**8.** $a+b=17$ 인 두 상수 $a$, $b$ 에 대하여 두 점 $(2, \log_2 a)$, $\left(1, -\dfrac{1}{\log_b 2}\right)$ 을 지나는 직선의 기울기가 4일 때, $\log_4 a+\log_{16} b$ 의 값은? [3점]

① $-2$　② $-1$　③ 0　④ 1　⑤ 2

$b \neq 1$ 체크!

→ 일차항 계수 0

**9.** $f'(0)=0$, $f(1)=2$ 인 이차함수 $f(x)$ 가

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\int_{1}^{2} f(x)\,dx$$

$= 2\int_0^2 f(x)dx$

를 만족시킬 때, $\displaystyle\int_{2}^{3} f(x)dx$ 의 값은? [4점]

① 14　② 16　③ 18　④ 20　⑤ 22

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=0$

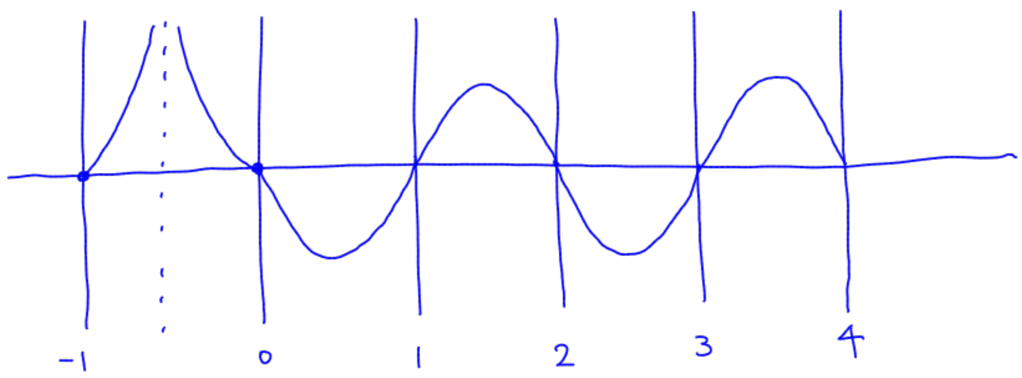
**10.** 5 이상의 자연수 $a$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x)=\begin{cases} |\tan \pi x| & \left(-1 \le x < 0,\ x \ne -\dfrac{1}{2}\right) \\ -\sin \pi x & \left(0 \le x \le \dfrac{a}{2}\right) \end{cases}$$

라 하자. $t \ge -1$ 인 실수 $t$ 에 대하여 $x$ 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 모든 실근의 합을 $g(t)$ 라 할 때, 집합 $\{g(t) \mid t$ 는 $t \ge -1$ 인 실수$\}$ 의 모든 원소의 합은 $\dfrac{31}{2}$ 이다. $a+g(a-5)$ 의 값은? [4점]

$=15.5$

① 6　② $\dfrac{13}{2}$　③ 7　④ $\dfrac{15}{2}$　⑤ 8




무한집합이 아님 : $a$는 짝수

$a=6$일 때

| $g(t)$ | $t$ |
|---|---|
| $-1$ | $t>1$ |
| $-1+1.5$ | $t=1$ |
| $-1+3$ | $0<t<1$ |
| 5 | $t=0$ |
| 6 | $-1<t<0$ |
| 3 | $t=-1$ |

→ 15.5

$a=6$, $g(1)=\frac{1}{2}$

$\therefore \boxed{\frac{13}{2}}$

**11.** 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가 상수 $k\ \left(k > -\frac{7}{6}\right)$에 대하여

$-6k < 7$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 - (k+3)t^2 + 2t & (0 \leq t \leq 3) \\ -kt^2 - 7t + 9 & (t > 3) \end{cases}$$

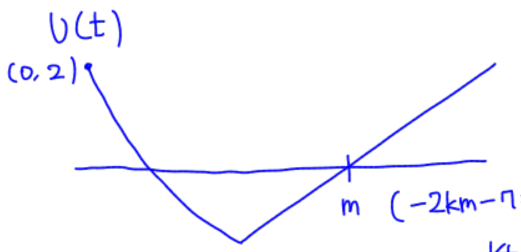
이고, 점 P는 출발한 후 운동 방향을 두 번 바꾼다. 점 P의 운동 방향이 $\boxed{\text{두 번째로 바뀌는}}$ 시각을 $t=m$라 할 때, 시각 $t=4m$에서 점 P의 위치는 107이다. 시각 $t=2k+3$일 때 점 P의 가속도는? (단, $m$은 상수이다.) [4점] $=1$

존재: $k<0$

① $-2$ ② $-\frac{7}{4}$ ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-1$

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 2(k+3)t + 2 & (0 \leq t \leq 3) \\ -2kt - 7 & (t > 3) \end{cases}$$

$v(3) = -6k - 7 < 0$




$(-2km - 7 = 0)$

$4m = -\frac{14}{k}$

$x(4m) = -\frac{196}{k} + \frac{98}{k} + 9 = 107$

$\therefore k = -1$

$a(t) = 2t - 2(k+3)$

$a(1) = -2k - 4 = \boxed{-2}$

**12.** 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $d\ (d \neq 0)$인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 $n$에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n - |a_n| & (n \leq 5) \\ a_n + |a_n| & (n > 5) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{n} b_k = da_2$를 만족시키는 $n$이 3과 6뿐일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값은? [4점]

① 30 ② 40 ③ 50 ④ 60 ⑤ 70

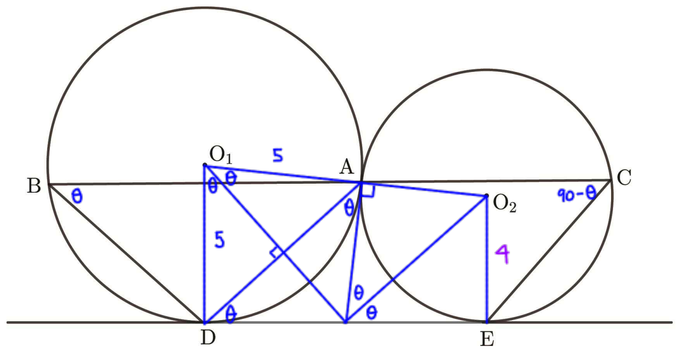
**13.** 두 상수 $a$, $b$ $(0 \le a \le b \le 5)$에 대하여 함수 $f(x) = x(x-a)(x-b)(x-5)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_a^5 |f(x)|\,dx$의 값은? [4점]

(가) $\int_0^5 f(x)\,dx = 0$

(나) $\int_0^b |f(x)|\,dx \le \int_0^b f(x)\,dx$

① $\frac{206}{5}$ ② $\frac{216}{5}$ ③ $\frac{226}{5}$ ④ $\frac{236}{5}$ ⑤ $\frac{246}{5}$

**14.** 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원 $O_1$과 점 A에서 접하는 원 $O_2$가 있다. 점 A가 아닌 원 $O_1$ 위의 점 B와 점 A가 아닌 원 $O_2$ 위의 점 C에 대하여 점 A는 선분 BC위에 존재한다. 원 $O_1$ 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle ABD) = \frac{2}{3}$이고, 점 D에서 그은 접선이 원 $O_2$와 점 E에서 접할 때, $\overline{AC} : \overline{CE} = 4 : 3$이다. 선분 AC의 길이는? (단, 두 선분 $\overline{DE}$와 $\overline{O_1O_2}$는 만나지 않는다.) [4점]




① $\frac{16\sqrt{5}}{9}$ ② $\frac{20\sqrt{5}}{9}$ ③ $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{28\sqrt{5}}{9}$ ⑤ $\frac{32\sqrt{5}}{9}$

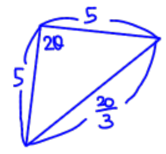
1 단계

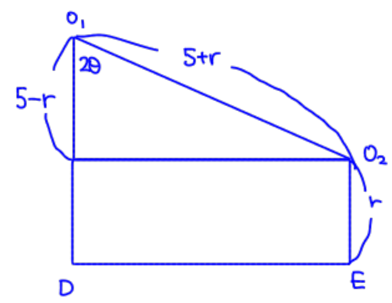
$\frac{AD}{\frac{2}{3}} = 10$

$\sin AO_1D = \sin 2\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta = \frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos 2\theta = \frac{1}{9}$

$\frac{2}{3}$ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(원래는  cos 법칙)

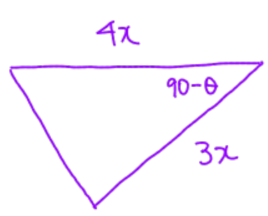

$\frac{5-r}{5+r} = \frac{1}{9}$

$45 - 9r = 5 + r$

$40 = 10r$

$r = 4$

2 단계




$\cos(90-\theta) = \sin\theta = \frac{2}{3} = \frac{16+9-\square^2}{2\cdot4\cdot3}$

$\therefore \square = 3$, $AE = 3x$

$\frac{3x}{\sin(90-\theta)} = 2\times4$

$x = \frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{8\sqrt{5}}{9}$

$4x = \boxed{\frac{32\sqrt{5}}{9}}$

15. 두 상수 $a$, $b$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (|x|>1) \\ x^2+ax+b & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 $x=-1$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

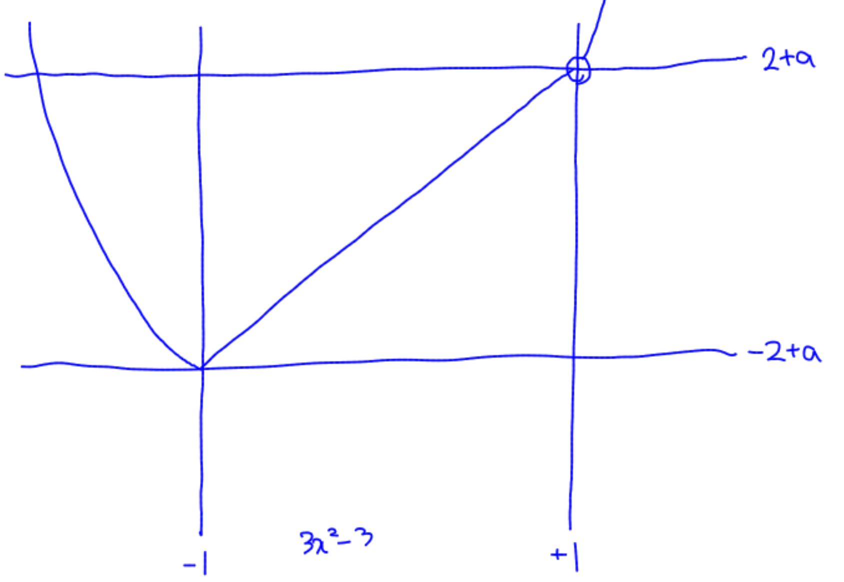
(가) $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}$ $=g'(1^-)$

(나) $x$에 대한 방정식 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=k$가 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 모든 실수 $k$의 값의 합은 4이다. : $g(x)$는 $x=1$ 불연속.

$x$에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 $t$의 최댓값이 4일 때, $g(3)+g(1)$의 값은? [4점]

$g'(x)$

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

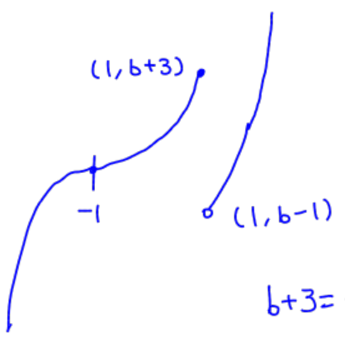



$f'(x)=3(x-1)(x+1)+(2x+a)$

$f'(1)=2+a$ $f'(-1)=-2+a$ $k$합 $2a=4$ ∴ $a=2$

$f(x)=x^3-3x+x^2+2x+C$

$f(-1)=C+1=b-1$ , $C=b-2$




$b+3=4$ , $b=1$

$g(3)=f(3)=32$

$g(1)=4$

∴ $\boxed{36}$

**단답형**

16. 방정식

$$\log_2(x-3)-2=\log_{\frac{1}{2}}(x-6)$$

을 만족시키는 $x$의 값을 구하시오. [3점]

17. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$일 때 $g(0)=2$, $g(-2)=-6$이다. $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

**21.** 양수 $a$에 대하여 $f(0)=0$이고, 최고차항의 계수가 $a$인 이차함수 $f(x)$가 있다. 양수 $k$에 대하여 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

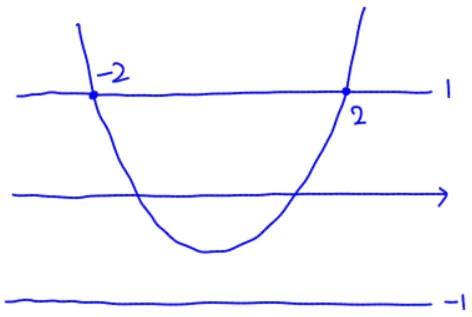
> (가) $\lim_{x\to b}\dfrac{f(x+k)}{\sqrt{\{f(x)\}^2+3}-2\{f(x)\}^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 $b$의 값은 2뿐이다.
>
> (나) $f(a)=\dfrac{1}{4}a^2$

$f(x)=ax^2+\left(\frac{1}{4}a-a^2\right)x$

$\lim_{x\to b}\dfrac{\left(\sqrt{f(x)^2+3}+2f(x)^2\right)f(x+k)}{(1-f(x))(1+f(x))(4f(x)^2+3)}$

$f\le -1$ 실근 있다면 존재X $b$ 최소 2개.

$f>1$ 이라면 $b$ 없음 → $f$ 개형 확정




$f(2)=1$ : $a=\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{1}{4}x^2$

$f(-2+k)=0$ 일 때

$x=-2$에서 값 존재

→ $k=2$

$2+\frac{1}{4}\times 6^2=\boxed{11}$

**22.** $|a_2|\ge a_3>1$이고, 첫째항이 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$과

$|r|<1$

자연수 $k$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=\begin{cases} ka_n & (a_n<1) \\ \dfrac{1}{a_{2n}} & (a_n\ge 1)\end{cases}$$

이라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|b_n|=1$을 만족시키는 자연수 $n$의 개수는 2이고, 그 합은 10이다. 1, 9 2, 8 3, 7 4, 6
>
> (나) $1\le n\le 10$인 자연수 $n$에 대하여 $a_n>b_n$인 자연수 $n$의 개수를 $m$이라 할 때, $|a_m|=\dfrac{2}{m}$이다.

$k-b_k$의 값을 구하시오. [4점]

$b_3=\frac{1}{a_6}$ $|b_n|=1$ : $a_n=-\frac{1}{k}$ or $\frac{1}{k}$ $(a_n<1)$

$a_{2n}=-1$ or $1$ $(a_n\ge 1)$

$b_2=ka_2$ $(a_2<-1)$

or

$\frac{1}{a_4}$ $(a_2>1)$

$a_n=\pm\frac{1}{k}$이 최초의 $|b_n|=1$ 이라면 그 다음 $|b_n|=1$ 못 나옴.

: $a_{2n}=\pm 1$이 최초의 $|b_n|=1$

해보면서 파악하자.

$n=3, 7$. $a_6=-1$ 이라 하면

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | -16 | | -4 | | | | | | |
| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $a_n$ | 양수 | 음수 | | | | -1 | 양수 $=+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | | |
| | V | V | V | V | V | V | ^ | V | ^ | V |
| $b_n$ | 음수 | k×음수 | -1 | | | | k×양수 = +1 : k=2 | | | |

$a_8=-\frac{1}{4}$ by (나)

$2-b_2=2-ka_2$

$=2-2\times(-16)=\boxed{34}$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 『선택과목(확률과 통계)』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

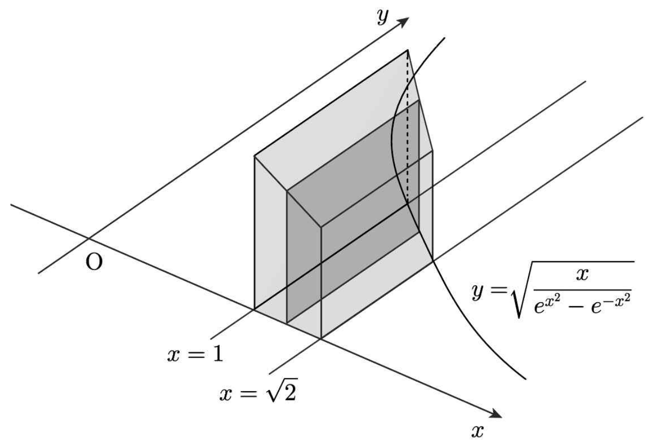
**25.** 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_n{}^2 a_{n+1} = 3a_n{}^2 - 3a_n + 1$$

을 만족한다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - m)^2$이 수렴할 때, 상수 $m$의 값은? [3점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

**26.** 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\frac{x}{e^{x^2}-e^{-x^2}}}$ 와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=\sqrt{2}$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]




① $\frac{1}{4}\ln\frac{(e-1)^2}{e^2+1}$　② $\frac{1}{2}\ln\frac{(e-1)^2}{e^2+1}$　③ $\ln\frac{(e-1)^2}{e^2+1}$
④ $\frac{1}{4}\ln\frac{(e+1)^2}{e^2+1}$　⑤ $\frac{1}{2}\ln\frac{(e+1)^2}{e^2+1}$

$$V = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{e^{x^2}-e^{-x^2}}\,dx$$

$$\frac{xe^{x^2}}{e^{2x^2}-1} = \frac{xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)(e^{x^2}-1)}$$

$$= -\frac{xe^{x^2}}{2}\left(\frac{1}{e^{x^2}+1} - \frac{1}{e^{x^2}-1}\right)$$

**27.** 실수 전체의 집합에서 $f'(x) \ge \frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 부등식

: 최고차 양수.

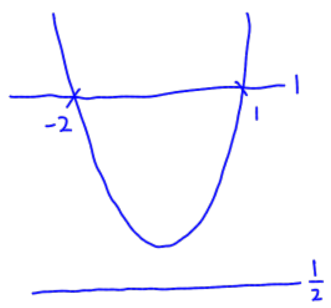
$$f'(x) \le g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

를 만족시키는 모든 실수 $x$의 범위가 $-2 \le x \le 1$이고 $1 = f'(1) = g'(1)$일 때, $f(-2)+f'(2)$의 최댓값은? [3점]

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{14}{9}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

$f'(x)^2 \le 1$

$\frac{1}{2} \le f'(x) \le 1$ 범위 $-2 \le x \le 1$




$f'(x) = A(x+2)(x-1)+1$

$f'(x) \ge f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}A+1 \ge \frac{1}{2}$

$\to A \le \frac{2}{9}$

$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{1}$

$\therefore g(1) = 1$ or $-2$

i) $g(1)=1$, $f(1)=1$

$f(x) = A(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x)+x+C$

$f(1) = -\frac{7}{6}A+1+C = 1 \quad \therefore C = \frac{7}{6}A$

$f(-2) = A(-\frac{8}{3}+2+4)-2+\frac{7}{6}A$

$f'(2) = 4A+1$

$f(-2)+f'(2) = \frac{17}{2}A-1 \le \frac{17}{2}\times\frac{2}{9}-1$

$= \frac{8}{9}$

ii) $g(1)=-2$, $f(-2)=1$

$f'(2)=4A+1$

$f(-2)+f'(2) = 4A+2 \le \frac{8}{9}+\frac{18}{9} = \boxed{\frac{26}{9}}$

$f(-2)+f'(2) \le 1+f'(2)$
$= 1+(4k+1)$
$\le \frac{2}{9}\times 4+2$
$= \frac{10}{9}$

답지 잘못된듯...?

**28.** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $[-1, 1)$에서 $f(x) = x^2\cos(\pi x)$이고, 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다. 6 이하의 어떤 자연수 $k$에 대하여 함수 $g(x)$를

우함수

$$g(x) = \int_k^x f(t)\,dt$$

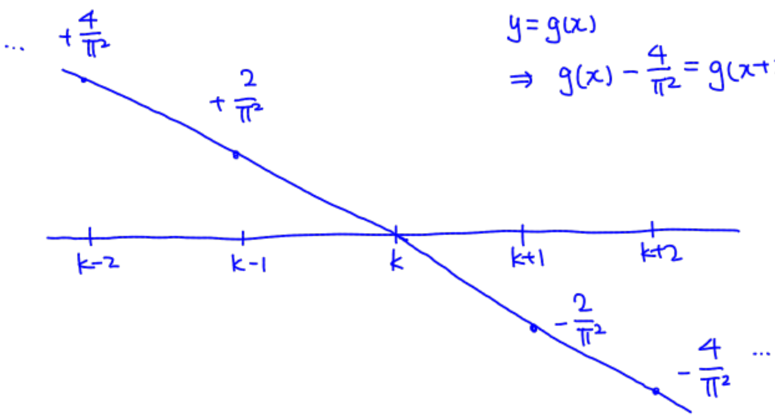
$g(x)$는 $(k, 0)$ 점대칭

($\because$ $g'(x) = f(x)$가 선대칭)

라고 하자. $\int_{k-5n}^{8k+6} g(x)\,dx = 0$를 만족하는 어떤 자연수 $n$이 존재할 때, $\int_{-3}^{n+1} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{\pi^2}$ ② $\frac{12}{\pi^2}$ ③ $\frac{16}{\pi^2}$ ④ $\frac{20}{\pi^2}$ ⑤ $\frac{24}{\pi^2}$

$\int_0^1 x^2\cos(\pi x)\,dx = \left[\frac{1}{\pi}x^2\sin\pi x + \frac{2x}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{2}{\pi^3}\sin\pi x\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}$




$y=g(x)$

$\Rightarrow g(x) - \frac{4}{\pi^2} = g(x+2)$

$\to \int_{k-5n}^{8k+6} g(x)\,dx = 0$ 이면 $\frac{(k-5n)+(8k+6)}{2} = k$

$\therefore 9k-5n+6 = 2k$

$7k+6 = 5n$

| | |
|---|---|
| 1 | x |
| 2 | 4 |
| 3 | x |
| 4 | x |
| 5 | x |
| 6 | x |

$\therefore k=2,\ n=4$

$\int_{-3}^{5} g(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} g(x)\,dx + \underbrace{\int_{-1}^{5} g(x)\,dx}_{=0}$

($\because$ $(2,0)$ 점대칭)

$= \int_{-3}^{-1}\left\{\frac{4}{\pi^2}+g(x+2)\right\}dx$

$= \frac{8}{\pi^2} + \int_{-1}^{1} g(x)\,dx$

$= \frac{8}{\pi^2} + \int_{-1}^{1}\left\{\frac{4}{\pi^2}+g(x+2)\right\}dx$

$= \frac{8}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} + \underbrace{\int_{1}^{3} g(x)\,dx}_{=0}$

$= \boxed{\frac{16}{\pi^2}}$

**단답형**

29. 첫째항과 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고, 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 $n$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{k+1}}{a_k} = -2n$이다.
>
> (나) $\sum_{n=1}^{\infty}(3|a_n| - |b_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0$

$b_3 = -6$일 때, $40\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\frac{b_{n+1}}{a_n} = -2$ $(n=1,2,3,\cdots)$ $\left(\because \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{k+1}}{a_k}}_{=-2n} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{a_k}}_{=-2n+2} = \frac{b_{n+1}}{a_n}\right)$

1에서도 성립!

$b_3 = -2a_2 = -6$ : $a_2 = 3$

(나) $b_1 + (b_2 + b_3 + \cdots) = 0$

$b_1 + (-2a_1 - 2a_2 - \cdots) = 0$

$\therefore b_1 = 2\sum_{1}^{\infty} a_n$

$3\sum_{1}^{\infty}|a_n| = |b_1| + \sum_{1}^{\infty} 2|a_n|$

$\sum_{1}^{\infty}|a_n| = 2\left|\sum_{1}^{\infty} a_n\right|$ : $r<0$ 이니까 가능

$\frac{-a_1}{1+r} = 2\cdot\frac{-a_1}{1-r}$

$1-r = 2+2r$

$-1 = 3r$

$40\cdot\frac{a_2}{1-r^2} = 120\cdot\frac{9}{8}$

$= \boxed{135}$

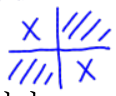
30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} x(x+2)^2 \le 0 & (x \le 0) \\ xe^x|f(x)-2| \ge 0 & (x > 0) \end{cases}$$

이라 할 때, 모든 실수 $x$에 대하여

$$|xg(h(x))| = g(x)h(x) \ge 0$$

$h(x)$ 부호



인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \le 0$에서 함수 $|h(x)|$는 연속이다.
>
> (나) $\lim_{x\to 0^-}\frac{|h(x)|-|h(0)|}{x} = e^4 \times \lim_{x\to 0^+}\frac{|h(x)|-|h(0)|}{x}$
>
> $-h'(0^-) = e^4 \times h'(0^+)$

$f'(0) > 0$, $f(0) = 2$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

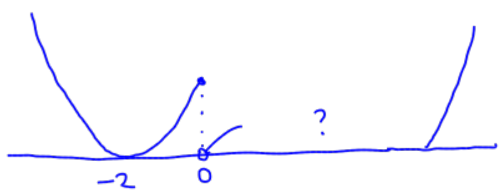
$|h(0^+)| = |h(0^-)|$, $-h'(0^-) = e^4 \times h'(0^+)$

$xg(h(x)) \ge 0$ : $xg(h(x)) = g(x)h(x)$

$\frac{g(h(x))}{h(x)} = \frac{g(x)}{x}$ $\quad A(h(x)) = A(x)$

$h'(x)A'(h(x)) = A'(x)$

$A(x) = \frac{g(x)}{x} = \begin{cases} (x+2)^2 & x \le 0 \\ e^x|f(x)-2| & x > 0 \end{cases}$



$h(0^-) = 0$ or $-4$

$h'(0^-) = 1$ or $-1$

$h'(0^+)A'(h(0^+)) = A'(0^+) = e^0\cdot f'(0)$

i) $h'(0^-) = 1$ $(h(0^-) = 0 = h(0^+))$

$h'(0^+) = -e^{-4}$

$-e^{-4}A'(h(0^+)) = f'(0)$

$A'(h(0^+)) = -e^4 f'(0) < 0$

$A(x)$

$A'(0^+) > 0$ : 모순

ii) $h'(0^+) = -1$ $(h(0^-) = -4 = -h(0^+))$

$h'(0^+) = e^{-4}$

$e^{-4}A'(h(0^+)) = f'(0)$

$A'(h(0^+)) = e^4 f'(0)$

$f(x) = 2 + x(x-4)(x-k)$

$|A'(x)| = |e^x(f(x) + f'(x) - 2)|$

$|A'(4)| = |e^4 f'(4)| = e^4 f'(0)$ : $k=2$





$f(6) = 2 + 6\cdot2\cdot4 = \boxed{50}$