

수학 영역(공통) 해설지

Epsilon



정답 및 해설

1) [정답] ⑤ (출제자 : 24 김시현)

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned} 4^{\frac{1}{2-\sqrt{2}}} \times 2^{2-\sqrt{2}} &= 2^{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} \times 2^{2-\sqrt{2}} \\ &= 2^{\frac{2(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} \times 2^{2-\sqrt{2}} \\ &= 2^{2+\sqrt{2}} \times 2^{2-\sqrt{2}} \\ &= 2^{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}} \\ &= 2^4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

2) [정답] ③ (출제자 : 24 박예림)

[출제의도] 미분계수를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 = 2f'(1) \\ f'(1) &= 6 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 + ax + 5 \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 2x + a$$

이므로

$$f'(1) = 2 + a = 6$$

$$a = 4$$

3) [정답] ③ (출제자 : 25 김서연)

[출제의도] 등비수열의 일반항을 이해하고 이를 바탕으로 특정 항을 구할 수 있는가?

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$) 라 하면

$$\frac{a_5}{a_3} - \frac{a_3}{a_2} = 42 \text{ 에서}$$

$$\frac{5r^4}{5r^2} - \frac{5r^2}{5r} = 42$$

$$r^2 - r = 42$$

$$r^2 - r - 42 = 0$$

$$(r+6)(r-7) = 0$$

$r > 0$ 이므로

$$r = 7$$

$$a_2 = 5 \times 7 = 35$$

4) [정답] ① (출제자 : 25 하효진)

[출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$x - 1 = t \text{ 라 하면}$$

$$x \rightarrow 3 \text{ 일 때, } t \rightarrow 2 \text{ 이고}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x-1) = 2$$

또, $x \rightarrow -2-$ 일 때, $f(x) \rightarrow -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -1$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x-1) + \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = 2 + (-1) = 1$$

5) [정답] ④ (출제자 : 25 심준현)

[출제의도] 평균값정리를 활용하여 평균변화율과 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ 에서 x 의 값이

0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 3$$

또한, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ 이므로

$$f'(a) = 3a^2 - 6a + 5 = 3, \quad 3a^2 - 6a + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 2$$

$$= 36 - 24$$

$$= 12 > 0$$

이므로

이차방정식 $3a^2 - 6a + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β 를 가진다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여,

$$\alpha + \beta = 2$$

$$\alpha\beta = \frac{2}{3}$$

이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{8}{3}$$

6) [정답] ② (출제자 : 25 권정민)

[출제의도] 삼각함수의 사이의 관계를 이용하여 탄젠트의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta, \tan(\pi + \theta) = \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{3}{2} \tan \theta \\ &= \frac{3 \sin \theta}{2 \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 인 } \theta \text{ 에 대하여 } -1 < \cos \theta < 0 \text{ 이므로}$$

$$2 \cos^2 \theta = 3 \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ 이므로}$$

$$2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - 2 = 0$$

$$(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 인 } \theta \text{ 에 대하여 } 0 < \sin \theta < 1 \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

7) [정답] ② (출제자 : 25 하효진)

[출제의도] 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용할 수 있는가?

[해설]

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$ 에서 연속
즉, $f(3) = 8$ 또는 $f(3) = -8$

(i) $f(3) = 8$ 인 경우

$$-(3-a)^2 + 8 = 8 \text{ 이므로}$$

$$a = 3$$

(ii) $f(3) = -8$ 인 경우

$$-(3-a)^2 + 8 = -8 \text{ 이므로}$$

$$a = -1 \text{ 또는 } a = 7$$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 상수 a 의 값의 합은

$$3 + (-1) + 7 = 9$$

8) [정답] ④ (출제자 : 23 이나경)

[출제의도] 로그의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

로그의 진수 조건에 의하여 $a > 0$

로그의 밑 조건에 의하여 $b > 0, b \neq 1$

두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\log_2 a - \left(-\frac{1}{\log_b 2}\right)}{2-1} = \log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab = 4$$

$$ab = 2^4 = 16$$

$$a + b = 17 \text{ 에서 } a = 17 - b \text{ 이고}$$

$$ab = 16 \text{ 이므로}$$

$$b(17-b) = 16$$

$$b^2 - 17b + 16 = (b-1)(b-16) = 0$$

따라서

$$b = 1 \text{ 또는 } b = 16$$

이때 $b \neq 1$ 이므로

$$b = 16, a = 1$$

$$\log_4 a + \log_{16} b = \log_4 1 + \log_{16} 16 = 1$$

9) [정답] ③ (출제자 : 24 우효정)

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$) 라 하자.

$$f'(0) = 0 \text{ 이므로}$$

$$b = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = ax^2 + c$$

$$f(x) = ax^2 + c \text{ 는}$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키므로

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$$

따라서

$$2 \int_0^2 f(x) dx = 2 \int_1^2 f(x) dx,$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx$$

$$\int_0^2 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 \text{ 이므로}$$

$$\left[\frac{a}{3} x^3 + cx \right]_0^1 = \frac{a}{3} + c = 0$$

$$f(1) = 2 \text{ 이므로}$$

$$a + c = 2$$

따라서

$$a = 3, c = -1$$

$$f(x) = 3x^2 - 1$$

$$\int_2^3 f(x) dx = [x^3 - x]_2^3 = 18$$

10) [정답] ② (출제자 : 24 김진영)

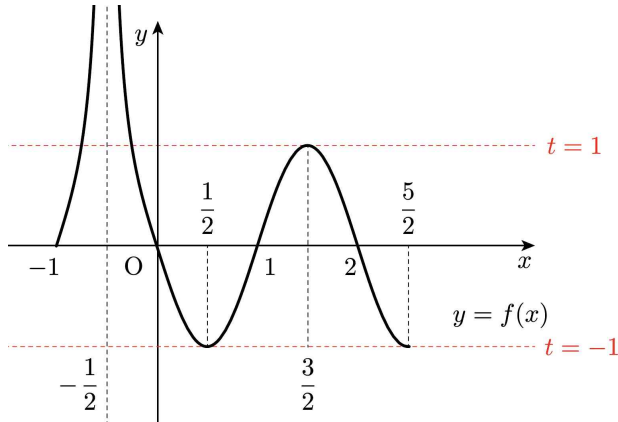
[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 이를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식의 근에 관련된 문제를 추론할 수 있는가?

[해설]

(i) $a = 5$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} |\tan \pi x| & \left(-1 \leq x < 0, x \neq -\frac{1}{2}\right) \\ -\sin \pi x & \left(0 \leq x \leq \frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

의 그래프는 다음과 같다.



(i-㉠) $t = -1$ 일 때,

방정식 $f(x) = -1$ 의 근이 $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ 이다.

삼각함수의 대칭성에 의하여 방정식 $f(x) = -1$ 의 두 실근이 직선 $x = \frac{3}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 $g(-1) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$

(i-㉡) $-1 < t < 0$ 일 때,

방정식 $f(x) = t$ 의 근이

$\alpha \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right), \beta \left(\frac{1}{2} < \beta < 1\right), \gamma \left(2 < \gamma < \frac{5}{2}\right)$ 이다.

삼각함수의 대칭성에 의하여 방정식 $f(x) = t$ 의 두 실근 α, β 가 직선 $x = \frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 $g(t) = \alpha + \beta + \gamma = 1 + \gamma$

이때 $g(t)$ 의 범위는 $3 < g(t) < \frac{7}{2}$

(i-㉢) $t = 0$ 일 때,

방정식 $f(x) = 0$ 의 근이 $-1, 0, 1, 2, 3$ 이므로

$g(0) = (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$

(i-㉣) $0 < t < 1$ 일 때,

방정식 $f(x) = t$ 의 근이

$\alpha \left(-1 < \alpha < -\frac{1}{2}\right), \beta \left(-\frac{1}{2} < \beta < 0\right), \gamma \left(1 < \gamma < \frac{3}{2}\right), \delta \left(\frac{3}{2} < \delta < 2\right)$ 이다.

삼각함수의 대칭성에 의하여 방정식 $f(x) = t$ 의 실근 α, β 가 직선

$x = -\frac{1}{2}$, 실근 γ, δ 가 직선 $x = \frac{3}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$g(t) = \alpha + \beta + \gamma + \delta = (-1) + 3 = 2$

(i-㉤) $t = 1$ 일 때,

방정식 $f(x) = 1$ 의 근이 $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{2}$ 이므로

$g(1) = \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

(i-㉦) $t > 1$ 일 때,

방정식 $f(x) = t$ 의 근이 $\alpha \left(-1 < \alpha < -\frac{1}{2}\right), \beta \left(-\frac{1}{2} < \beta < 0\right)$ 이다. 삼각함수의 대칭성에 의하여 방정식 $f(x) = t$ 의 실근 α, β 가 직선 $x = -\frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 $g(t) = \alpha + \beta = -1$

$a = 5$ 일 때, (i-㉤) 경우에서 방정식 $f(x) = t$ 의 실근 γ 가 어떤 상수 k 에 대하여 직선 $x = k$ 에 대하여 대칭을 만족하지 않으므로 집합 $\{g(t) \mid t \text{는 } t \geq -1 \text{인 실수}\}$ 의 원소 합이 $\frac{31}{2}$ 이 될 수 없다.

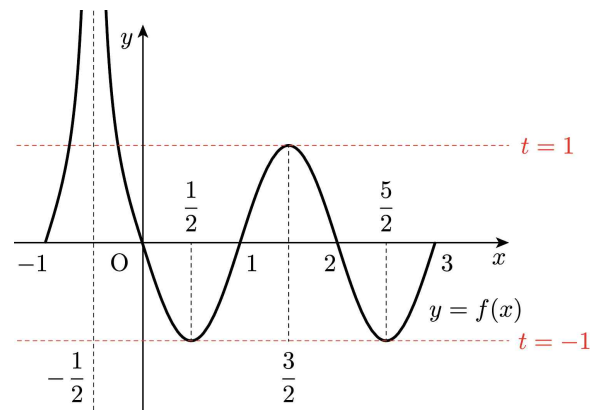
$-1 < t < 0$ 일 때, 방정식 $f(x) = t$ 의 실근 γ 가 어떤 상수 k 에 대하여 직선 $x = k$ 에 대하여 대칭을 만족하는 실근 δ 를 가져야 한다.

따라서 가능한 자연수 a 는 6, 8, 10, ... 이다.

(ii) $a = 6$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} |\tan \pi x| & \left(-1 \leq x < 0, x \neq -\frac{1}{2}\right) \\ -\sin \pi x & (0 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

의 그래프는 다음과 같다.



(ii-㉠) $t = -1$ 일 때,

방정식 $f(x) = -1$ 의 근이 $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ 이다.

삼각함수의 대칭성에 의하여 방정식 $f(x) = -1$ 의 두 실근이

직선 $x = \frac{3}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 $g(-1) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$

(ii-㉡) $-1 < t < 0$ 일 때,

방정식 $f(x) = t$ 의 근이

$\alpha \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right), \beta \left(\frac{1}{2} < \beta < 1\right), \gamma \left(2 < \gamma < \frac{5}{2}\right), \delta \left(\frac{5}{2} < \delta < 3\right)$ 이다.

삼각함수의 대칭성에 의하여 방정식 $f(x) = t$ 의 실근 α, β 가 직선 $x = \frac{1}{2}$, 실근 γ, δ 가 직선 $x = \frac{5}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$g(t) = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 + 5 = 6$

(ii-㉢) $t = 0$ 일 때,

방정식 $f(x) = 0$ 의 근이 $-1, 0, 1, 2, 3$ 이므로

$g(0) = (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$

(ii-㉣) $0 < t < 1$ 일 때,

방정식 $f(x) = t$ 의 근이

$\alpha \left(-1 < \alpha < -\frac{1}{2}\right), \beta \left(-\frac{1}{2} < \beta < 0\right), \gamma \left(1 < \gamma < \frac{3}{2}\right), \delta \left(\frac{3}{2} < \delta < 2\right)$ 이다.

수학 영역(공통)

삼각함수의 대칭성에 의하여 방정식 $f(x) = t$ 의 실근 α, β 가 직선 $x = -\frac{1}{2}$, 실근 γ, δ 가 직선 $x = \frac{3}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 $g(t) = \alpha + \beta + \gamma + \delta = (-1) + 3 = 2$

(ii-㉔) $t = 1$ 일 때,
방정식 $f(x) = 1$ 의 근이 $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{2}$ 이므로 $g(1) = \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

(ii-㉕) $t > 1$ 일 때,
방정식 $f(x) = t$ 의 근이 $\alpha\left(-1 < \alpha < -\frac{1}{2}\right), \beta\left(-\frac{1}{2} < \beta < 0\right)$ 이다.
삼각함수의 대칭성에 의하여 방정식 $f(x) = t$ 의 실근 α, β 가 직선 $x = -\frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 $g(t) = \alpha + \beta = -1$

집합 $\{g(t) \mid t \text{는 } t \geq -1 \text{인 실수}\}$ 의 원소가 $3, 6, 5, 2, \frac{1}{2}, -1$ 이므로 모든 원소의 합은 $\frac{31}{2}$ 이다.

또한, $a \geq 8$ 일 경우 집합 $\{g(t) \mid t \text{는 } t \geq -1 \text{인 실수}\}$ 의 모든 원소의 합은 $\frac{31}{2}$ 보다 크다.

따라서 $a = 6$

$$g(a-5) = g(1) = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$a + g(a-5) = 6 + g(1) = \frac{13}{2}$$

[별해]

임의의 두 근 $\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)$ 가 $x = \frac{k}{2}$ 선대칭을 만족하면 두 근의 합은 $\alpha + \beta = k$ 를 만족한다.

$-1 < t < 0, 0 < t < 1, 1 < t$ 에서 방정식 $-\sin \pi x = t$ 의 근이 $2n$ (n 은 자연수)개가 존재해야 하며, 동시에 $-\sin \pi x = t$ 의 근이 직선 $x = \frac{k}{2}$ (k 는 자연수)에 대하여 선대칭을 만족하는 두 근의 순서쌍을 n 개 찾을 수 있어야 한다. (단, 각 근은 하나의 순서쌍에만 들어갈 수 있다.)

따라서 가능한 자연수 a 는 $6, 8, 10, \dots$ 이다.

11) [정답] ① (출제자 : 25 이소은)

[출제의도] 위치, 속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

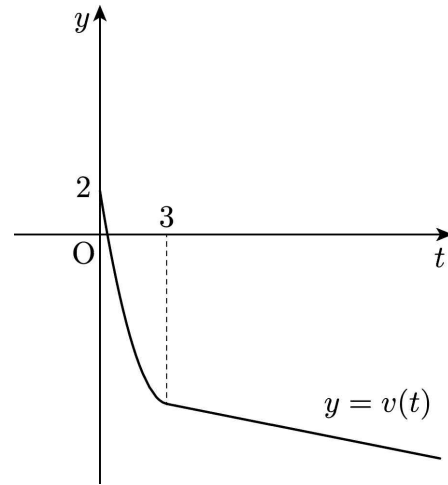
[해설]

점 P의 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라고 하면

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 2(k+3)t + 2 & (0 \leq t \leq 3) \\ -2kt - 7 & (t > 3) \end{cases}$$

(i) $k > 0$ 인 경우

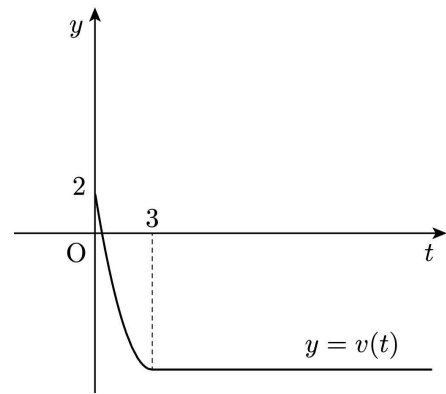
$v(0) > 0$ 이고, $v(3) = -6k - 7 < 0$ 이므로 $v(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



점 P는 출발한 후 운동 방향이 한 번밖에 바뀌지 않는다.

(ii) $k = 0$ 인 경우

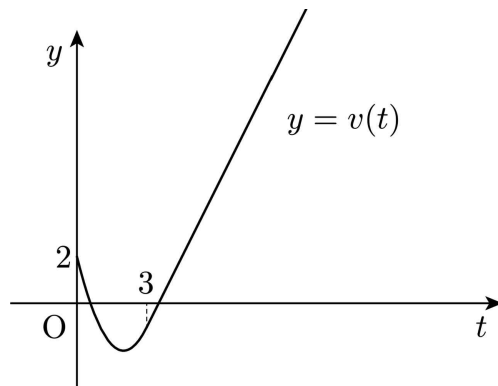
$v(0) > 0$ 이고, $v(3) = -7$ 이므로 $v(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



점 P는 출발한 후 운동 방향이 한 번밖에 바뀌지 않는다.

(iii) $k < 0$ 인 경우

$v(0) > 0$ 이고, $v(3) = -6k - 7 < 0$ 이므로 $v(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$v(m) = 0$ 이므로

$$-2km - 7 = 0$$

$$km = -\frac{7}{2}$$

시각 $t = 4m$ 일 때 위치는 107이므로

$$-k \times (4m)^2 - 7 \times 4m + 9 = 107$$

$$km = -\frac{7}{2} \text{ 이므로 } m = \frac{7}{2}, k = -1$$

$2k+3=1$ 이고,

$0 \leq t \leq 3$ 인 t 에 대해 점 P의 시각 t 에서의 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$a(t) = 2t - 4$ 이므로

시각 $t = 2k+3$ 일 때의 가속도는

$$a(1) = 2 \times 1 - 4 = -2$$

12) [정답] ④ (출제자 : 23 이나경)

[출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 새롭게 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

$$a_n - |a_n| = \begin{cases} 2a_n & (a_n < 0) \\ 0 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

$$a_n + |a_n| = \begin{cases} 2a_n & (a_n > 0) \\ 0 & (a_n \leq 0) \end{cases}$$

수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 n 번째 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$S_n = da_2$ 를 만족시키는 n 이 3과 6 뿐이므로

$S_3 \neq S_4$ 에서 $b_4 \neq 0$, $a_4 < 0$

$S_6 \neq S_7$ 에서 $b_7 \neq 0$, $a_7 > 0$

따라서 $d > 0$ 이다.

$d > 0$, $a_4 < 0$ 이므로

$$S_3 = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 6a_2$$

이때 $a_2 < a_4 < 0$ 이므로 $d = 6$

한편 $S_5 \neq S_6$ 에서 $b_6 \neq 0$ 이므로 $a_6 > 0$, $b_6 = 2a_6$

$$S_3 = S_6 \text{에서 } b_4 + b_5 + b_6 = 0$$

(i) $a_5 < 0$, $b_5 = 2a_5$

$$b_4 + b_5 + b_6 = 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 = 6a_5 = 0, \quad a_5 = 0$$

이는 $a_5 < 0$ 에 모순이다.

(ii) $a_5 \geq 0$, $b_5 = 0$

$$b_4 + b_5 + b_6 = 2a_4 + 2a_6 = 4a_5 = 0, \quad a_5 = 0$$

$n < 5$ 에서 $a_n < 0$

$n > 5$ 에서 $a_n > 0$

$a_5 = b_5 = 0$ 이므로

모든 자연수 n 에 대하여 $b_n = 2a_n$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = \sum_{k=1}^{10} 2a_k = 2a_{10}$$

$d = 6$, $a_5 = 10$ 이므로 $a_{10} = 30$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} b_k = 60$$

13) [정답] ② (출제자 : 25 심준현)

[출제의도] 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$0 \leq a \leq b \leq 5$ 인 상수 a , b 에 대하여

$$a = b \text{이면 } \int_0^5 f(x) dx \neq 0$$

$$a = 0, \quad b = 5 \text{ 인 경우 } \int_0^5 f(x) dx \neq 0$$

이므로 조건 (가)에 의하여 모순이다.

(i) $f(x) = x(x-5)(x-a)(x-b)$ ($0 < a < b < 5$)

(ii) $f(x) = x^2(x-b)(x-5)$ ($0 = a < b < 5$)

(iii) $f(x) = x(x-a)(x-5)^2$ ($0 < a < b = 5$)

이때, 조건 (나)를 만족하려면 닫힌구간 $[0, b]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이어야 하므로 (i), (iii)는 조건 (나)에 의하여 모순이다.

따라서 $a = 0$, $f(x) = x^2(x-b)(x-5)$ 이다.

$$\int_0^5 f(x) dx = 0 \text{ 이므로 이를 계산하면,}$$

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^5 \{x^2(x-b)(x-5)\} dx = 0$$

$$\int_0^5 \{x^4 - (b+5)x^3 + 5bx^2\} dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{(b+5)}{4}x^4 + \frac{5b}{3}x^3 \right]_0^5 = 0$$

$$5^4 - \frac{(b+5)}{4}5^4 + \frac{b}{3}5^4 = 0$$

$$5^4 \left(1 - \frac{5}{4} - \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}b \right) = 0$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{12}b = 0$$

$$b = 3, \quad f(x) = x^2(x-3)(x-5)$$

$$\text{따라서 } a = 0 \text{ 이므로 } \int_a^5 |f(x)| dx = \int_0^5 |f(x)| dx$$

$f(x) = x^2(x-3)(x-5)$ 이고

$$\text{조건 (가)에 의하여 } \int_0^3 f(x) dx = - \int_3^5 f(x) dx$$

따라서

$$\int_0^5 |f(x)| dx = 2 \int_0^3 f(x) dx = 2 \int_0^3 \{x^2(x-3)(x-5)\} dx$$

$$2 \int_0^3 \{x^2(x-3)(x-5)\} dx$$

$$= 2 \int_0^3 (x^4 - 8x^3 + 15x^2) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + 5x^3 \right]_0^3$$

$$= \frac{216}{5}$$

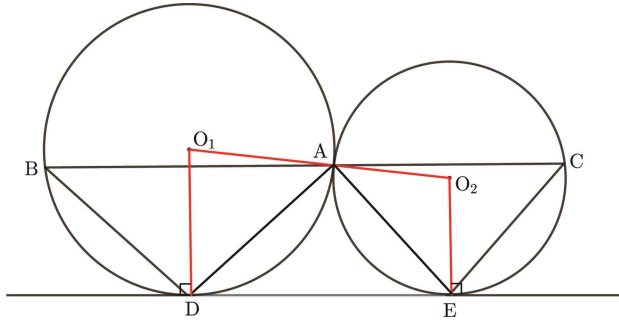
14) [정답] ⑤ (출제자 : 25 하효진)

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용해 변의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]

오직 한 점 A 에서 만나는 두 원 O_1, O_2 에 대하여 점 A 는 두 원의 중심을 지나는 직선 위의 점이다.

다음 그림과 같이 선분 $O_1D, O_2E, O_1O_2, AD, AE$ 를 그었을 때, $\angle ADE = \alpha, \angle AED = \beta$ 라 하자.



원에서 접현각의 성질에 의하여

점 B 를 포함하지 않는 호 AD 에 대한 원주각의 크기는 α 이고
점 C 를 포함하지 않는 호 AE 에 대한 원주각의 크기는 β 이다.
따라서

$$\angle DO_1A = 2\alpha, \angle EO_2A = 2\beta$$

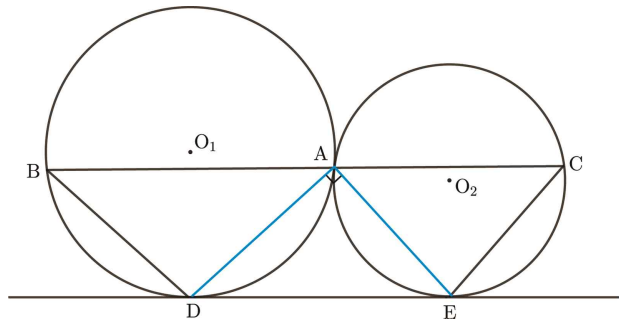
사각형의 내각의 크기의 합은 360° 이고

$$\angle O_1DE = \angle O_2ED = 90^\circ \text{ 이므로}$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

따라서 다음 그림과 같이 $\triangle ADE$ 는 $\angle DAE = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.



$\sin(\angle ABD) = \frac{2}{3}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)} = 2 \times 5 = 10$$

$$\overline{AD} = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$\angle ABD = \angle ADE = \alpha$ 이므로

$$\tan(\angle ADE) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \tan(\angle ADE) \text{ 이므로}$$

$$\overline{AE} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

$\angle ABD = \angle ADE = \alpha$ 이고 $\angle AED = \angle ACE = \beta$

이때 $\alpha + \beta = 90^\circ$ 이므로

$$\cos(\angle ACE) = \cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{2}{3}$$

$\overline{AC} : \overline{CE} = 4 : 3$ 이므로 $\overline{AC} = 4a, \overline{CE} = 3a$ 라 하면

삼각형 ACE 에서 코사인법칙에 의하여

$$(\overline{AE})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{CE})^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{CE} \times \cos(\angle ACE)$$

$$\frac{320}{9} = 16a^2 + 9a^2 - 2 \times 4a \times 3a \times \frac{2}{3} = 9a^2$$

$$a^2 = \frac{320}{81}, a = \frac{8\sqrt{5}}{9} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AC} = 4a = \frac{32\sqrt{5}}{9}$$

15) [정답] ① (출제자 : 25 이서현)

[출제의도] 미분을 이용하여 상수와 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]

삼차함수 $f(x)$ 를

$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ (p, q, r 은 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q$$

이차함수 $x^2 + ax + b$ 를 $h(x)$ 라 하면

$$h'(x) = 2x + a$$

조건 (가)에서

$$f'(1) = h'(1) \text{ 이므로}$$

$$3 + 2p + q = 2 + a \quad \text{..... ㉠}$$

또한, $x = -1$ 에서 함수 $g(x)$ 가 미분가능하므로

$$f'(-1) = h'(-1) \text{ 에서}$$

$$3 - 2p + q = -2 + a \quad \text{..... ㉡}$$

$$f(-1) = h(-1) \text{ 에서}$$

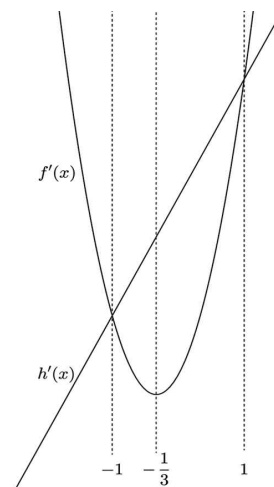
$$-1 + p - q + r = 1 - a + b \quad \text{..... ㉢}$$

이때 ㉠-㉡을 하면

$$4p = 4$$

$$p = 1 \text{ 이므로}$$

함수 $f'(x)$ 와 함수 $h'(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



㉠에서

$$5 + q = 2 + a$$

$$q = a - 3 \text{ 이고}$$

㉢에서

$$-q + r = 1 - a + b$$

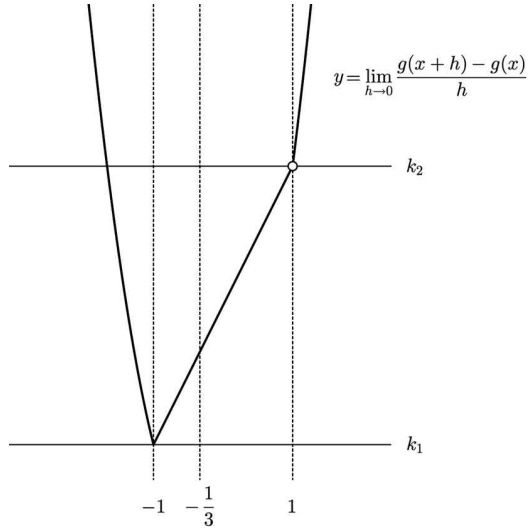
$$r = 1 - a + b + q$$

$r = 1 - a + b + q$ 에 $q = a - 3$ 을 대입하면

$$r = -2 + b$$

$f(1) = 2 + q + r$ 에 $q = a - 3$ 과 $r = -2 + b$ 를 대입하면
 $f(1) = 2 + (a - 3) + (-2 + b)$
 $= -3 + a + b$
 $h(1) = 1 + a + b$

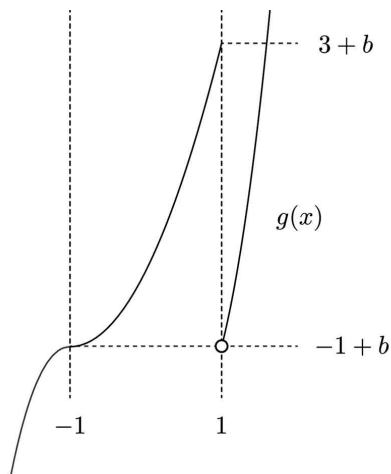
$g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이므로
 $x = 1$ 에서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ 는 정의할 수 없고
 따라서 함수 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ 의 그래프는 다음과 같다.



x 에 대한 방정식 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = k$ 가 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값을 그림과 같이 k_1, k_2 ($k_1 < k_2$)라 하자.
 $h'(x)$ 의 기울기는 2이므로
 $k_2 - k_1 = 4$
 조건 (나)에서
 $k_2 + k_1 = 4$ 이므로
 $k_1 = 0, k_2 = 4$
 따라서 $f'(-1) = h'(-1) = 0$

㉠에서
 $3 - 2p + q = -2 + a = 0$
 ㉡에서
 $r = -2 + b$

$f(x) = x^3 + x^2 - x - 2 + b$
 $h(x) = x^2 + 2x + b$
 $f(1) = -1 + b$
 $g(1) = 3 + b$ 이므로
 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

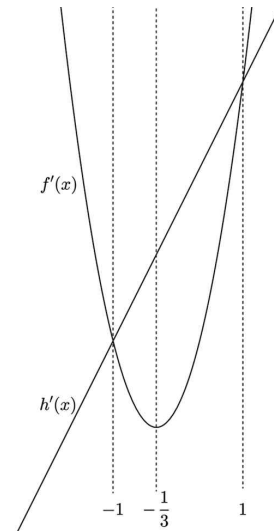


$g(x) = t$ 의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 의 범위는
 $-1 + b < t \leq 3 + b$
 이다.
 따라서 실수 t 의 최댓값은 $3 + b$
 $3 + b = 4$
 $b = 1$

$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$
 $h(x) = x^2 + 2x + 1$

$g(3) + g(1) = (27 + 9 - 3 - 1) + (1 + 2 + 1) = 36$

[별해]



$f(-1) = h(-1)$ 이므로
 $h'(x) - f'(x)$ 의 $x = -1$ 에서 $x = 1$ 까지의 정적분 값이
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ 의 값이다.
 따라서 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속임을
 미지수를 정리하지 않고 간단히 확인할 수 있다.

16) [정답] 7 (출제자 : 25 이성연)
 [출제의도] 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]
 로그의 진수의 조건에 의하여
 $x - 3 > 0, x - 6 > 0$
 즉, $x > 6$ ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-6) = -\log_2(x-6)$ 이므로
 $\log_2(x-3) - 2 = \log_{\frac{1}{2}}(x-6)$ 에서
 $\log_2(x-3) + \log_2(x-6) = 2$
 $\log_2(x-3)(x-6) = 2$

$(x-3)(x-6) = 2^2 = 4$
 $x^2 - 9x + 14 = 0$
 $(x-2)(x-7) = 0$
 $x = 2$ 또는 $x = 7$

이때 ㉠에 의하여
 $x = 7$

17) [정답] 4 (출제자 : 24 김시현)

[출제의도] 곱의 미분법을 활용하여 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

[해설]

$$g'(x) = f(x) + xf'(x)$$

$$g(x) = xf(x) + C \quad (\text{단, } C \text{ 는 적분상수})$$

$$g(0) = 2 \text{ 이므로}$$

$$C = 2$$

따라서

$$g(-2) = -2f(-2) + 2, \quad g(-2) = -6$$

이므로

$$f(-2) = 4$$

18) [정답] 76 (출제자 : 24 우효정)

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n a_{n+1} = -16$ 이므로

$$a_1 a_2 = -16, \quad a_2 a_3 = -16, \quad \dots, \quad a_9 a_{10} = -16$$

따라서

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9, \quad a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = a_{10}$$

$$\sum_{k=2}^{10} a_k = 4a_1 + 5a_2 = 4(a_1 + a_2) + a_2$$

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 정수이므로

가능한 a_1 과 a_2 의 값을 표로 나타내보면

a_1	16	8	4	2	1	-1	-2	-4	-8	-16
a_2	-1	-2	-4	-8	-16	16	8	4	2	1

따라서 $a_1 = -1$ 이고 $a_2 = 16$ 일 때 $\sum_{k=2}^{10} a_k$ 가 최댓값 76 을 가진다.

19) [정답] 15 (출제자 : 25 이서현)

[출제의도] 정적분과 역함수의 관계를 이용하여 역함수의 정적분 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$g(x) \text{ 는 } f(x) \text{ 의 역함수이므로 } g(0) = 0, \quad g(3) = 3$$

모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) - 3 = g(x - 3), \quad g(f(x)) = x \text{ 이므로}$$

$$g(f(x)) - 3 = g(f(x) - 3)$$

$$x - 3 = g(f(x) - 3)$$

$$x = g(f(x + 3) - 3)$$

따라서

$$f(x + 3) - 3 = f(x)$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x - 3) + 3$ 이다.

$$\int_3^6 f(x) dx = (3 \times 3) + \int_0^3 f(x) dx = 13$$

$$\int_0^3 f(x) dx = 4$$

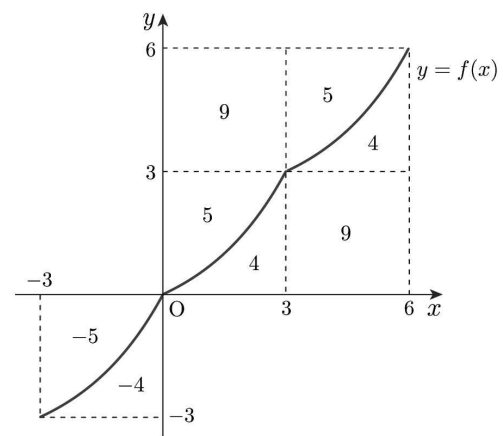
$$\begin{aligned} \int_0^3 g(x) dx &= 9 - \int_0^3 f(x) dx \\ &= 9 - 4 = 5 \end{aligned}$$

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = -9 + 4 = -5$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 g(x) dx &= -9 - \int_{-3}^0 f(x) dx \\ &= -9 - (-5) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^6 g(x) dx &= \int_{-3}^0 g(x) dx + \int_0^6 g(x) dx \\ &= \int_{-3}^0 g(x) dx + (3 \times 3) + 2 \int_0^3 g(x) dx \\ &= -4 + (3 \times 3) + 2 \times 5 = 15 \end{aligned}$$

[별해]



수식으로의 풀이가 아닌 그래프를 활용하여 $f(x)$ 를 그리면 간단히 정적분 값을 확인할 수 있다.

20) [정답] 16 (출제자 : 24 이학송)

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 지수함수를 구할 수 있는가?

[해설]

두 점 A, B 의 좌표는 각각

$$A(-b + \log_a(-c), 0), \quad B(2, 0)$$

$0 < t < 12$ 에서 두 점 C, D 의 좌표는 각각

$$C(\log_2(t+4), t), \quad D(-b + \log_a(t-c), t) \text{ 이고}$$

$t > 12$ 에서 두 점 C, D 의 좌표는 각각

$$C(-b + \log_a(t-c), t), \quad D(\log_2(t+4), t)$$

사각형 ADCB 는 등변사다리꼴이므로 점 A 와 점 D 를 이은 직선의 기울기와 점 B 와 점 C 를 이은 직선의 기울기의 값의 절댓값은 같고 부호는 반대이다.

$$\frac{t}{\log_a(t-c) - \log_a(-c)} = -\frac{t}{\log_2(t+4) - 2}$$

$$\frac{1}{\log_a(t-c) - \log_a(-c)} = -\frac{1}{\log_2(t+4) - 2}$$

$$\log_a(t-c) - \log_a(-c) = -(\log_2(t+4) - 2)$$

$$\log_a \frac{-t+c}{c} = -\log_2 \frac{t+4}{4}$$

$t \neq 12$ 인 모든 양수 t 에 대하여 위 방정식이 성립하므로

$t = 28$ 와 $t = 252$ 를 대입하면

$$\log_a \frac{-28+c}{c} = -3, \log_a \frac{-252+c}{c} = -6$$

$$2 \times \log_a \frac{-28+c}{c} = \log_a \left(\frac{-28+c}{c} \right)^2$$

$$\log_a \left(\frac{-28+c}{c} \right)^2 = \log_a \frac{-252+c}{c}$$

$$\left(\frac{-28+c}{c} \right)^2 = \frac{-252+c}{c}$$

따라서 $c = -4$

$$\log_a \frac{-28+(-4)}{-4} = -3$$

$$\text{그러므로 } a = \frac{1}{2}$$

$t = 12$ 에서 사각형 ADCB 는 등변사다리꼴이 아니므로 $t = 12$ 에서

곡선 $y = a^{x+b} + c$ 와 곡선 $y = 2^x - 4$ 는 한 점에서 만난다.

$$2^x - 4 = 12$$

$$x = 4$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{4+b} - 4 = 12$$

$$b = -8$$

$$\text{따라서 } a \times b \times c = \frac{1}{2} \times (-8) \times (-4) = 16$$

21) [정답] 11 (출제자 : 24 장경정)

[출제의도] 한 점에서 극한값이 존재하지 않도록 함수의 미정계수를 결정할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x+k)}{\sqrt{\{f(x)\}^2 + 3} - 2\{f(x)\}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x+k) \{ \sqrt{\{f(x)\}^2 + 3} + 2\{f(x)\}^2 \}}{\{f(x)\}^2 + 3 - 4\{f(x)\}^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x+k) \{ \sqrt{\{f(x)\}^2 + 3} + 2\{f(x)\}^2 \}}{\{-\{f(x)\}^2 + 1\} \{4\{f(x)\}^2 + 3\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x+k) \{ \sqrt{\{f(x)\}^2 + 3} + 2\{f(x)\}^2 \}}{\{1+f(x)\} \{1-f(x)\} \{4\{f(x)\}^2 + 3\}} \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이 때 $b = 2$ 에서만 $\textcircled{1}$ 의 값이 존재하지 않으므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\{1+f(x)\} \{1-f(x)\} \{4\{f(x)\}^2 + 3\}) = 0$$

실수 전체의 집합에서 $4\{f(x)\}^2 + 3 > 0$ 이므로

$f(b) = 1$ 이거나, $f(b) = -1$ 이어야 한다.

$f(b) = 1$ 이거나 $f(b) = -1$ 일 때,

$\textcircled{1}$ 에서 $\sqrt{\{f(b)\}^2 + 3} + 2\{f(b)\}^2 > 0$ 이므로

$f(b+k) = 0$ 이면 $\textcircled{1}$ 의 값이 존재할 수 있다. $\textcircled{2}$

$f(x)$ 는 원점을 지나고 최고차항의 계수가 양수이므로,

방정식 $f(x) = 1$ 의 실근이 2 개 존재한다.

이때 두 실근을 $x = \alpha$, $x = \beta$ ($\alpha < \beta$) 라 하면 $f(\alpha) = f(\beta) = 1$ 이다.

$f(x)$ 는 이차함수이므로, $\beta < x$ 인 x 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 존재하지 않는다.

따라서 양수 k 에 대하여 $f(\beta+k) = 0$ 이 될 수 없으므로,

$b = \beta$ 일 때 $\textcircled{1}$ 의 값이 존재하지 않는다.

그러므로 조건 (가)에 의해 $\beta = 2$

$\textcircled{1}$ 은 $b = 2$ 에서만 값이 존재하지 않으므로,

$b = \alpha$ 일 때에는 값이 존재해야 한다.

그러므로 $\textcircled{2}$ 에 의해 $f(\alpha+k) = 0$ $\textcircled{3}$

실수 c 에 대하여 $f(x) = ax(x-c)$ 라 하자.

$f(\beta) = f(2) = 1$ 이므로, $2a(2-c) = 1$ $\textcircled{4}$

$f(x)$ 는 직선 $x = \frac{c}{2}$ 에 대칭이므로 $f(\alpha) = f(2)$ 에서 $\alpha = c-2$

따라서 $\textcircled{3}$ 에서 $f(\alpha+k) = f(k+c-2) = 0$

조건 (나)의 $f(a) = \frac{1}{4}a^2$ 에서 $f(a) = a^2(a-c) = \frac{1}{4}a^2$ 이므로

$a-c = \frac{1}{4}$ 이고 $a = c + \frac{1}{4}$ $\textcircled{5}$

$\textcircled{4}$ 과 $\textcircled{5}$ 을 연립하여 계산하면

$a = 2$, $c = \frac{7}{4}$ 이거나 $a = \frac{1}{4}$, $c = 0$

(i) $a = 2$, $c = \frac{7}{4}$ 일 때

$f(x) = 2x \left(x - \frac{7}{4} \right)$ 이고,

$f(x)$ 의 최솟값은

$$f\left(\frac{7}{8}\right) = -\frac{49}{32} < -1$$

이므로 $f(x) = -1$ 인 실근이 2 개 존재한다.

그러나 어떤 양수 k 에 대하여 각각의 두 실근에 대해 $\textcircled{3}$ 을 성립할 수 없으므로, (가) 조건을 만족하지 못한다.

(ii) $a = \frac{1}{4}$, $c = 0$ 일 때

$f(x) = \frac{1}{4}x^2$ 이고, $f(x) = -1$ 의 실근이 존재하지 않으므로

조건 (가)를 만족한다.

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 = 1$ 의 두 실근은 $x = -2$, $x = 2$ 이므로

$\textcircled{3}$ 에서

$$f(\alpha+k) = f(k-2) = \frac{1}{4}(k-2)^2 = 0$$

$$k = 2$$

$$k + f(6) = 2 + \frac{1}{4} \times 6^2 = 11$$

22) [정답] 34 (출제자 : 24 김시현)

[출제의도] 등비수열로 이루어진 귀납적으로 정의된 수열에 대해 수열의 규칙을 해석할 수 있는가?

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하자.

$$|a_2| \geq a_3 \text{ 이므로 } |r| \leq 1 \text{ 이고,}$$

자연수 n 에 대해 $|b_n| = 1$ 이면 $a_n = \pm \frac{1}{k}$ 또는 $a_{2n} = \pm 1$ 이므로

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비 r 에 대하여 경우를 나눌 수 있다.

수학 영역(공통)

(i) $|r|=1$ 인 경우

$a=1$ 일 때 $a_{2n} = \pm 1$ 인 자연수 n 이 존재하지만, 두 자연수가 아니라 수없이 많이 존재하므로 모순이고, $a \neq 1$ 일 땐 $|b_n|=1$ 인 자연수 n 이 존재하지 않는다.

따라서 $|r| \neq 1$

(ii) $0 < r < 1$ 인 경우

모든 자연수 n 에 대해서 $a_n > 0$ 이므로 $a_{2n} = 1$ 이거나 $a_n = \frac{1}{k}$ 인 자연수 n 에 대해서만 $|b_n|=1$ 을 만족시킨다.

$|b_n|=1$ 을 만족시키는 두 자연수 중 작은 수를 t 라고 하자.

k 는 자연수이고 $0 < r < 1$ 이므로 $a_{2t} = 1$, $a_{10-t} = \frac{1}{k}$ 이고,

$2t < 10-t$ 이므로 $t < \frac{10}{3}$

따라서 $|b_n|=1$ 을 만족시키는 두 자연수 중 작은 수를 t 라고 할 때 t 의 값은 $t=1$, $t=2$, $t=3$ 뿐이다.

(ii-㉠)

$t=1$ 인 경우 $a_2 = 1$, $a_9 = \frac{1}{k}$

이때 $a_3 = r < 1$ 이므로 $a_3 > 1$ 에 모순이다.

(ii-㉡)

$t=2$ 인 경우는 $a_4 = 1$, $a_8 = \frac{1}{k}$ 이므로 $k = \frac{1}{r^4}$

$0 < r < 1$, $a_4 = 1$ 이므로 $n \leq 4$ 이면 $a_n \geq 1$, $n > 4$ 이면 $a_n < 1$ 이다.

따라서 $b_1 = \frac{1}{a_2}$, $b_2 = \frac{1}{a_4}$, $b_3 = \frac{1}{a_6}$, $b_4 = \frac{1}{a_8}$ 이고, $n \geq 5$ 인 자연수 n 에 대해서 $b_n = ka_n$ 임을 알 수 있다.

$0 < r < 1$, $a_4 = 1$ 이므로

$a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 < b_3$, $a_4 < b_4$ 이고,

$k = \frac{1}{r^4}$ 인 자연수 k 이므로 $n \geq 5$ 인 자연수 n 에 대해서 $a_n < b_n$

따라서 $1 \leq n \leq 10$ 인 자연수 n 중에 $a_n > b_n$ 인 자연수 n 의 개수는 2 개이고, $m=2$, $a_2 = 1$ 이어야 하는데, $a_2 = \frac{1}{r^2}$ 이므로 $0 < r < 1$ 에 모순이다.

(ii-㉢)

$t=3$ 인 경우는 $a_6 = 1$, $a_7 = \frac{1}{k}$ 이므로 $k = \frac{1}{r}$

$n \leq 6$ 이면 $a_n \geq 1$, $n > 7$ 이면 $a_n < 1$ 이다.

따라서 $b_1 = \frac{1}{a_2}$, $b_2 = \frac{1}{a_4}$, $b_3 = \frac{1}{a_6}$, $b_4 = \frac{1}{a_8}$, $b_5 = \frac{1}{a_{10}}$,

$b_6 = \frac{1}{a_{12}}$ 이고, $n \geq 7$ 인 자연수 n 에 대해서 $b_n = ka_n$ 임을 알 수 있다.

$0 < r < 1$, $a_6 = 1$ 이므로

$a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 > b_3$, $a_4 = b_4$ 이고,

$a_5 < b_5$, $a_6 < b_6$ 이다.

$k = \frac{1}{r}$ 인 자연수 k 이므로 $n \geq 7$ 인 자연수 n 에 대해서 $a_n < b_n$

따라서 $1 \leq n \leq 10$ 인 자연수 n 중에 $a_n > b_n$ 인 자연수 n 의 개수는 3 개이고, $m=3$, $a_4 = \frac{2}{3}$ 이어야 하는데, $a_3 = \frac{1}{r^3}$ 이므로 $0 < r < 1$ 에 모순이다.

(iii) $-1 < r < 0$ 인 경우

n 이 홀수이면 $a_n > 0$, n 이 짝수이면 $a_n < 0$ 이므로

홀수 n 에 대해서 $a_n \geq 1$ 이고, $a_{2n} = -1$ 인 경우 또는 $a_n = \frac{1}{k}$ 인 경우에만 $|b_n|=1$ 을 만족시키고,

짝수 n 에 대해서는 $a_n = -\frac{1}{k}$ 인 경우에만 $|b_n|=1$ 을 만족시킨다.

(가) 조건에 의해서 $|b_n|=1$ 을 만족시키는 두 자연수 n 의 합은 10 인데, $-1 < r < 0$ 인 경우 짝수 n 에 대해서 $a_n = -\frac{1}{k}$ 인 짝수 n 이 최대한 개 존재하므로 두 자연수 n 의 합이 10 이 될 수 없다.

따라서 $|b_n|=1$ 을 만족시키는 자연수 n 은 모두 홀수이고,

$-1 < r < 0$ 이므로 $a_{2t} = -1$ 인 t 에 대해 $a_{10-t} = \frac{1}{k}$ 인 경우

$|b_n|=1$ 을 만족시키는 두 자연수의 합이 10 이 됨을 알 수 있다.

또한, $-1 < r < 0$ 이므로 $2t < 10-t$ 이고, $t < \frac{10}{3}$ 인 홀수 t 의 값은 $t=1$, $t=3$ 뿐이다.

(iii-㉠)

$t=1$ 인 경우 $a_2 = -1$, $a_9 = \frac{1}{k}$ 이고, $a_3 = -r$ 인데

$-1 < r < 0$ 이므로 $a_3 < 1$, 모순이다.

(iii-㉡)

$t=3$ 인 경우 $a_6 = -1$, $a_7 = \frac{1}{k}$ 이므로 $k = -\frac{1}{r}$

홀수인 n 에 대해서는 $n < 7$ 이면 $a_n \geq 1$, $n \geq 7$ 이면 $a_n < 1$ 이고,

짝수인 n 에 대해서는 $a_n < 0$ 이므로 $a_n < 1$ 이다.

따라서 $b_1 = \frac{1}{a_2}$, $b_2 = ka_2$, $b_3 = \frac{1}{a_6}$, $b_4 = ka_4$, $b_5 = \frac{1}{a_{10}}$, $b_6 = ka_6$,

... 이고, $n \geq 6$ 인 자연수 n 에 대해서는 $b_n = ka_n$ 임을 알 수 있다.

$-1 < r < 0$, $a_6 = -1$ 이므로

$a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 > b_3$, $a_4 > b_4$, $a_5 > b_5$ 이다.

$n \geq 6$ 인 자연수 n 에 대해서

홀수인 n 에 대해서는 $a_n > 0$,

짝수인 n 에 대해서는 $a_n < 0$ 이고,

$k = -\frac{1}{r}$ 인 자연수 k 이므로

홀수인 n 에 대해서는 $a_n < b_n$,

짝수인 n 에 대해서는 $a_n > b_n$ 이다.

따라서 $1 \leq n \leq 10$ 인 자연수 n 중에 $a_n < b_n$ 인 자연수 n 의 개수는

8 개이고, $m=8$, $a_8 = -\frac{1}{4}$ 이어야 하는데, $a_8 = -r^2$ 이므로

$-1 < r < 0$ 인 공비 r 은 $r = -\frac{1}{2}$, $k=2$

따라서 $b_2 = -32$ 이므로 $2-b_2=34$

수학 영역(확률과 통계) 해설지

Epsilon



정답 및 해설

23) [정답] ① (출제자 : 24 김시현)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]

다항식 $(x+3y)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r \times (x)^{5-r} \times (3y)^r \quad (r=1, 2, \dots, 5)$$

x^3y^2 의 계수는

$r=2$ 일 때 다항식 $(x+3y)^5$ 의 전개식에서 x^3y^2 의 계수와

다항식 $(x+2)$ 에서 상수항인 2를 곱한 것이므로 x^3y^2 의 계수는

$${}_5C_2 \times 3^2 \times 2 = 10 \times 9 \times 2 = 180$$

24) [정답] ⑤ (출제자 : 24 오현민)

[출제의도] 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

카드 7장 중에 꺼낸 두 개의 합이 5 이하인 경우의 수는

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)$ 로 네 가지이다.

카드 7장 중 꺼낸 두 개의 합이 5 이하일 확률은 $\frac{4}{{}_7C_2} = \frac{4}{21}$ 이다.

따라서 꺼낸 숫자의 합이 6 이상일 확률은 여사건의 확률에 의해

$$1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}$$

25) [정답] ② (출제자 : 24 권서현)

[출제의도] 조건부확률을 활용할 수 있는가?

[해설]

임의로 선택한 두 명의 학생의 성별이 같은 사건을 X ,

학년이 다른 사건을 Y 라 하자.

$$P(X) = \frac{{}_{11}C_2 + {}_9C_2}{{}_{20}C_2} = \frac{91}{190},$$

$$P(X \cap Y) = \frac{{}_6C_1 \times {}_5C_1 + {}_4C_1 \times {}_5C_1}{{}_{20}C_2} = \frac{5}{19}$$

$$\text{따라서 } P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{5}{19}}{\frac{91}{190}} = \frac{50}{91}$$

26) [정답] ③ (출제자 : 24 오현민)

[출제의도] 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

[해설]

이 지역 고등학생들의 한 달 휴대폰 사용 시간을 X 라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 9^2)$ 을 따른다.

표본의 크기가 400일 때의 표본평균을 $\bar{x}_1$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 98%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 2.5 \times \frac{9}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 2.5 \times \frac{9}{\sqrt{400}} \text{ 이므로 신뢰구간의}$$

$$\text{길이는 } 2 \times 2.5 \times \frac{9}{20} = \frac{9}{4} \text{ 이고,}$$

표본의 크기가 n 일 때의 표본평균을 $\bar{x}_2$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도

$$95\% \text{의 신뢰구간은 } \bar{x}_2 - 2 \times \frac{9}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2 \times \frac{9}{\sqrt{n}} \text{ 이므로}$$

$$\text{신뢰구간의 길이는 } 2 \times 2 \times \frac{9}{\sqrt{n}} = \frac{36}{\sqrt{n}} \text{ 이다.}$$

$$\text{이때 두 신뢰구간의 길이가 같으므로 } \frac{9}{4} = \frac{36}{\sqrt{n}}, \sqrt{n} = 16 \text{ 이다.}$$

따라서 n 의 값은 256이다.

27) [정답] ④ (출제자 : 25 손준기)

[출제의도] 확률변수의 확률을 구하고 이를 계산할 수 있는가?

[해설]

n 번째 시행에서 기록한 수를 a_n 이라 하면 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 는 $(5, 4, 3, 2), (5, 4, 3, 4), (5, 4, 5, 4), (5, 4, 5, 6), (5, 6, 5, 4), (5, 6, 5, 6)$ 이고

각각의 확률을 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) 첫 번째 시행에서는 주사위에서 어떤 수가 나와도 뒷면이 보이는 카드가 한 장만 나오므로 a_1 은 5, 확률은 1이다.

(ii) 두 번째 시행에서 k 번째 자리의 카드가 뒷면이 보이면 a_2 는 6, 확률은 $\frac{1}{6}$ 이고, 두 번째 시행에서 k 번째 자리의 카드가 앞면이 보이면 a_2 는 4, 확률은 $\frac{5}{6}$ 이다.

(iii)

(iii-①) $a_2 = 6$ 인 경우 세 번째 시행에서는 모든 k 에 대하여 a_3 는 5, 확률은 1이다.

(iii-②) $a_2 = 4$ 인 경우 세 번째 시행에서 k 번째 자리의 카드가 뒷면이 보이면 a_3 는 5, 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, 세 번째 시행에서 k 번째 자리의 카드가 앞면이 보이면 a_3 는 3, 확률은 $\frac{2}{3}$

수학 영역(확률과 통계)

(iv)

(iv-㉔) $a_3 = 5$ 인 경우 네 번째 시행에서 k 번째 자리의 카드가 뒷면이 보이면 a_4 는 6, 확률은 $\frac{1}{6}$

(iv-㉕) $a_3 = 3$ 인 경우 네 번째 시행에서 k 번째 자리의 카드가 앞면이 보이면 a_4 는 2, 확률은 $\frac{1}{2}$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 의 값을 Y 라 하면

$$P(Y=14) = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{60}{216}$$

$$P(Y=16) = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{60}{216}$$

$$P(Y=18) = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{50}{216}$$

$$P(Y=20) = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{5}{6} = \frac{40}{216}$$

$$P(Y=22) = 1 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	14	16	18	20	22	계
$P(Y=y)$	$\frac{60}{216}$	$\frac{60}{216}$	$\frac{50}{216}$	$\frac{40}{216}$	$\frac{1}{36}$	1

이때 $\overline{X}$ 가 정수가 되도록 하는 Y 의 값은 16 과 20 이므로 구하는 확률은 $P(Y=16) + P(Y=20) = \frac{25}{54}$

28) [정답] ① (출제자 : 24 권서현)

[출제의도] 중복조합을 사용할 수 있는가?

[해설]

(나) 조건에 의해 a 와 c 는 모두 홀수임을 알 수 있다.

b 와 d 가 서로소이므로 (a, b, c, d) 를 다음과 같이 분류할 수 있다.

(i) a : 홀수 b : 짝수 c : 홀수 d : 홀수

$$a = 2a' + 1 \quad (0 \leq a' \leq 4)$$

$$b = 2b' + 2 \quad (0 \leq b' \leq 4)$$

$$c = 2c' + 1 \quad (0 \leq c' \leq 4)$$

$d = 2d' + 11 \quad (0 \leq d' \leq 5)$ 라 하면 구하는 경우의 수는 부등식

$a' + b' + c' + d' \leq 5$ 와 보기를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d') 의 개수를 다음과 같이 구할 수 있다.

(a', b', c', d' 가 0 이상의 정수일 때 전체 경우의 수)

- ($a' = 5$ 인 경우의 수 + $b' = 5$ 인 경우의 수

+ $c' = 5$ 인 경우의 수 + $b' = 2$ 이고, $d' = 2$ 인 경우의 수)

$$= {}_5H_5 - (1 + 1 + 1 + {}_3H_1) = 120$$

(ii) a : 홀수 b : 홀수 c : 홀수 d : 짝수

$$a = 2a' + 1 \quad (0 \leq a' \leq 4)$$

$$b = 2b' + 1 \quad (0 \leq b' \leq 4)$$

$$c = 2c' + 1 \quad (0 \leq c' \leq 4)$$

$d = 2d' + 10 \quad (0 \leq d' \leq 6)$ 라 하면 구하는 경우의 수는 부등식

$a' + b' + c' + d' \leq 6$ 과 보기를 만족시키는

순서쌍 (a', b', c', d') 의 개수를 다음과 같이 구할 수 있다.

(a', b', c', d' 가 0 이상의 정수일 때 전체 경우의 수)

- ($a' \geq 5$ 인 경우의 수 + $b' \geq 5$ 인 경우의 수 + $c' \geq 5$ 인 경우의 수 + $b' = 1$ 이고, $d' = 1$ 인 경우의 수 + $b' = 1$ 이고, $d' = 4$ 인 경우의 수 + $b' = 4$ 이고, $d' = 4$ 인 경우의 수 + $b' = 2$ 이고, $d' = 0$ 인 경우의 수 + $b' = 3$ 이고, $d' = 2$ 인 경우의 수)

$$= {}_5H_6 - ({}_5H_1 + {}_5H_1 + {}_5H_1 + {}_3H_4 + {}_3H_1 + {}_3H_1 + {}_3H_4 + {}_3H_1) = 156$$

(iii) a : 홀수 b : 홀수 c : 홀수 d : 홀수

$$a = 2a' + 1 \quad (0 \leq a' \leq 4)$$

$c = 2c' + 1 \quad (0 \leq c' \leq 4)$ 라 하면 구하는 경우의 수는 부등식

$a' + c' \leq \frac{23 - (b + d)}{2}$ 를 만족시키는 순서쌍 (a', b, c', d) 의

개수를 다음과 같이 구할 수 있다.

보기를 만족시키는 순서쌍 (b, d) 의 경우는

$b = 1$ 일 때 $d = 11, 13, 15, 17, 19$

$b = 3$ 일 때 $d = 11, 13, 17, 19$

$b = 5$ 일 때 $d = 11, 13, 17$

$b = 7$ 일 때 $d = 11, 13, 15$

$b = 9$ 일 때 $d = 11, 13$ 이므로 $b + d$ 의 경우는

(iii-㉔) $b + d = 12$ 인 경우

순서쌍 (b, d) 는 $(1, 11)$ 로 1 개이고,

$$a' + c' \leq 5.5 \text{ 이므로 } {}_3H_5 - (a' = 5 \text{ 인 경우의 수} + c' = 5 \text{ 인 경우의 수}) = 19 \times 1 = 19$$

(iii-㉕) $b + d = 14$ 인 경우 순서쌍 (b, d) 는 $(1, 13), (3, 11)$ 로 2 개이고

$$a' + c' \leq 4.5 \text{ 이므로 } {}_3H_4 \times 2 = 30$$

(iii-㉖) $b + d = 16$ 인 경우 순서쌍 (b, d) 는 $(1, 15), (3, 13),$

$(5, 11)$ 로 3 개이고, $a' + c' \leq 3.5$ 이므로 ${}_3H_3 \times 3 = 30$

(iii-㉗) $b + d = 18$ 인 경우 순서쌍 (b, d) 는 3 개이고,

$$a' + c' \leq 2.5 \text{ 이므로 } {}_3H_2 \times 3 = 18$$

(iii-㉘) $b + d = 20$ 인 경우 순서쌍 (b, d) 는 $(1, 19), (3, 17), (7, 13),$

$(9, 11)$ 로 4 개이고, $a' + c' \leq 1.5$ 이므로 ${}_3H_1 \times 4 = 12$

(iii-㉙) $b + d = 22$ 인 경우 순서쌍 (b, d) 는 $(1, 21), (3, 19), (5, 17),$

$(7, 15), (9, 13)$ 로 5 개이고, $a' + c' \leq 0.5$ 이므로 ${}_3H_0 \times 5 = 5$

$$\text{따라서 } 19 + 30 + 30 + 18 + 12 + 5 = 114$$

순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$120 + 156 + 114 = 390$$

29) [정답] 532 (출제자 : 24 오현민)

[출제의도] 정규분포 곡선의 특징을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

연속확률변수 Y 의 정규분포곡선은 직선 $x = m$ 에 대하여 대칭이고,

$P(30 \leq Y \leq 35) \leq P(35 + n \leq Y \leq 40 + n)$ 에서 두 구간의 길이가 5 로 같으므로 n 의 최댓값이 10 을 만족시키기 위해서

$n = 10$ 일 때, 두 구간이 $x = m$ 에 대하여 대칭을 이루어야 한다.

수학 영역(확률과 통계)

즉, $P(30 \leq Y \leq 35) = P(35 + n \leq Y \leq 40 + n)$
 $= \frac{30 + (40 + n)}{2} = \frac{35 + (35 + n)}{2} = m$
 이므로 $m = 40$ 이다.

이후 두 확률밀도함수 $g(x)$ 와 $f(x)$ 가 $25 \leq x \leq 40$ 에서 x 축과
 둘러싸인 넓이를 S_3 라 하면

$$S_1 - S_2 = (S_1 + S_3) - (S_2 + S_3) = 0.385 \text{ 이다.}$$

이때 $S_1 + S_3$ 의 넓이는 $P(25 \leq X \leq 40)$ 의 값과 같으므로

$$S_1 + S_3 = P(25 \leq X \leq 40) = P(-1 \leq Z \leq 2) = 0.818 \text{ 이고,}$$

$S_2 + S_3$ 의 넓이는 $P(25 \leq Y \leq 40)$ 의 값과 같으므로

$$P(25 \leq Y \leq 40) = P\left(\frac{-15}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) \text{ 이다.}$$

여기서 $0.818 - (S_2 + S_3) = 0.385$ 를 만족하므로 $S_2 + S_3 = 0.433$

$$P\left(\frac{-15}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) = 0.433$$

즉, Y 의 표준편차는 10 이다.

$$P(35 \leq Y \leq 50) = P(-0.5 \leq Z \leq 1) \text{ 이기 때문에}$$

$$0.191 + 0.341 = 0.532$$

$$1000 \times 0.532 = 532$$

30) [정답] 91 (출제자 : 25 손준기)

[출제의도] 사건의 독립과 종속을 구별하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

[해설]

상자 A 에서 100 원짜리 동전을 꺼내는 사건을 x 라 하고 500 원짜리
 동전을 꺼내는 사건을 y 라 하면 전체 경우의 수는 $xxxxxyyy$ 를
 일렬로 나열하고 앞면과 뒷면 중 하나를 결정하는 것이므로

$$\frac{8!}{5! \times 3!} \times 2^8 = 56 \times 2^8$$

이때 상자 A 에 담긴 두 종류의 동전 즉, 100 원짜리 동전과 500 원짜리
 동전의 개수가 같은 경우가 존재하지 않는 경우의 수를 여사건을 활용하여
 다음과 같이 경우의 수를 구할 수 있다.

i) 100 원짜리 동전과 500 원짜리 동전의 개수가 3 으로 처음 같아지는
 경우

$xxxxxyyy$ 를 일렬로 나열하고 앞뒷면을 결정할 때, 첫 번째와 두 번째
 시행에서는 모두 x 가 나와야 하므로 $\frac{6!}{3! \times 3!} \times 2^8 = 20 \times 2^8$

ii) 100 원짜리 동전과 500 원짜리 동전의 개수가 2 로 처음 같아지는 경우
 $xxxxxyyy$ 를 일렬로 나열하고 앞뒷면을 결정할 때, 첫 번째부터
 네 번째 시행까지 x 가 세 번, y 가 한 번 나와야 하고 y 가 나오기 전 x 가
 두 번 이상 나오면 안 되므로

$$\left(\frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} - 2! \times \frac{4!}{2! \times 2!}\right) \times 2^8 = 12 \times 2^8$$

따라서 여사건으로 구한 상자 A 에 담긴 100 원짜리 동전과 500 원짜리
 동전의 개수가 1 이상으로 같은 경우가 존재하지 않는 경우의 수는

$$56 \times 2^8 - 32 \times 2^8 = 24 \times 2^8$$

상자 B 에 담긴 흰 공의 개수를 w , 검은 공의 개수를 b 라 하면 동전의
 앞뒷면에 따라 각각의 범위는 $0 \leq w \leq 4$, $6 \leq b \leq 12$ 이며 상자 B 에
 담긴 공의 개수의 범위는 $6 \leq w + b \leq 16$ 이다.

이때 상자 B 에 담긴 공의 개수와 상자 C 에 담긴 공의 개수의 차가 5
 이상인 경우 순서쌍 (w, b) 는 $(0, 6)$, $(1, 6)$, $(4, 9)$, $(1, 12)$, $(2, 12)$,
 $(3, 12)$, $(4, 12)$ 이고, 네 번째 시행까지 상자 A 에 담긴 두 종류의 동전의
 개수가 같아지는 경우가 존재하지 않아야 하므로 이전의 구한 방법을
 활용하여 각각의 경우의 수를 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) $b = 6$ 일 때,

(i-①) $w = 0$ 인 경우 $xxxxxyyy$ 를 네 번째 시행까지 상자 A 에
 담긴 두 종류의 동전의 개수가 같아지는 경우가 존재하지 않도록 나열하고
 앞뒷면을 결정할 때, 첫 번째 x 를 제외한 모든 x 는 앞면이 나와야 하고,
 마지막 y 는 뒷면이 나와야 하므로 24×2^3

(i-②) $w = 1$ 인 경우 $xxxxxyyy$ 를 네 번째 시행까지 상자 A 에
 담긴 두 종류의 동전의 개수가 같아지는 경우가 존재하지 않도록 나열하고
 앞뒷면을 결정할 때, 첫 번째와 두 번째 x 를 제외한 모든 x 는 앞면,
 두 번째 x 는 뒷면이 나와야 하고, 세 번째 y 는 뒷면이 나와야 하므로
 24×2^3

(ii) $(w, b) = (4, 9)$ 인 경우 $xxxxxyyy$ 를 네 번째 시행까지
 상자 A 에 담긴 두 종류의 동전의 개수가 같아지는 경우가 존재하지 않도록
 나열하고 앞뒷면을 결정할 때, 다섯 번째 x 는 뒷면이 나와야 하고,
 두 번째와 세 번째 y 는 각각 뒷면과 앞면이 나와야 하므로 14×2^5

(iii) $b = 12$ 일 때,

(iii-①) $w = 1$ 인 경우 $xxxxxyyy$ 를 네 번째 시행까지 상자 A 에
 담긴 두 종류의 동전의 개수가 같아지는 경우가 존재하지 않도록 나열하고
 앞뒷면을 결정할 때, 첫 번째와 두 번째 x 를 제외한 모든 x 는 앞면,
 두 번째 x 는 뒷면이 나와야 하고, 첫 번째 y 를 제외한 모든 y 는 앞면이
 나와야 하므로 24×2^2

(iii-②) $w = 2$ 인 경우 $xxxxxyyy$ 를 네 번째 시행까지 상자 A 에
 담긴 두 종류의 동전의 개수가 같아지는 경우가 존재하지 않도록 나열하고
 앞뒷면을 결정할 때, 세 번째 x 는 뒷면, 네 번째와 다섯 번째 x 는 앞면이
 나와야 하고, 첫 번째 y 를 제외한 모든 y 는 앞면이 나와야 하므로 24×2^3

(iii-③) $w = 3$ 인 경우 $xxxxxyyy$ 를 네 번째 시행까지 상자 A 에
 담긴 두 종류의 동전의 개수가 같아지는 경우가 존재하지 않도록 나열하고
 앞뒷면을 결정할 때, 네 번째 x 는 뒷면, 다섯 번째 x 는 앞면이 나와야
 하고, 첫 번째 y 를 제외한 모든 y 는 앞면이 나와야 하므로 24×2^4

(iii-④) $w = 4$ 인 경우 $xxxxxyyy$ 를 네 번째 시행까지 상자 A 에
 담긴 두 종류의 동전의 개수가 같아지는 경우가 존재하지 않도록 나열하고
 앞뒷면을 결정할 때, 다섯 번째 x 는 앞면이 나와야 하고, 첫 번째 y 를
 제외한 모든 y 는 앞면이 나와야 하므로 24×2^5

따라서 네 번째 시행까지 상자 A 에 담긴 두 종류의 동전의 개수가 같아지는
 경우가 존재하지 않고, 상자 B 에 담긴 공의 개수와 상자 C 에 담긴 공의
 개수의 차가 5 이상인 경우의 수는

$$24 \times 2^2 \times (2 + 2 + 8 + 1 + 2 + 4 + 8) = 24 \times 2^2 \times 27$$

$$\text{최종적으로 구하려는 확률은 } \frac{24 \times 2^2 \times 27}{24 \times 2^8} = \frac{27}{64} \text{ 이고,}$$

$$\text{이는 } \frac{q}{p} \text{ 이므로 } p + q = 91$$

수학 영역(미적분) 해설지

Epsilon



정답 및 해설

23) [정답] ③ (출제자 : 24 김진)

[출제의도] 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{\sin^2(2x)} &= 6 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2} \times \frac{1}{\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2} \\ &= 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

24) [정답] ⑤ (출제자 : 24 이소은)

[출제의도] 부정적분을 계산할 수 있는가?

[해설]

$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x(\ln x + 2)}$ 에서 양변을 적분하면

$$f(x) = \int \left(\frac{2 \ln x}{x(\ln x + 2)} \right) dx$$

이때, $\ln x = t$ 라 하면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \left(\frac{2 \ln x}{x(\ln x + 2)} \right) dx = \int \left(\frac{2t}{t+2} \right) dt \\ &= \int \left(2 + \frac{-4}{t+2} \right) dt = 2t - 4 \ln |t+2| + C\end{aligned}$$

$$f(x) = 2 \ln x - 4 \ln |\ln x + 2| + C$$

$$f(1) = -4 \ln 2 + C = 4 \ln 2$$

$$C = 8 \ln 2$$

$$f(e^2) = 4$$

25) [정답] ① (출제자 : 25 김근원)

[출제의도] 수열의 극한에 대한 성질과 급수의 수렴 조건을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - m)^2$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - m)^2 = 0$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - m) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m$$

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n^2 - 3a_n + 1)$$

$$m^3 = 3m^2 - 3m + 1$$

$$(m-1)^3 = 0$$

따라서 $m = 1$

26) [정답] ④ (출제자 : 24 이학송)

[출제의도] 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

[해설]

직선 $x = t$ ($1 \leq t \leq \sqrt{2}$) 를 포함하고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{t}{e^{t^2} - e^{-t^2}}$$

따라서 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$V = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{e^{t^2} - e^{-t^2}} dt$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{te^{t^2}}{e^{2t^2} - 1} dt$$

이때 $e^{t^2} = u$ 라 하면 $t = 1$ 일 때 $u = e$, $t = \sqrt{2}$ 일 때 $u = e^2$ 이고

$$2te^{t^2} = \frac{du}{dt} \text{ 이므로}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{te^{t^2}}{e^{2t^2} - 1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{1}{u^2 - 1} du$$

$$= \frac{1}{4} \int_e^{e^2} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} du$$

$$= \frac{1}{4} [\ln |u-1| - \ln |u+1|]_e^{e^2}$$

$$= \frac{1}{4} [\{\ln(e^2-1) - \ln(e^2+1)\} - \{\ln(e-1) - \ln(e+1)\}]$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{(e+1)^2}{e^2+1}$$

27) [정답] ② (출제자 : 24 장경정)

[출제의도] 역함수의 미분법과 이계도함수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾을 수 있는가?

[해설]

부등식 $f'(x) \leq g'(f(x))$ 에서

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(g(f(x)))} = \frac{1}{f'(x)} \text{ 이므로}$$

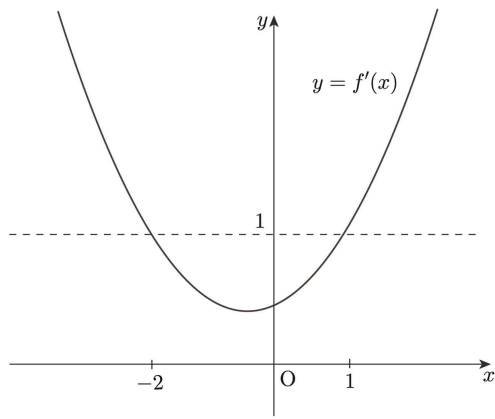
부등식 $f'(x) \leq \frac{1}{f'(x)}$ 의 해가 $-2 \leq x \leq 1$ 이어야 한다.

$f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 $f'(x) \geq \frac{1}{2}$ 이므로 최고차항의 계수가

양수이고, $f'(x) \leq \frac{1}{f'(x)}$ 에서 $\{f'(x)\}^2 \leq 1$ 이다.

수학 영역(미적분)

부등식 $\{f'(x)\}^2 \leq 1$ 의 해가 $-2 \leq x \leq 1$ 이므로
함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 아래와 같이 그려진다.



따라서 양수 k 에 대하여 $f'(x) - 1 = k(x+2)(x-1)$ 이고,
모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq \frac{1}{2}$ 이어야 하므로 $f'(-\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2}$
 $f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}k + 1 \geq \frac{1}{2}, k \leq \frac{2}{9}$

$f'(1) = g'(1)$ 에서 $f'(1) = 1$ 이므로 $g'(1) = 1$
 $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ 이므로, $g'(1) = 1$ 에서 $f'(g(1)) = 1$
 $f'(x) = 1$ 인 x 는 $x = -2, 1$ 뿐이므로 $g(1) = -2$ 또는 $g(1) = 1$

(i) $g(1) = 1$ 일 때
 $g(1) = 1$ 이면 $f(1) = 1$
이 때 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이므로
 $f(-2) < f(1) = 1$

(ii) $g(1) = -2$ 일 때
 $g(1) = -2$ 이면 $f(-2) = 1$

(i), (ii)에 의하여 $f(-2)$ 의 최댓값은 1 이다.

$$\begin{aligned} f(-2) + f'(2) &\leq 1 + f'(2) \\ &= 1 + (4k + 1) \\ &\leq \frac{2}{9} \times 4 + 2 \\ &= \frac{26}{9} \end{aligned}$$

28) [정답] ③ (출제자 : 25 이성연)

[출제의도] 함수의 연속성으로 함수를 완성하여 부분적분법을 사용할 수 있는가?

[해설]

$g(x) = \int_k^x f(t) dt$ 에서 함수 $g(x)$ 는 미분가능하므로

$g'(x) = f(x)$ 이고 ㉠

모든 실수 x 에 대하여

$f(x+2) = f(x)$ 이므로

양변을 적분하면

$g(x+2) = g(x) + C$ 이다. ㉡

따라서 ㉡에서

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) + C \text{ 이므로}$$

$$g(1) = g(-1) + C$$

$$\text{즉, } g(1) - g(-1) = C$$

함수 $f(x)$ 는 $-1 \leq x < 1$ 에서

$f(x) = x^2 \cos(\pi x)$ 이고

$f(x) = f(-x)$ 이므로

$$g(1) - g(-1) = C$$

$$= \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 f(x) dx \dots\dots \textcircled{B}$$

이때, $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cos(\pi x) dx$ 에서

부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \cos(\pi x) dx &= \left[\frac{1}{\pi} x^2 \sin(\pi x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{\pi} \sin(\pi x) dx \\ &= - \int_0^1 \frac{2x}{\pi} \sin(\pi x) dx \end{aligned}$$

$\int_0^1 \frac{2x}{\pi} \sin(\pi x) dx$ 또한 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2x}{\pi} \sin(\pi x) dx &= \left[-\frac{2x}{\pi^2} \cos(\pi x) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi x) dx \\ &= \left[-\frac{2x}{\pi^2} \cos(\pi x) \right]_0^1 + \left[\frac{2}{\pi^3} \sin(\pi x) \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi^2} \end{aligned}$$

㉡에서

$$C = 2 \int_0^1 f(x) dx = -2 \int_0^1 \frac{2x}{\pi} \sin(\pi x) dx = -\frac{4}{\pi^2} \text{ 이므로}$$

㉢에서

$$g(x+2) = g(x) - \frac{4}{\pi^2} \dots\dots \textcircled{B}$$

한편, 모든 자연수 k 에 대하여

$f(x-k) = f(x+k)$ 이다.

모든 실수 t, u 에 대하여

$$g(k+t) = \int_k^{k+t} f(t) dt \text{ 이고}$$

$t = k+u$ 라 할 때

$$\int_k^{k+t} f(t) dt = \int_0^t f(k+u) du \text{ 이다.}$$

$$g(k-t) = \int_k^{k-t} f(t) dt = - \int_{k-t}^k f(t) dt \text{ 이고}$$

$t = k-u$ 라 할 때

$$- \int_{k-t}^k f(t) dt = \int_0^t f(k-u) du \text{ 이다.}$$

이때 $f(k+u) = f(k-u)$ 이므로

$$g(k+t) = \int_0^t f(k+u) du = \int_0^t f(k-u) du = -g(k-t)$$

모든 실수 t 에 대하여

$$g(k+t) = -g(k-t) \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 점 $(k, 0)$ 에 대하여 대칭이다.

수학 영역(미적분)

따라서 임의의 실수 m 에 대하여

$$\int_{k-m}^{k+m} g(x) dx = 0 \text{ 이므로}$$

6 이하의 어떤 자연수 k 에 대하여 n 에 대한 방정식

$$\int_{k-5n}^{8k+6} g(x) dx = 0 \text{ 에서}$$

$$m = 5n \text{ 또는 } m = -5n$$

$$8k+6 = k + (7k+6) \text{ 이고 } 7k+6 > 0 \text{ 이므로}$$

$$m = 5n$$

$$\text{따라서 } 7k+6 = 5n \dots\dots \textcircled{\text{㉔}}$$

이때 $\textcircled{\text{㉔}}$ 을 만족시키는 정수 n 의 값은 $n = 4$ 이고 $k = 2$ 이다.

$$\text{따라서 } g(x) = \int_2^x f(t) dt$$

함수 $g(x)$ 가 점 $(2, 0)$ 에 대하여 대칭이므로 $\dots\dots \textcircled{\text{㉕}}$

$$\int_{-1}^5 g(x) dx = 0$$

$$\text{즉, } \int_{-3}^5 g(x) dx = \int_{-3}^{-1} g(x) dx \dots\dots \textcircled{\text{㉖}}$$

$$\textcircled{\text{㉕}}\text{에 의해서 } g(x) = g(x+2) + \frac{4}{\pi^2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{-1} g(x) dx &= \int_{-3}^{-1} \left\{ g(x+2) + \frac{4}{\pi^2} \right\} dx \\ &= \int_{-1}^1 g(x) dx + \frac{8}{\pi^2} \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ g(x+2) + \frac{4}{\pi^2} \right\} dx + \frac{8}{\pi^2} \\ &= \int_1^3 g(x) dx + \frac{16}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \textcircled{\text{㉕}}\text{에 의해서 } \int_1^3 g(x) dx = 0 \text{ 이므로}$$

$$\int_1^3 g(x) dx + \frac{16}{\pi^2} = \frac{16}{\pi^2}$$

$$\text{즉, } \int_{-3}^{-1} g(x) dx = \frac{16}{\pi^2}$$

따라서 $\textcircled{\text{㉖}}$ 에서

$$\int_{-3}^5 g(x) dx = \frac{16}{\pi^2}$$

29) [정답] 135 (출제자 : 24 김진영)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 수열을 구한 후 등비급수의 합이 존재하는 수열을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_{k+1}}{a_k} = -2n \dots\dots \textcircled{\text{㉑}}$$

$\textcircled{\text{㉑}}$ 에 $n = 1$ 을 대입하면

$$\frac{b_2}{a_1} = -2, b_2 = -2a_1$$

한편, $\textcircled{\text{㉑}}$ 의 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

양변에 n 대신 $n-1$ 을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{a_k} = -2(n-1) \dots\dots \textcircled{\text{㉒}}$$

$\textcircled{\text{㉑}} - \textcircled{\text{㉒}}$ 을 하면

$$\frac{b_{n+1}}{a_n} = -2n + 2(n-1) = -2$$

$$b_{n+1} = -2a_n \ (n \geq 2) \text{ 이므로}$$

$$b_n = \begin{cases} b_1 & (n=1) \\ -2a_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

이때 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$b_3 = -6 = -2a_2 = -2ar \dots\dots \textcircled{\text{㉓}}$$

이므로 $ar > 0$ 이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{이 수렴하므로 } -1 < r < 1 \text{이다.}$$

(i) $a > 0, r > 0$ 인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3|a_n| - |b_n|) = 3 \times \frac{a}{1-r} - \left(|b_1| + \frac{2a}{1-r} \right) = \frac{a}{1-r} - |b_1| = 0$$

$$\text{따라서 } |b_1| = \frac{a}{1-r} \text{이고,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 - \frac{2a}{1-r} = 0, b_1 = \frac{2a}{1-r}$$

$$|b_1| = \frac{a}{1-r} = \frac{2a}{1-r} \text{을 만족시키는 } a \text{와 } r \text{이 존재하지 않으므로}$$

모순이다.

(ii) $a < 0, r < 0$ 인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3|a_n| - |b_n|) = 3 \times \frac{-a}{1+r} - \left(|b_1| + \frac{-2a}{1+r} \right)$$

$$= \frac{-a}{1+r} - |b_1| = 0$$

$$\text{따라서 } |b_1| = \frac{-a}{1+r} \text{이고}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 - \frac{2a}{1-r} = 0$$

$$b_1 = \frac{2a}{1-r}, |b_1| = \frac{-a}{1+r} = \frac{-2a}{1-r}$$

$$\frac{1}{1+r} = \frac{2}{1-r}, 1-r = 2+2r$$

$$\text{따라서 } r = -\frac{1}{3} \text{이므로 } \textcircled{\text{㉓}}\text{에 대입하면}$$

$$\frac{2}{3}a = -6, a = -9$$

$$40 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 40 \sum_{n=1}^{\infty} -9 \left(-\frac{1}{3} \right)^{2n-1} = 40 \left(\frac{3}{1-\frac{1}{9}} \right) = 40 \left(\frac{27}{8} \right) = 135$$

30) [정답] 50 (출제자 : 25 김근원)

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 함수의 개형을 추론할 수 있는가?

[해설]

모든 실수 x 에 대하여 $|xg(h(x))| \geq 0$ 이므로

모든 실수 x 에 대하여 $g(x)h(x) \geq 0$

함수 $g(x)$ 가 $x > 0$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이고

$x \leq 0$ 에서는 $g(x) \leq 0$ 이므로

$$h(x) \geq 0 \ (x > 0) \dots\dots \textcircled{\text{㉑}}$$

$$h(x) \leq 0 \ (x < 0) \dots\dots \textcircled{\text{㉒}}$$

수학 영역(미적분)

$x > 0$ 일 때, ㉠이고 $g(x) \geq 0$ 이므로 $g(h(x)) \geq 0$
 $x < 0$ 일 때, ㉡이고 $g(x) \leq 0$ 이므로 $g(h(x)) \leq 0$
따라서 모든 실수 x 에 대하여 $|xg(h(x))| = xg(h(x))$

$x < 0$ 일 때
 $xg(h(x)) = xh(x)(h(x)+2)^2$ 이고
 $g(x)h(x) = x(x+2)^2h(x)$ 이므로
 $xg(h(x)) = g(x)h(x)$ 에서
 $x(x+2)^2h(x) = xh(x)(h(x)+2)^2$

$h(x) \neq 0$ 일 때 양변을 $xh(x)$ 로 나누면
 $(h(x)+2)^2 = (x+2)^2$
따라서 $h(x) = x$ 또는 $h(x) = -x-4$

조건 (가)에서 함수 $|h(x)|$ 가 연속하는 경우는 ㉡이므로
 $x < -4$ 에서 $h(x) = x$ 이다.

(i) $[-4, -2)$ 에서 $h(x) = x$, $[-2, 0)$ 에서 $h(x) = x$
(ii) $[-4, -2)$ 에서 $h(x) = x$, $[-2, 0)$ 에서 $h(x) = -x-4$

(i) $[-4, -2)$ 에서 $h(x) = x$, $[-2, 0)$ 에서 $h(x) = x$ 일 때,
 $p(t) = \lim_{x \rightarrow t+} \frac{|h(x)| - |h(t)|}{x-t}$, $q(t) = \lim_{x \rightarrow t-} \frac{|h(x)| - |h(t)|}{x-t}$ 라 하자.
 $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|h(x)| - |h(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x}$ 이므로
 $q(0) = -1$

조건 (나)에서
 $q(0)$ 와 $p(0)$ 의 부호가 같으므로
 $p(0)$ 의 값이 음수이다.
 $x = 0$ 에서 함수 $|h(x)|$ 가 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = 0$ 이고
㉠에 따라 $p(0) \geq 0$ 이므로 모순이다.

(ii) $[-4, -2)$ 에서 $h(x) = x$, $[-2, 0)$ 에서 $h(x) = -x-4$ 일 때
 $\lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = -4$ 이고 $x = 0$ 에서 함수 $|h(x)|$ 가 연속이므로
㉠에서 $\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = 4$ ㉢

$x > 0$ 일 때,
 $xg(h(x)) = xh(x)e^{h(x)}|f(h(x)) - 2|$ 이고
 $g(x)h(x) = h(x) \times xe^x|f(x) - 2|$ 이므로
 $xg(h(x)) = g(x)h(x)$ 에서
 $xh(x)e^{h(x)}|f(h(x)) - 2| = h(x) \times xe^x|f(x) - 2|$

$h(x) \neq 0$ 일 때, 양변을 $xh(x)$ 로 나누면
 $e^{h(x)}|f(h(x)) - 2| = e^x|f(x) - 2|$ ㉣
 $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{h(x)}|f(h(x)) - 2| = \lim_{x \rightarrow 0+} e^x|f(x) - 2|$ 이므로
 $e^4|f(4) - 2| = |f(0) - 2|$
 $f(0) = 2$ 이므로 $f(4) = 2$

따라서 $f(x) - 2 = x(x-4)(x-a)$ 이고
 $f'(0) > 0$ 이므로 $a > 0$

$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|h(x)| - |h(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|-x-4| - 4}{x}$ 이므로 $q(0) = 1$
조건 (나)에서
 $p(0) = e^{-4}$ ㉤

이때 함수 $K(x)$ 를
 $K(x) = e^x|f(x) - 2|$ ($x > 0$) 라 하자.

㉠에서 $h(x) = |h(x)|$ 이고
㉢에서 $K(|h(x)|) = K(x)$ 이므로
양변을 x 에 대하여 미분하면
 $K'(|h(x)|) \times \{|h(x)|\}' = K'(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 0+} [K'(|h(x)|) \times \{|h(x)|\}'] = \lim_{x \rightarrow 0+} K'(x)$

㉢, ㉤에서
 $\lim_{x \rightarrow 0+} K'(|h(x)|) \times p(0) = e^{-4} \times \lim_{x \rightarrow 4+} K'(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 0+} K'(x) = 4a$

(ii-㉢) $a > 4$ 일 때
 $\lim_{x \rightarrow 4+} K'(x) = 4e^4 \times (a-4)$ 이고
 $4(a-4) = 4a$ 이므로 모순이다.

(ii-㉣) $0 < a \leq 4$ 일 때
 $\lim_{x \rightarrow 4+} K'(x) = 4e^4 \times (4-a)$ 이고
 $4(4-a) = 4a$ 이므로 $a = 2$

따라서 $f(x) = x(x-4)(x-2) + 2$ 이고,
 $f(6) = 50$