미적분 29.

정답 | 107

내용 영역 | 등비급수

행동 영역 | 추론 - 나열하기, 세어보기, 관찰 등을 통해 문제 해결의 핵심 원리를 발견하는 능력

등급대별 예상 정답률 | 1등급: 85% / 2등급: 35% / 3등급: 5% 이하

1단계 S_n 의 합이 수렴하기 위한 조건 추론하기

$\Rightarrow b_n$ 의 정의에 따라 $b_{n+3} = r^3 \times b_n$ 이므로 S_n 의 합이 수렴하려면

$b_1 + b_2 + b_3 = 0$ 이어야 함을 추론할 수 있고, 이로부터 r 에 대한 방정식을 얻을 수 있을 것이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 $a_1 \times r^{n-1}$ ($a_1 \neq 0, r \neq 0$)이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 이 수렴하는 급수이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ 이다.

그리고 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = 0$ 이기도 하다.

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^n (b_{3k-2} + b_{3k-1} + b_{3k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(-\frac{4}{3} \times a_{3k-2} - \frac{4}{3} \times a_{3k-1} + a_{3k} \right) \\ &= a_1 \sum_{k=1}^n r^{3k-3} \left(-\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times r + r^2 \right) \end{aligned}$$

이고 $r \neq 0$ 이므로 $-\frac{4}{3} - \frac{4}{3}r + r^2 = 0$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} 3r^2 - 4r - 4 &= 0 \\ \Rightarrow (r-2)(3r+2) &= 0 \end{aligned}$$

에서 $r=2$ 또는 $r=-\frac{2}{3}$ 이다. $S_{3n} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} S_{3n-1} &= -b_{3n} \\ &= -a_1 \times r^{3n-1} \\ &= -a_1 \times r^{3n-3} \times r^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{3n-2} &= -b_{3n} - b_{3n-1} \\ &= -a_1 \times r^{3n-1} + \frac{4}{3} \times a_1 \times r^{3n-2} \\ &= -a_1 \times r^{3n-3} \times \left(r^2 - \frac{4}{3}r \right) \end{aligned}$$

이다. 이들도 0으로 수렴하므로 $|r| < 1$ 이어야 한다.

따라서 $r = -\frac{2}{3}$ 이다.

2단계 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 합을 계산하기

$\Rightarrow r$ 의 값을 얻었으므로 S_n 의 일반항을 a_1 에 대한 식으로 나타낼 수 있고, 따라서

$L = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값도 a_1 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

수열 $\{S_n\}$ 의 일반항은

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 0, \\ S_{3n-1} &= -a_1 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^{3n-3} \times \frac{4}{9} \\ &= -a_1 \times \left(-\frac{27}{8} \right) \times \frac{4}{9} \times \left(-\frac{8}{27} \right)^n \\ &= \frac{3}{2} a_1 \times \left(-\frac{8}{27} \right)^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{3n-2} &= -a_1 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^{3n-3} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{8}{9} \right) \\ &= -a_1 \times \left(-\frac{27}{8} \right) \times \frac{4}{3} \times \left(-\frac{8}{27} \right)^n \\ &= \frac{9}{2} a_1 \times \left(-\frac{8}{27} \right)^n, \end{aligned}$$

이다. 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (S_{3n-2} + S_{3n-1} + S_{3n}) &= \left(\frac{9}{2} a_1 + \frac{3}{2} a_1 \right) \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{8}{27} \right)^n \\ &= 6a_1 \times \frac{-\frac{8}{27}}{1 + \frac{8}{27}} \\ &= -\frac{48}{35} a_1 \end{aligned}$$

이다.

3단계 마무리 계산

$a_2 = r a_1 = -\frac{2}{3} a_1$ 이므로

$$\begin{aligned} L - 2a_2 &= -\frac{48}{35} a_1 + \frac{4}{3} a_1 \\ &= -\frac{4}{105} a_1 = 2 \end{aligned}$$

에서 $a_1 = -\frac{105}{2}$ 이다.

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{105}{2} \right) = 35, \\ L &= -\frac{48}{35} \times \left(-\frac{105}{2} \right) = 72 \end{aligned}$$

이므로 $a_2 + L$ 의 값은 107이다.

참고 **2단계**에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 합을 $\sum_{n=1}^{\infty} (S_{3n-2} + S_{3n-1} + S_{3n})$ 으로

계산했는데, 사실 이는 $T_n = \sum_{k=1}^n S_k$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ 이 아니라

$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n}$ 를 구한 것이다. 그러나 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (T_{3n} + S_{3n+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n} + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (T_{3n} + S_{3n+1} + S_{3n+2}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n} + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n} \end{aligned}$$

이어서 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n}$ 만 구해도 충분하다.