r = 8 - \frac{8}{r}, \quad r^2 - 4r + 4 = 0, \quad r = 2$$

$$a_1 + a_3 = 1 + 4 = 5$$

4. 양수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & (x < 2a) \\ -3x + 12 & (x \geq 2a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, a 의 값은 [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$4a^2 + 2a^2 = -6a + 12,$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \quad a = 1 \text{ or } a = -2$$

5. 다항함수 $f(x)$ 의 도함수가

$$f'(x) = 4x^2(x-3)$$

일 때, $f(5) - f(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 105 ② 110 ③ 115 ④ 120 ⑤ 125

$$\int_0^5 4x^2(x-3) dx = \left[x^4 - 4x^3 \right]_0^5 = 125$$

6. $|\sin \theta| < |\cos \theta|$ 인 θ 에 대하여 $\sin \theta \times \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ 일 때,

$\tan \theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sin \theta = s, \cos \theta = c.$$

$$sc = -\frac{\sqrt{3}}{4}, s^2 + c^2 = 1.$$

$$\frac{3}{16c^2} + c^2 = 1, c^2 = t.$$

$$t^2 - t + \frac{3}{16} = 0 \quad (t - \frac{1}{4})(t - \frac{3}{4}) = 0.$$

$$c = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ or } \pm \frac{1}{2}. \quad s = \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ or } \mp \frac{1}{2}$$

($|s| < |c|$)

$$\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

7. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점

(1, 4)에서의 접선이 점 (2, 6)을 지날 때, $f(1) + f'(1)$ 의 값은?

[3점]

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

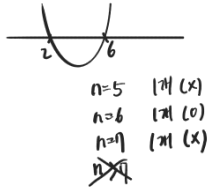
$$f(1) = 4, f'(1) = 2$$

COMMENT

손풀이는 식으로 풀었지만, 현장에서 풀 때에는 $1/2$, $(\sqrt{3})/2$ 가 바로 보여야 한다. $\sin$ 과 $\cos$ 의 절댓값의 부호가 주어졌으니 $\tan$ 도 바로 나온다.

8. 4보다 큰 자연수 n 에 대하여 $n^2 - 8n + 12$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수가 $(n-5)$ 일 때, n 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9



9. 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 가속도 $a(t)=6t$ 이다. 점 P가 $t=\sqrt{3}$ 에서 원점을 지나고 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도를 $v(t)$ 라 할 때,

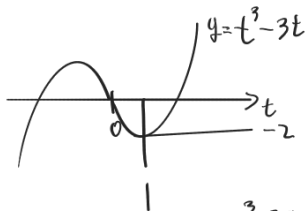
$$\int_0^a |v(t)| dt = 22$$

를 만족시키는 양수 a 의 값은? [4점]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

$$v(t) = 3t^2 + C$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} v(t) dt = [t^3 + Ct]_0^{\sqrt{3}} = 0, C = -3$$



$$a^3 - 3a = 22 - 4 = 18, \\ a = 3.$$

COMMENT

절댓값 $v(t)$ 를 적분하면 이동거리라는 것 확인하고 가자.
이외에는 어렵지 않은 계산이다.

10. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{a_n + a_{22-n}}{a_n \times a_{n+1}} = 4$$

를 만족시킬 때, a_1 의 값은? [4점]

- ① $\frac{7}{3}$ ② 3 ③ $\frac{11}{3}$ ④ $\frac{13}{3}$ ⑤ 5

$$a_n + a_{22-n} = 2a_{11}, \quad \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n \times a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{11}} \right)$$

$$\frac{2(a_1 + 10d)}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + 10d} \right) = \frac{2(a_1 + 10d)}{d} \left(\frac{10d}{a_1(a_1 + 10d)} \right) \\ = \frac{20}{a_1} = 4, \quad a_1 = 5$$

COMMENT

등차수열을 결정하려면 일반적으로 식 두개가 필요하고, 당연히 문제에도 식 두개를 주는 경우가 많지만, 이 문제는 식 하나로 a_1 을 특정할 수 있도록 만들어졌다.
등차중항과 부분분수로 식을 정리하고 계산하면 풀린다.
다만, 계산량이 꽤 있으니 실수하지 말자.

11. 다항함수 $f(x)$ 와 상수 a 가

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = a \quad (n \text{은 자연수})$$

를 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

<보 기>

- ㄱ. n 이 1일 때, $f'(a)=a$ 이다.
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 차수가 n 이고 최고차항의 계수가 2일 때, $f(3)=2$ 이다.
 ㄷ. n 이 1이 아니고, 함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 2인 삼차함수일 때, $f(\frac{a}{2}+2)$ 의 값은 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

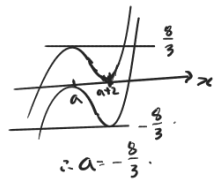
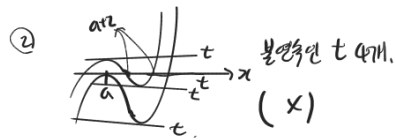
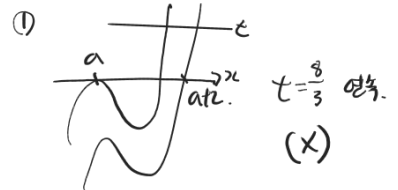
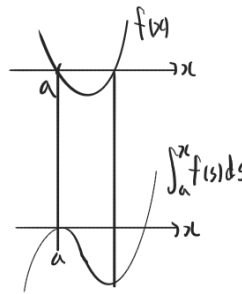
* $f(x)$ 의 연식 개수 < $(x-a)^n$ 의 연식 개수 $\rightarrow a \neq 0$ X. $f(x)$ 의 연식 개수 > $(x-a)^n$ 의 연식 개수 $\rightarrow a=0$ ㄴ. $f(x) = 2(x-a)^n$, $a=2$. $f(3)=2$. (O)ㄷ. i) $n=2$. $f(x) = 2(x-a)^2(x-k)$
 $a = 2(a-k)$, $k = \frac{a}{2}$. $f(\frac{a}{2}+2) = (a-a)^2$.ii) $n=3$. $f(x) = 2(x-a)^3$, $a=2$. $f(\frac{a}{2}+2) = 2$. (X)

COMMENT

6평의 기초대로 11번에 ㄱㄴㄷ 문제를 넣었다.

ㄱ과 ㄴ은 6평 ㄱㄴ 만큼 쉽지만, ㄷ이 꽤 까다로울 수 있는 문제이다. n 이 2일때를 생각하지 못했다면, 즉 ㄴ의 관성대로만 따라갔다면 틀렸을 것이다.12. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 가 상수 a 에 대하여 $f'(a) < 0$, $f(a) = 0$ 을 만족시킨다. 실수 t 에 대하여

$$\left(\int_a^x f(s)ds - t \right) \times \left(\int_{a+2}^x f(s)ds - t \right) = 0$$

을 만족시키는 서로 다른 실수 x 의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 $t = \frac{8}{3}$, $t = a$ 에서만 불연속일 때, $f(-1)$ 의 값은? [4점]① $-\frac{4}{3}$ ② $-\frac{10}{9}$ ③ $-\frac{8}{9}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{9}$ 

$$\int_a^x f(s)ds = k \left(x + \frac{8}{3} \right)^2 \left(x - \frac{1}{3} \right),$$

$$-4k = -\frac{8}{3}, k = \frac{2}{3}.$$

$$f(x) = 2 \left(x + \frac{8}{3} \right) \left(x + \frac{2}{3} \right), f(-1) = -\frac{10}{9}$$

COMMENT

특별할 것 없는 일반적인 개형추론 문제.

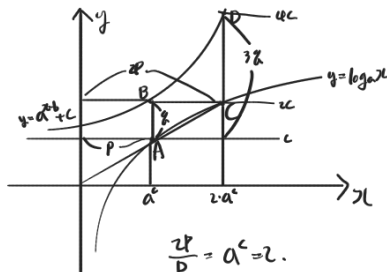
번호대 고려해서 크게 어렵게 만들진 않았다.

13. 세 실수 $a (a > 1)$, b , c 에 대하여 곡선 $y = \log_a x$ 가 직선 $y = c$ 와 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 x 축과 수직인 직선이 곡선 $y = a^{x-b} + c$ 와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y 축과 수직인 직선이 곡선 $y = \log_a x$ 와 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 x 축과 수직인 직선이 곡선 $y = a^{x-b} + c$ 와 만나는 점을 D라 하자. 점 A가 원점 O와 점 C의 중점이고

(삼각형 OBC의 넓이) = (삼각형 BCD의 넓이)

일 때, $a^2 \times 3^b \times c$ 의 값은? [4점]

- ① $3 \log_2 3$ ② $\frac{9}{2} \log_2 3$ ③ $9 \log_2 3$
 ④ $\frac{27}{2} \log_2 3$ ⑤ $27 \log_2 3$



$$\begin{aligned} \frac{2c}{p} &= a^c = 2. \\ \frac{3c}{2} &= a^c = a^2 = 3. \quad a = \sqrt{3}, \quad c = \log_3 4 \\ y &= a^{x-b} + c \text{가 } (2, 2 \log_3 4) \text{ 재.} \\ \rightarrow \sqrt{3}^{2-b} &= \log_3 4, \quad 3^{\frac{b}{2}} = 3 \log_3 4. \\ a^2 \times 3^b \times c &= 3 \times 9 \times \log_3 4 \times \log_3 4 \times \log_3 4 \\ &= \frac{27}{2} \log_3 3 \end{aligned}$$

COMMENT

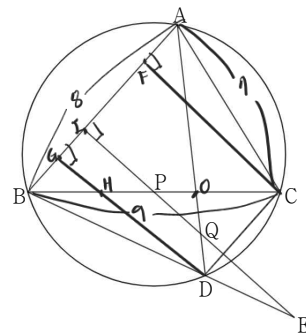
위 풀이는 지수, 로그의 비율 성질로 빠르게 풀었다.
 다만, 계산으로 밀고 가는 것도 할 수 있어야 한다. (시간 차이도 별로 안난다.)
 6평 22과 비교하면 지로함에 그래프 없이 준것은 비슷하나, 평행이동과 대칭을 찾는 과정이 필요 없다는 점에서 훨씬 쉽다.
 오히려 250612와 비슷한 편.

14. 그림과 같이 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 7$, $\cos(\angle BAC) = \frac{2}{7}$ 인

삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = \overline{BC}$ 가 되도록 하는 삼각형 ABC의 외접원 위의 점을 D라 하고, 직선 BD 위의 점 E에서 선분 AB에 내린 수선이 선분 BC, AD와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

$$\overline{BD} > \overline{DE}, \quad \overline{PQ} = \sqrt{5}, \quad \angle ABD < \frac{\pi}{2}$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



- ① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{27}{8}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{29}{8}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= 64 + 49 - 32, \quad \overline{BC} = 9 \\ \overline{AD} &= \overline{BC} = 9, \quad \angle BAC = \angle ABD. \\ \square ABDC &\rightarrow \text{등변사다리꼴} \\ \overline{AF} &= \overline{BF} = 2 \quad (\cos \angle CAB = \frac{2}{7}) \\ \overline{BC} &= 9, \quad \triangle ABO \cap \triangle ACO \\ \overline{BO} &= \overline{CO} = 2\sqrt{5}, \\ \overline{BO} &= 6, \quad \overline{OC} = \overline{OA} = 3 \\ \cos \angle POB &= \frac{7+36-49}{36} = -\frac{1}{9}. \\ \overline{HO} &= 18+2, \quad \overline{HO} = 2\sqrt{5}. \\ \overline{PA} &= \overline{PD} = 1/2, \quad \overline{PA} = 3 \\ \frac{3}{\overline{BE}} &= \frac{3}{9}, \quad \overline{BE} = \frac{27}{2}. \\ \overline{DE} &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

COMMENT

위 풀이는 달음을 사용하여 마지막 계산을 빠르게 끝낼수 있었지만 달음을 안 쓰더라도 코사인 정리를 이용해서 풀 수도 있다.
 요즘 기초 상 중등 도형의 중요성이 떨어지고 있으니 코사인 정리로만 다시 한번 풀어보는 것도 추천한다.
 다만, 길이 같은 것을 이용해서 등변사다리꼴 찾는 것은 할 수 있어야 한다.

15. 최고차항의 계수가 $\frac{3}{4}$ 인 사차함수 $f(x)$ 와 실수 a, k 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h)-k| - |f(a-h)-k|}{h} = 0$$

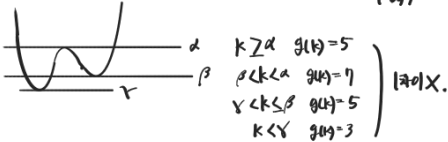
을 만족시키는 실수 a 의 개수를 $g(k)$ 라 하자. $g(4)-g(0)=-1$, $f(0)=4$ 이고 $x \geq 0$ 에서 $f'(x) > 0$ 이다. $f'(0)$ 의 값이 정수일 때, $f'(0)$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

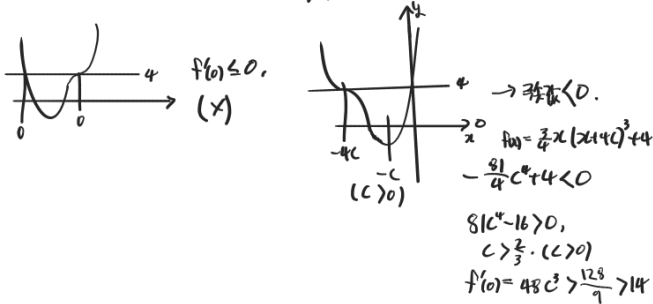
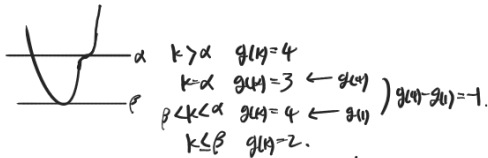
$$|f(x)-k|=k(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(a+h)-k(a-h)}{h} = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(a+h)-k(a-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(a+h)-k(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(a+h)-k(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(a)-k(a-h)}{h} = 0.$$

좌미분계수 + 우미분계수 = 0, $\rightarrow k'(x) = 0$ 또는 $\begin{cases} k(x) = 0 \\ k(x) \neq 0 \end{cases}$ (정정)



7 or 11. 꼭잡어 있는 것만 $g(k)$ 2개이.
 1개이 존재하면, 삼중근 존재.



단답형

16. 방정식 $\sqrt{2}^{\log_2 x} = x-2$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

$$x = x^2 - 4x + 4, \quad (x-1)(x-4) = 0$$

$$x = 4 \quad (x > 2)$$

4

17. 함수 $f(x) = (x^2+2)(x-3)^2$ 에 대하여 $f'(5)$ 의 값을 구하시오.

[3점]

$$f'(x) = 2(x^2+2)(x-3) + 2x(x-3)^2$$

$$f'(5) = 148.$$

148

COMMENT

개형추론 문제는 크게 두 방향으로 낼 수 있다.

첫째. 계산은 별로 복잡하지 않지만, 개형추론이 어려운 경우.

둘째. 개형추론은 쉽지만 이후 과정과 마무리 계산이 복잡한 경우.

이 문제는 후자의 경우인데, 개형 추론하는 것까지는 어렵지 않으나 극솟값이 음수라는 것을 캐치하지 못했다면 못풀었을 것이다.

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + k^2 - k) = \sum_{k=1}^{10} (4b_k + 3), \quad \sum_{k=1}^{10} (5a_k - b_k) = 20$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = A, \quad \sum_{k=1}^{10} b_k = B.$$

$$A + 385 - 55 = 4B + 30, \quad A + 300 = 4B$$

$$5A - B = 20.$$

$$A + 300 = 20A - 80 \quad A = 20, \quad B = 80$$

[80]

19. 최고차항의 계수가 1이고 실수 전체의 집합에서 증가하는 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = x$ 의 실근이 0과 a 뿐일 때, $f(2)$ 의 최댓값이 $p + q\sqrt{3}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [3점]

$$i) \quad f(x) = x^3(x-a) + x$$

$$f(x) = 3x^3 - 2ax + 1$$

$$D/f = 3x^2 - 2a \leq 0 \quad -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}.$$

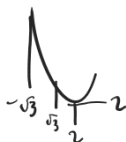
$$f(2) = 10 - 4a, \quad \text{Max} = 10 + 4\sqrt{3}.$$

$$ii) \quad f(x) = x(x-a)^2 + x.$$

$$f(x) = 3x^3 - 4ax + a^2 + 1$$

$$D/f = 3x^2 - 4a \leq 0 \quad -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}.$$

$$f(2) = 2(a-2)^2 + 2, \quad \text{Max} = 16 + 8\sqrt{3}$$



$$p + q = 24.$$

[24]

COMMENT

19번 치고 계산이 더럽게 많다.

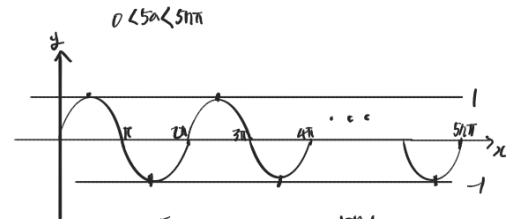
검토하면서 각 문항당 최소 5번씩은 봤는데 5번 다 계산하기 싫었던 문제. 다행인 것은, 그래프를 그리면 딱봐도 음수인 a 에서 중근을 갖는 경우일 때가 최대인 것이 보인다는 것이다.

20. $0 < a < n\pi$ (n 은 자연수)인 실수 a 에 대하여 x 에 대한

방정식

$$\sin x = \sin 5a \quad (x \geq 0)$$

의 실근을 작은 순서대로 나열한 수열이 등차수열을 이루도록 하는 모든 a 의 값의 합이 177π 이다. n 의 값을 구하시오. [4점]



$$5a = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots, \frac{(n-1)\pi}{2}.$$

$$\sum a = \frac{1+2+3+\dots+(n-1)}{10} \pi = 177\pi.$$

$$\sum_{k=1}^{10n-1} k = 2 \times 3 \times 5 \times 59$$

$$10n(10n-1) = 60 \times 59, \quad n = 6.$$

[6]

COMMENT

20번치고는 엄청 쉬운 편의 삼각함수 문제이다.

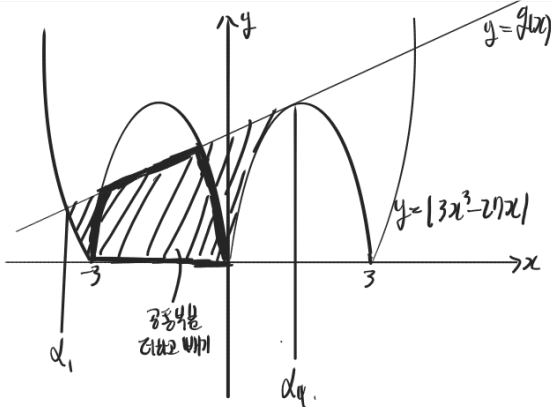
그래프의 대칭성, 주기성을 고려하지 않아도 되기 때문에 편하게 풀린다.

21번과 22번이 어려우니 괜찮다.

21. 두 함수 $f(x) = |3x^3 - 27x|$, $g(x) = ax + b$ ($a > 0$)에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 모든 실근을 작은 수부터 순서대로 나열하면 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 이다.

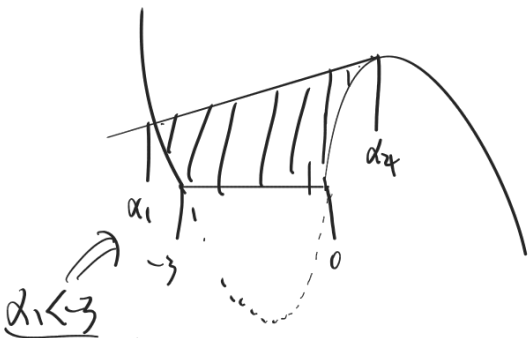
$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} \{f(x) - g(x)\} dx = -\frac{81}{16}$$

이고, $\alpha_1 \neq -3$ 일 때, $2(\alpha_1^2 + \alpha_4^2)$ 의 값을 구하시오. [4점]



$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} f(x) - g(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx - (4\frac{1}{2})$$

$$(4\frac{1}{2}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x) - (3x^3 - 27x) dx - \int_{-3}^0 f(x) dx$$



$$2 \int_{-3}^0 f(x) dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x) - (3x^3 - 27x) dx = -\frac{81}{16}$$

$$\frac{3^5}{2} - \frac{(\alpha_4 - \alpha_1)^4}{4} = -\frac{3^4}{16}, (\alpha_4 - \alpha_1)^4 = \frac{81 \times 25 \times 4}{2^4}$$

$$\alpha_4 - \alpha_1 = \frac{3\sqrt{10}}{2}, \alpha_1 + 2\alpha_4 = 0 \text{ (비례일지)}$$

$$\alpha_1 = -\sqrt{10}, \alpha_4 = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ (}\alpha_1 < -3\text{)}$$

$$2(\alpha_1^2 + \alpha_4^2) = 25 \quad \boxed{25}$$

22. a_1 이 자연수이고 $a_1 \neq a_5$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 a_1 의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \\ \frac{3a_n - 1}{2} & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) 집합 $A = \{k \mid a_n = k, n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여 $n(A) \leq 4$ 이다.

a_n 짝수 $\rightarrow$ 감소
 a_n 홀수 $\rightarrow$ 1일때 그다음, 나뉘어 줌.
 (가) 조건, a_n 재귀식,
 $\rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_1 = a_5$
 $b, a, a, a, a, \dots \rightarrow 2$
 $b, a, b, a, b, \dots \rightarrow a_1, a_2$
 $c, b, a, a, a, \dots \rightarrow 4$
 $c, b, a, b, a, \dots$
 $(c, b, a, c, b, \dots) \rightarrow (5), (1), (10)$
 $d, c, b, a, a, \dots \rightarrow (3), (3)$
 $d, c, b, b, a, \dots$
 $(d, c, b, a, c, b, \dots) \rightarrow (19), (20)$
 $d, c, b, a, a, d, c, \dots, a_1 = a_5$
~~증가, 감소~~
 $n - 2n - n$
 $\frac{3n-1}{2} = 2n, n=1$
 $\rightarrow$ 제3.
 i) 증가, 감소
 $n - 4n - 2n - n$
 $\frac{3n-1}{2} = 4n, n=5$
 ii) 증가, 감소
 $n - \frac{3n-1}{2} - 2n - n$
 $\frac{1}{2}(\frac{9n-3}{2} - 1) = 2n$
 $\frac{9n-5}{4} = 2n, n=5$
 $5 - 1 - 10 - 5 = 0$
 $c = 5 \text{ or } 10$
 $d = 1, 10, 20, \dots$

COMMENT

개인적으로 생각했을 때 공통에서 제일 잘만들어진 문제이다. 가능한 경우를 나열해주고, 수열의 증감성을 이용하여 주기가 2, 3인 경우 a 를 각각 구해주면 된다. 이렇게 수열의 증감성이나 방항성 등을 생각해서 푸는 문제는 이미 기출에 많으니 잘 알아두도록 하자.

COMMENT

공통에서 제일 어려운 문제. 공통부분 더하고 빼는 아이디어는 이 유형의 문제에서 이미 사용된 예가 많기 때문에 익혀두고 가는것이 맞다. tmi로, 검토진 중 한명은, 이 문제를 보고 경악했다...

5지선다형

23. 다항식 $(2x^2 - 1)^6$ 에서 x^4 의 계수는? [2점]

- ① 60 ② 75 ③ 90 ④ 105 ⑤ 120

$${}^6C_2 \times 4 = 60$$

24. 한 개의 주사위를 던졌을 때 나오는 눈의 수를 확률변수 X 라 하고 이산확률변수 Y 를

$$Y = \begin{cases} 3 & (X \text{가 } 4 \text{ 이하의 값을 가지는 경우}) \\ 4 & (X \text{가 } 5 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 할 때, $V(Y)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{3} \times 9 + \frac{1}{3} \times 16 \right) - \left(\frac{2}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 4 \right)^2 \\ &= \frac{34}{3} - \frac{100}{9} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

25. 두 사건 A, B 는 서로 독립이고

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

$$P(A) + \frac{1}{4} - P(A \cap B) = \frac{2}{3}$$

$$P(A) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P(A) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4}P(A) = \frac{5}{12} \quad P(A) = \frac{5}{9}$$

26. 두 상자 A, B에 대하여 상자 A에는 흰 공 5개가 들어있고, 상자 B에는 검은 공 5개가 들어있다. 한 개의 주사위와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 상자 A에 있는 흰 공 하나를 상자 B에 넣고, 6의 약수가 아니라면 상자 B에 있는 검은 공 하나를 상자 B에 넣는다.

위의 시행을 4번 반복한 후 양쪽 주머니의 흰 공의 수의 차이가 3보다 클 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{17}{81}$ ④ $\frac{7}{27}$ ⑤ $\frac{25}{81}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_4C_1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$= \frac{25}{81}$$

COMMENT

보통 기출에서는 27번 이상급으로 꽤나 무겁게 나오는 유형이다보니 걸보기 난도가 높아졌다.

하지만 26번에 맞게 쉽게 했으니 걸모습에 풀지 말자.

27. 어느 공장에서 생산하는 노트북 1대의 무게는 평균이 1200g이고 표준편차가 100g인 정규분포를 따른다고 한다.

이 공장에서 생산된 휴대전화 중에서 임의로 192대를 선택했을 때, 이들 중 무게가 1133g 이상인 노트북이 150대 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.50	0.19
0.67	0.25
0.84	0.30
1.00	0.34

- ① 0.50 ② 0.31 ③ 0.25 ④ 0.20 ⑤ 0.16

1133g 이상일 경우

$$\rightarrow 0.75 = \frac{3}{4}$$

192대 중의 선택, 1133g 이상인 노트북의 개수

$$= B(192, \frac{3}{4}), \text{정확도 } N(144, 6^2)$$

$$\therefore P(Z \geq 1) = 0.16$$

COMMENT

정규분포를 통해 구해진 확률을 활용해 이항분포를 정규분포로 근사한 뒤, 다시 정규분포를 활용해 확률을 구해야 하는 꽤 난이도가 있는 문제이다. 평가원은 아직까지 출제된 적 없는 내용이나, 오히려 그만큼 더 확실하게 대비를 해 두어야 할 것.

28. 주머니 속에 1 또는 3 또는 5의 숫자가 적혀 있는 공이 총 10개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 2번 반복하여 얻은 두 수의 평균을 $\bar{X}$ 라 하자.

$P(\bar{X}=5) = \frac{1}{25}$ 이고 $E(\bar{X})=3$ 일 때, $P(\bar{X}=3)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{11}{25}$ ② $\frac{13}{25}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{17}{25}$ ⑤ $\frac{19}{25}$

1이 적힌 공: a , 3이 적힌 공: b , 5가 적힌 공: c 라 하자.

1이 적힌 공의 확률 = $\frac{a}{10}$, 3이 적힌 공의 확률 = $\frac{b}{10}$, 5가 적힌 공의 확률 = $\frac{c}{10}$.

$$P(\bar{X}=5) = \frac{1}{25} \rightarrow \frac{c}{10} \times \frac{c}{10} = \frac{1}{25}, c=2$$

$$\rightarrow b=8-a$$

$E(\bar{X})=3 \rightarrow$ 1이 4번, 3이 4번, 5가 2번 나올 확률의 합을 구한다.

$$E(\bar{X})=E(X), 1 \times \frac{a}{10} + 3 \times \frac{8-a}{10} + 5 \times \frac{2}{10} = 3, a=2$$

$$\therefore P(\bar{X}=3) = \frac{1+9}{25} = \frac{11}{25}$$

COMMENT

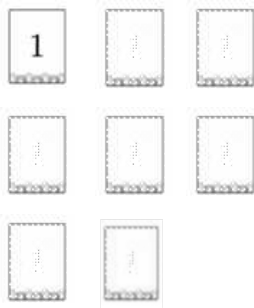
2021년 고3 10월 모의고사 30번의 변형으로, 해당 문항보다는 난이도가 중폭 하락했다. 하지만 핵심 아이디어는 여전히 유효하니, 풀이에 대해 한번 깊게 고민하는 시간을 가져 보자.

단답형

29. 숫자 1, 2, 3, 4가 적힌 카드가 각각 4장 이상씩 있다. 이 카드들을 모든 숫자가 적어도 하나씩은 포함되도록 8장을 택해 첫 번째 줄과 두 번째 줄에는 3장, 세 번째 줄에는 2장씩 나열한다. 다음 조건을 만족시키는 배치의 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 앞 뒤, 좌우로 이웃한 카드에 적힌 숫자가 다르다.

(나) 첫 번째 줄의 첫 번째 카드는 1이다.



⇒ ②과 ④에 써진 숫자 다르면
(1, 3)으로 가능한 숫자 한쌍 개수
= $2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$
①과 ④가 다른 경우 ②과 ③이 같은 경우



← 첫 4개 다 가능한 경우, (1, 2, 3)이 가능한 경우,
i) $\begin{pmatrix} (1, 2) \\ (1, 3) \\ (2, 3) \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} (1, 2, 4) \text{ 가능한 경우,} \\ (1, 2) \\ (1, 4) \\ (2, 4) \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} (1, 3, 4) \text{ 가능한 경우,} \\ (1, 3) \\ (1, 4) \\ (3, 4) \end{pmatrix}$

의 개수 = $3 \times 7 \times 7 \times 7$,

i) + ii) + iii) = $3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ i), ii), iii)의 경우

i), ii), iii)
3개

→ $\begin{pmatrix} (1, 2) \\ (1, 3) \\ (1, 4) \end{pmatrix} \Rightarrow 6$

$(3 \times 7 \times 7 \times 7) - (3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3) + 6 = 873$.

COMMENT

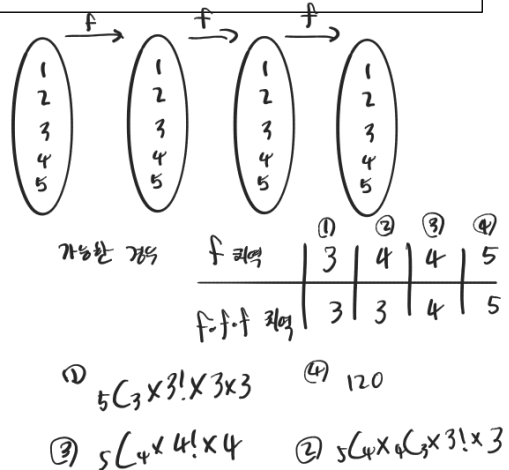
확통 30번과 더불어 가장 늦게 해설을 작성한 문제이다. 문제 좀 풀어보면 왜 이런말 한지 알 것이다. 그냥 어렵다. 색칠하기 문제와 비슷한 발상을 가지고 가야하는데 그걸 생각하는거 자체가 어렵고, 생각 했더라도 교집합의 정확한 이해가 필요해 상황 자체를 제대로 이해하지 못했다면 시간만 날리고 못풀었을 가능성이 매우 높다. 못풀었어도 괜찮으니 아이디어라도 챙겨가자.

30. 집합 $X = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택한다. 선택한 함수 f 가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 f 의 치역의 원소의 개수가

4이상일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

함수 $f \circ f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수는 3이상이다.



$$\frac{② + ③ + ④}{① + ② + ③ + ④} = \frac{360 + 480 + 120}{540 + 360 + 480 + 120}$$

$$= \frac{16}{25} \cdot p + q = 41$$

(41)

COMMENT

진짜 해설 쓰기 싫었던 문제.

그냥 가능한 케이스 나누고 침착하게 계산했다면 맞출 수 있었을 것이다.

그 사고 과정과 계산 등이 어렵다.

873

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x^3 + 4x^2 + 1)}{\sin^2 x}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ☒ ④ 4 ⑤ 5

24. 매개변수 $t(t > 0)$ 으로 나타내어진 곡선

$$x = t^2 + 2t + 1, \quad y = \ln(2t^2 + 1)$$

위의 점 $(4, k)$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ☒ ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad t = 1 \quad (t > 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t}{(2t+2)(2t^2+1)}$$

25. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(a_n)^2 + 3n} - a_n)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

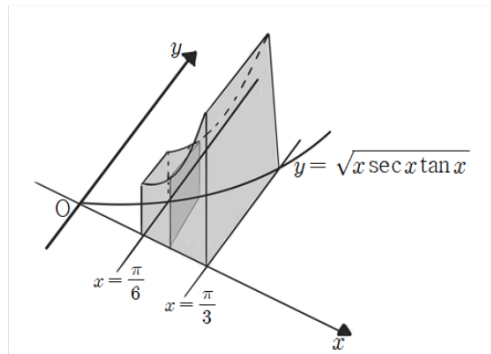
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{a_n^2 + 3n} + a_n} = \frac{1}{2}$$

26. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x \sec x \tan x}$ 와 x 축 및 두 직선

$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$ 으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이

있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

- ① $\frac{3 - \sqrt{3}}{9} \pi + \ln\left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}\right)$ ② $\frac{3 - \sqrt{3}}{9} \pi + \ln(2\sqrt{3} - 3)$
 ③ $\frac{6 - \sqrt{3}}{9} \pi + \ln\left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{3}\right)$ ④ $\frac{6 - \sqrt{3}}{9} \pi + \ln\left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}\right)$
 ⑤ $\frac{6 - \sqrt{3}}{9} \pi + \ln(2\sqrt{3} - 3)$



$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \sec x \tan x \, dx &= \left[x \sec x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec x \, dx \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right) \pi - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = \frac{6 - \sqrt{3}}{9} \pi - \left[\ln |\sec x + \tan x| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{6 - \sqrt{3}}{9} \pi + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right) = \frac{6 - \sqrt{3}}{9} \pi + \ln(2\sqrt{3} - 3) \end{aligned}$$

COMMENT

sec의 적분을 물어서 당황했을 수 있다. 이렇게 특이한 함수의 적분법은 알아둬서 나쁠 것 없으니 몰랐다면 알아두고 가자.

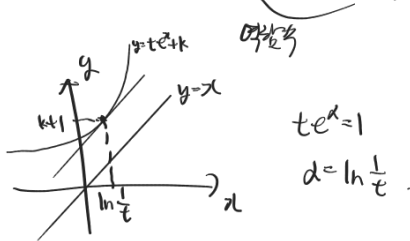
27. 실수 t, k 에 대하여 두 점 A, B는 각각 $(0, \frac{2}{k})$ 를 지나는

곡선 $y = te^x + k$, 곡선 $y = \ln(\frac{x-k}{t})$ 위의 점이다. 선분 AB의

길이의 최솟값을 $f(t)$ 라 하고 $f(t)$ 가 미분가능할 때, $f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

$$t+k=\frac{2}{k} \quad y=te^x+k, y=\ln(\frac{x-k}{t})$$



$$f(t) = \sqrt{2} \left| k+1 - \ln \frac{1}{t} \right|$$

$$1+k' = -\frac{2}{k^2}k' \quad t=1 \rightarrow k=1$$

$$k' = -\frac{1}{3} \quad f'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

COMMENT

두 함수가 역함수라는 것만 확인해 줬다면 쉽게 풀렸을 것이다.
보통의 음함수 미분법은 나머지 관계식을 숨겨놓기 마련인데, 이 문제는
첫줄에 대놓고 관계식을 줬기 때문에 이 정도는 미적러라면 바로 맞춰야
한다.

28. 양수 a 에 대하여 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인
함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $ae^{2f(x)} - xe^{f(x)} = 1$ 이다.

(나) $\int_0^e xf'(x)dx = 7e - 2\sqrt{a}$ 이다.

$e^{f(e)} + f'(11e)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{3e}$ ② $\frac{14}{39e}$ ③ $\frac{5}{13e}$ ④ $\frac{16}{39e}$ ⑤ $\frac{17}{39e}$

$$ae^{f(x)} - e^{-f(x)} = x \quad (e^{f(x)} > 0)$$

$$(ae^x - e^{-x}) \cdot f(x) = x$$

$$f(x)=t, g(t)=x \quad \int_0^e xf'(x)dx = \int_{f(0)}^{f(e)} g(t)dt = 7e - 2\sqrt{a}$$

$$f(0)=0, g(0)=0, a=\ln(\frac{1}{\sqrt{a}})$$

$$\int_{f(0)}^{f(e)} g(t)dt = [ae^t + e^{-t}]_{f(0)}^{f(e)} = ae^{f(e)} + e^{-f(e)} - 2\sqrt{a} = 7e - 2\sqrt{a}$$

$$ae^{f(e)} + e^{-f(e)} = 7e, ae^{f(e)} - e^{-f(e)} = e$$

$$e^{-f(e)} = 3e, ae^{f(e)} = 4e, a = 12e^2$$

$$g(1) = 11e, e^{f(e)} + f'(11e) = \frac{1}{3e} + \frac{1}{g'(1)} = \frac{16}{39e}$$

COMMENT

가조건 해석하는 것이 어렵다.
그래도 나 조건을 통해 역함수 적분인 것을 알아차렸다면, 가 조건으로 돌아가서
다시 해석할 수 있었을 것이다.
그 이후는 천천히 계산해주면 된다.
계산량도 꽤 되고 발상적인 면도 있어서 난이도 있는 문항이다.
물론 6평 28번보다는 쉽다.

단답형

29. 모든 항이 서로 다른 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 은 수열 a_n 을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이라 하자. 0이 아닌 실수 k 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|b_n| - b_n}{a_n} \right) = k, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{k}{2}$$

일 때, 가능한 모든 a_1 의 값의 범위는 $a_1 = p$ 또는

$q < a_1 < r$ 이다. $(p+q-r)^2$ 의 값을 구하시오. (단, p, q, r 은 서로다른 세 실수이다.) [4점]

$$a_n \text{ 항 } \rightarrow |r| < 1,$$

$$i) 0 < r < 1, a_1 > 0 \rightarrow k=0. (x)$$

$$ii) 0 < r < 1, a_1 < 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|b_n| - b_n}{a_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \text{발산}. (x)$$

$$iii) -1 < r < 0, a_1 < 0 \rightarrow b_1 = a_1, b_2 = a_3, b_3 = a_5 \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|b_n| - b_n}{a_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} -2 \cdot r^{n-1} = \frac{-2}{1-r} = k,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{k}{2} \rightarrow a_1 = -1.$$

$$iv) -1 < r < 0, a_1 > 0 \rightarrow b_1 = a_2, b_2 = a_4, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|b_n| - b_n}{a_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} -2 \cdot r^n = \frac{-2r}{1-r} = k.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{k}{2}, \quad a_1 = -r.$$

$$\rightarrow 0 < a_1 < 1$$

$$p = -1 \quad q = 0 \quad r = 1$$

(4)

COMMENT

새로운 스타일의 급수 문제라 해맸을 수도 있는 문제이다. 하지만 r 의 값의 범위를 나눠주고 관찰만 해준다면 계산할 필요 없이 답이 나온다.

30. 최고차항의 계수가 1이고 $x=1$ 에서 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = |f(e^{2x} - 2e^x)|$$

가 구간 $[\ln 2, \infty)$ 에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad g'(\ln 2) = 36$$

(나) 함수 $g(x)$ 는 서로 다른 극값의 개수는 3이고, 극댓값 8을 갖는다.

함수 $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 극대 또는 극소인 모든 실수 a 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 이라 하자.

$f(n) + e^{a_{n-1} + a_n} = p + q\sqrt{2}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, n 은 1보다 큰 자연수이고, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]

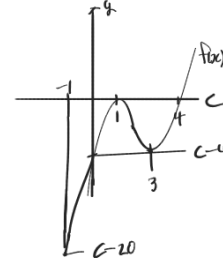
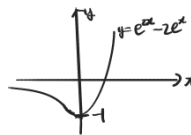
$g(x)$ 가 $[\ln 2, \infty)$ 에서 미분가능. $\rightarrow f(x)$ 는 $[0, \infty)$ 에서 미분가능.

$f(x)$ 가 최댓값 1, 극점을 가짐. $\rightarrow x \geq 0$ 에서 $f(x) \geq 0$.

$$x \geq \ln 2 \text{ 에서 } g(x) = f(e^{2x} - 2e^x), \quad f'(x) = 3(x-1)(x-4),$$

$$g'(\ln 2) = 4f'(\ln 2) = 36, \quad f'(\ln 2) = 9, \quad a = 3. \quad f(x) = (x-1)^2(x-4) + C.$$

$$g(x) \text{가 } x = \ln 2 \text{ 에서 미분가능, } f(x) > 0 \dots C \geq 4.$$



$$i) 4 < C < 20$$

$(-1, 0)$ 인 k 에 대하여 $f(x) = 0$ 만족하는 k 존재.

$$e^{2x} - 2e^x = k$$

$$\leq \text{성립 } \alpha, \beta.$$

$$h(x) = f(e^{2x} - 2e^x) \text{ 라 하면 } g(x) = |h(x)|.$$

$g(x)$ 는 $x = \alpha, \beta, \ln 3$ 에서 극소, $x = 0, \ln(\ln 2)$ 에서 극대.

$$e^{2x} - 2e^x = 3, \quad e^x = 3, \quad x = \ln 3$$

$$e^{2x} - 2e^x = 1, \quad e^x = \ln \sqrt{2}, \quad x = \ln(\ln \sqrt{2})$$

$$x = 0 \rightarrow -f(-1) = 20 - C = 8. \quad C = 12, \quad 0 < -f(-1) = f(0) < f(1)$$

$$x = \ln(\ln \sqrt{2}) \rightarrow f(1) = C = 8. \quad C = 8, \quad 0 < f(1) < f(4)$$

$$C = 12, \quad n = 5, \quad a_4 = \ln(\ln \sqrt{2}), \quad a_5 = \ln 3 \quad f(5) = 28, \quad e^{a_4 + a_5} = 3 \ln \sqrt{2}.$$

$$f(5) + e^{a_4 + a_5} = 31 + 3 \ln 2 \quad p + q = 34.$$

$$ii) C \geq 20, \quad \text{모든 실수 } x, \quad g(x) = h(x) \quad g(x) \text{가 } x = 0, \ln 3 \text{에서 극소,}$$

$$f(1) \geq 20, \quad \text{극대 8X.} \quad x = \ln(\ln \sqrt{2}) \text{에서 극대}$$

(X)

(34)

COMMENT

함수함수의 극값을 묻는 문제이다. 발문 속 조건들을 통해 미지수 하나만 남겨 놓고 $f(x)$ 를 특정할 수 있게 된다. 그 후 함수된 함수의 치역을 고려해서 범위를 나눠주면 생각보다 수월하게 나온다.

그럼에도 30번이 주는 무게와 겉보기 난도를 생각하면, 정답률이 매우 낮을 것으로 예상된다.

제 2 교시

수 학 영역(기하)

5 지선 다형

23. 두 벡터 $\vec{a} = (3, 2)$, $\vec{b} = (3k, 4)$ 에 대하여 두 벡터 $\vec{a} - \vec{b}$ 와 $\vec{a} + \vec{b}$ 가 평행할 때, k 의 값은? [2점]

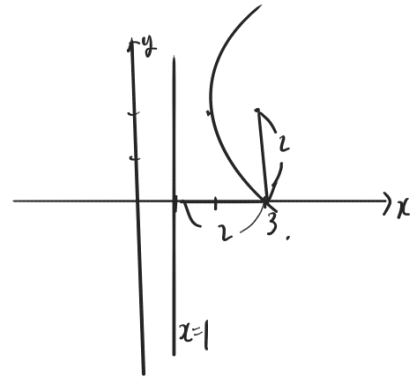
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$(3-k, -2) \quad (3+3k, 6)$$

$$9k-9=3+3k \quad k=2$$

24. 초점의 좌표가 $(3, 2)$ 이고, 꼭짓점의 좌표가 $(2, 2)$ 인 포물선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



25. 좌표공간의 두 점 $A(a, 4, 2)$, $B(-6, b, 3)$ 에 대하여 선분 AB를 4:3으로 외분하는 점이 z 축 위에 있을 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ 3

$$(-24-3a, 4b-12, 6)$$

$$a=-8, b=3$$

$$\sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

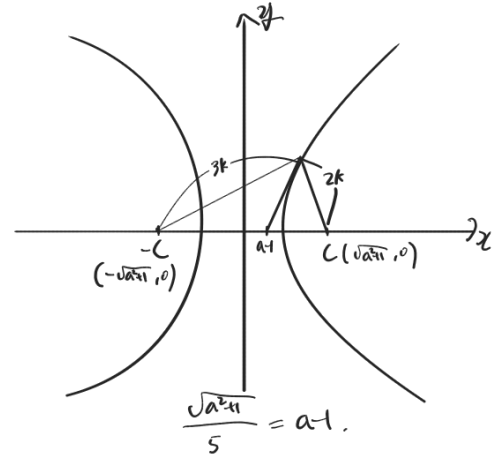
26. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$

위의 점 P가 제1사분면 위에 있고 $\overline{F'P} : \overline{FP} = 3 : 2$ 를 만족시킨다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 위의 점 P에서의 접선이 $(a-1, 0)$ 을 지날

때, 양수 a 의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$



$$\frac{\sqrt{a^2+1}}{5} = a-1.$$

$$25(a^2-2a+1) = a^2+1.$$

$$12a^2 - 25a + 12 = 0$$

$$(3a-4)(4a-3)$$

$$a = \frac{4}{3} \quad (a-1 > 0)$$

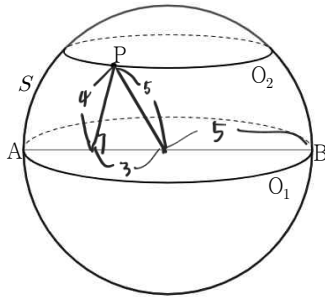
COMMENT

두 초점을 포함하고 쌍곡선 위의 한 점을 지나는 삼각형에서 쌍곡선 위의 점에서의 접선은 각을 이등분 한다는 것을 알고 있었다면 보다 빨리 구할 수 있었다.

해설도 이 방식으로 풀었다.

27. 좌표공간에 $\overline{AB}=10$ 인 선분 AB를 지름으로 하는 구 S와 원 O_1 이 있다. 원 O_1 을 포함하는 평면에 평행한 평면이 구 S와 만나서 생기는 원을 O_2 라 할 때, 원 O_2 의 반지름의 길이가 4이다. 원 O_2 위의 점 중에서 직선 AB까지의 거리가 4인 점 P에 대하여 선분 PB의 길이의 최댓값은? [3점]

- ① $2\sqrt{15}$ ② $\sqrt{65}$ ③ $\sqrt{70}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$ ✓



$$\overline{PB} = 4\sqrt{5}$$

COMMENT

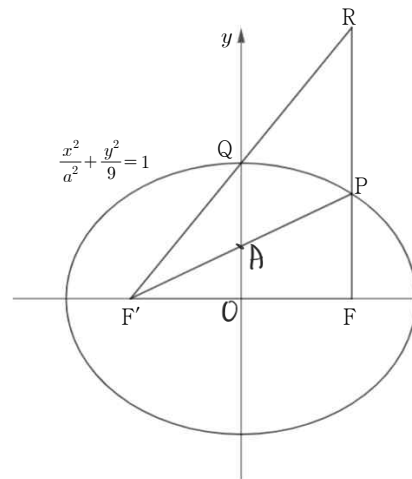
27번치고 진짜 너무 쉬운 문제이다.

삼수선 정리 쓸 필요도 없이, O1과 O2의 거리를 구할 필요도 없이 피타고라스 두번만 써주면 끝난다.

사실 정사영된 길이를 물어봄으로써 삼수선 정리와 수준 높은 공간지각력을 요구하려 했으나 29 30이 너무 어려워서 그냥 쉽게 졌다.

28. 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$ ($a > 0$)에 대하여 x좌표가 양수인 초점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 타원과 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 F가 아닌 초점 F'과 점 Q(0, 3)에 대하여 직선 F'Q와 직선 FP의 교점이 R이고, 직선 PF'은 $\angle QF'F$ 의 이등분선이다. $\triangle FF'R$ 의 넓이가 $p + \frac{q}{2a-3}$ 일 때, $p+q$ 의 값은? [4점]

- ① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38 ✓



$$F(\sqrt{a^2-9}, 0)$$

$$F'(-\sqrt{a^2-9}, 0)$$

$$\overline{F'Q} = a, \overline{F'P} = \sqrt{a^2-9}$$

$$1 - \frac{9}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1, y = \frac{9}{a}$$

$$\overline{FP} = \frac{9}{a}, \overline{OA} = \frac{9}{2a}$$

$$\overline{QA} = 3 - \frac{9}{2a}$$

$$a : \sqrt{a^2-9} = 3 - \frac{9}{2a} : \frac{9}{2a}$$

$$\frac{3}{2a} (2a-3) \sqrt{a^2-9} = \frac{9}{2}$$

$$(2a-3) \sqrt{a^2-9} = 3a$$

$$\triangle F'FR = 4 \times \triangle F'OQ = 6\sqrt{a^2-9}$$

$$= \frac{6a}{2a-3} = 9 + \frac{27}{2a-3}$$

$$p+q = 36$$

COMMENT

재미있는 문제이다.

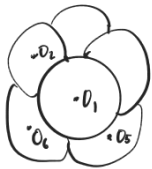
a의 값이 깔끔하게 나오지 않는 상황에서 넓이의 값을 a에 대한 식으로 줘 a를 직접 구하지 않고 관계식끼리의 연립으로 풀리게끔 졌다.

단답형

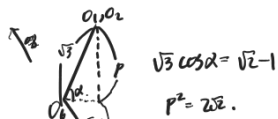
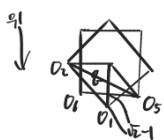
29. 서로 다른 8개의 구 $S_1, S_2, \dots, S_8$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 구 $S_1, S_2, \dots, S_8$ 의 중심을 각각 $O_1, O_2, \dots, O_8$ 이라 할 때 사각형 $O_1O_2O_3O_4$ 와 사각형 $O_5O_6O_7O_8$ 은 모두 한 변의 길이가 2인 정사각형이고, 삼각형 $O_1O_2O_6$ 과 삼각형 $O_1O_5O_6$ 은 모두 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.
 (나) 두 직선 O_1O_2 와 O_5O_6 이 이루는 예각의 크기는 45° 이고, 모든 구는 각각 4개의 서로 다른 구와 외접한다.

평면 $O_1O_2O_6$ 이 구 S_2 와 만나서 생기는 단면을 D라 하자. 단면 D의 평면 $O_1O_5O_6$ 위로의 정사영의 넓이를 $(p+q\sqrt{2})\pi$ 라 할 때, $60(p+q)$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]



$\overline{O_1O_6}$ 길이
 $\triangle O_1O_2O_6$ 와
 $\triangle O_1O_5O_6$ 의
 면적의 3배



$$g^2 = 2 + 2 - 4 \cos 135^\circ = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\overline{O_1O_6}^2 = 4 + 4\sqrt{2}$$



$$\overline{O_1O_6} = \overline{O_1O_5} = \sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{2+3-4-4\sqrt{2}}{6} = \frac{1-2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{평면 } O_1O_2O_4 \text{ 과 평면 } O_1O_5O_6 \text{ 의 } \theta \text{ 의 } \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

$$\pi \times \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \pi, \quad 60(p+q) = 20$$

20

COMMENT

일단 어렵다.

상황을 그리는 것부터 쉽지 않았을 것이고, 계산도 복잡하며, 여러 방향에서 본 단면을 고려하여 각을 구해야 하는 문제로 공간도형에 뛰어난 재능이 있는 게 아니라면 맞추기 어려웠을 것이다.

30. 그림과 같이 좌표평면에 $\overline{AB}=n$ 인 직사각형 ABCD가 있다.

직사각형 ABCD의 둘레 또는 내부를 움직이는 점 P에 대하여

$$(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = 0$$

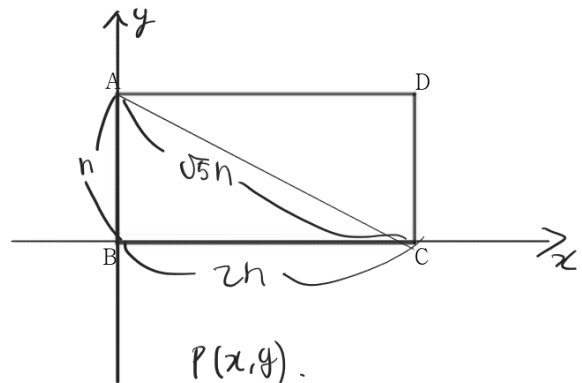
을 만족시키는 점 P의 집합이 나타내는 도형의 길이가 $n^2\pi$ 이고 점 P에 대하여

$$5\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

를 만족시키는 점을 Q라 하자. $\sqrt{5}|\overline{AB}| = |\overline{AB} - \overline{AD}|$ 일 때 점

Q가 나타내는 도형의 길이가 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



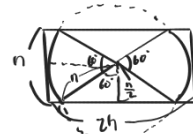
$$((-x, n-y) + (-x, y)) \cdot ((2n-x, y) + (2n-x, n-y))$$

$$= (-2x, n-2y) \cdot (4n-2x, n-2y) = 0$$

$$\frac{n-2y}{-2x} \times \frac{n-2y}{4n-2x} = -1, \quad \frac{(2y-n)^2}{2x(2x-4n)} = -1$$

$$2x(2x-4n) + (2y-n)^2 = 0, \quad (2x-2n)^2 + (2y-n)^2 = 4n^2$$

$$(x-n)^2 + (y-\frac{n}{2})^2 = n^2$$



$$P \text{의 } \theta = \frac{2n}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

$$n = \frac{2}{3}, \quad \frac{2n}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi$$

$$5(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OP}$$

$$5\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OP} +$$

$$Q \rightarrow P \times \frac{2}{5}, \text{ 반경 } \frac{2}{5}, \text{ 원호 } \frac{4}{9}\pi \times \frac{2}{5} = \frac{8}{45}\pi, \quad p+q=53$$

53

COMMENT

일단 어렵다22.

기출 벡터 문제들은 보통 벡터 관계식 두개가 나오지만, 이건 3개나 나와서 더 빠르게 세졌다. 원이 잘린다면, n값을 구하고 p의 자취의 길이를 구할 때의 경우 등 실수할 요소도 많고 계산도 빠진 문제.

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.