제 2 교시

2026학년도 대학수학능력시험 대비 녹색지대 모의고사

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

먼 하늘의 끝 빛나는 작은 별 너에게

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

그린란드

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

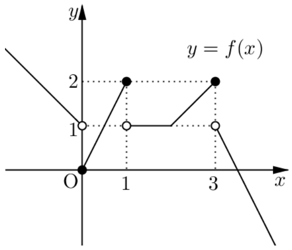
1. $2^{-\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{3}{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

2. $\int_0^2 (1+x+x^2)\,dx$ 의 값은? [2점]

① 4 ② $\frac{14}{3}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{20}{3}$

3. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0+} f(x) + \lim_{x\to 3-} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

4. 모든 항이 양수이고 공비가 2 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_4 = a_1 \times (4a_1 + 2a_2 + a_3)$$

을 만족시킬 때, a_6 의 값은? [3점]

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{32}{3}$ ④ $\frac{64}{3}$ ⑤ $\frac{128}{3}$

5. $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

6. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{10} {a_n}^2 = 14, \quad \sum_{n=1}^{10}(a_n+1)=6$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}(a_n-1)^2$ 의 값은? [3점]

① 32 ② 33 ③ 34 ④ 35 ⑤ 36

7. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = x^3-ax+b$$

이고, $f(-1)=2$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

8. 두 곡선 $y=\log_2(x-1)$, $y=\log_2(-2x+3)$이 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선의 교점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $\frac{1}{2}\log_2 3$ ② $\frac{1}{2}(1+\log_2 3)$ ③ $\log_2 3$

④ $1+\log_2 3$ ⑤ $\frac{3}{2}\log_2 3$

9. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{2n}-S_n=n^2-8n$$

일 때, a_{15}의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

10. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서 그은 접선의 방정식이 $y=-x+5$이다. 함수

$$g(x)=x+(x^2+k)f(x)$$

가 $x=2$에서 극값을 가질 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

11. 함수 $f(x)=x^2+1\ (x \geq 0)$의 역함수를 $y=g(x)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x+a)-g(x)}{x-2}=b$$

을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $-\frac{9}{2}$ ② -4 ③ $-\frac{7}{2}$ ④ -3 ⑤ $-\frac{5}{2}$

12. 상수 k에 대하여 함수

$$f(x)=-(\sin x+k)^2+\frac{1}{2}\sin x$$

가 모든 실수 x에 대하여 $f(\pi+x)=f(\pi-x)$을 만족시킨다. 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① $-\frac{7}{8}$ ② $-\frac{13}{16}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{11}{16}$ ⑤ $-\frac{5}{8}$

13. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 자연수 n에 대하여 함수
>
> $$y = x^2 - a_n x + 1 \ (x \geq 1)$$
>
> 의 최솟값은 a_{n+1}이다.

$a_5 = -3$일 때, a_1의 값은? [4점]

① $-\sqrt{3}$　② $2-2\sqrt{3}$　③ $2-\sqrt{3}$　④ 1　⑤ $\sqrt{3}$

14. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x < 1) \\ kx & (1 \leq x < 2) \\ x^3 - 2x & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값은? [4점]

> 어떤 실수 t에 대하여
> 함수 $|f(x)+t|$는 실수 전체의 집합에서 연속이고,
> $x = 0$에서 극솟값을 갖는다.

① -12　② -8　③ -4　④ 4　⑤ 8

15. 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$, $\overline{\mathrm{AB}}=c$라 할 때, 세 수 a, b, c가

$$c^2=a^2+\frac{3}{2}b^2,\quad \tan(\pi-\angle\mathrm{C})=\frac{c}{b}$$

를 만족시킨다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 5π일 때, c의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

단답형

16. 방정식 $4^x=2^{x+3}+128$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 연속함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to1-}f(x)-4=\frac{2}{3}\lim_{x\to1+}f(x)$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n = (-1)^n \times \tan\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = x^2 + ax + 2$이고,

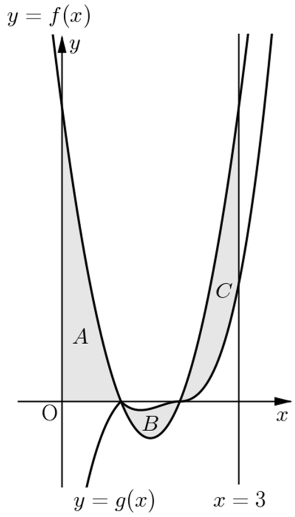
$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - 10}{x - 3} = 2$$

일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

20. 두 함수

$$f(x) = k(x-1)(x-2),$$
$$g(x) = |(x-1)(x-2)|(x-2)$$

에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분 중 x축 아래에 있는 부분의 넓이를 B, 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 C라 하자. $A=B+C$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. (단, $k>1$) [4점]



21. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 M이라 하자.

> (가) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} > 0$
>
> (나) x에 대한 방정식
>
> $$\{f(x)\}^n = -\frac{1}{4}n^2 + 2n$$
>
> 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 n이 존재한다.

$(M-1)^4$의 값을 구하시오. [4점]

22. 양수 a에 대하여 함수 $f(x) = x(x-a)^2$와 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $h(t) = \lim_{x \to t} \frac{|f(x)| - |g(x)|}{x - t}$가 정의되는
>
> 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{\alpha, \beta\}$이고, (단, $\alpha < \beta$)
>
> $h(\alpha) \times h(\beta) \geq 0$이다.

$\int_0^a \{f(x) - g(x)\}dx = \frac{28}{3}$일 때, $f(2a+1) - g(2a+1)$의 값을 구하시오. [4점]

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. $\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^4$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는? [2점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

24. 두 사건 A, B 에 대하여

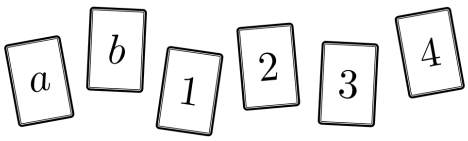
$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

25. 알파벳 a, b와 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 사용하여 일렬로 임의로 모두 나열할 때, 알파벳이 적힌 두 카드는 서로 이웃하고 양 끝에 놓인 카드는 모두 숫자가 적힌 카드가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{2}{15}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{7}{30}$



26. 확률변수 X가 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$를 따르고, 이산확률변수 Y가

$$X+2Y=30,\quad \mathrm{V}(X)+\mathrm{E}(Y)=12$$

를 만족시킬 때, n의 값은? [3점]

① 27　② 36　③ 45　④ 54　⑤ 63

27. 어느 반도체 회사에서 생산하는 웨이퍼 한 장에서 정상적인 칩이 생산된 부분의 넓이는 평균이 720, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 웨이퍼 한 장에서 정상적인 칩이 생산된 부분의 넓이가 650보다 작은 경우 웨이퍼를 불량으로 판정할 때, 이 회사에서 생산한 웨이퍼 중에서 임의로 선택한 한 장의 웨이퍼가 불량일 확률이 0.02가 되도록 하는 σ의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?
(단, 넓이의 단위는 cm^2이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

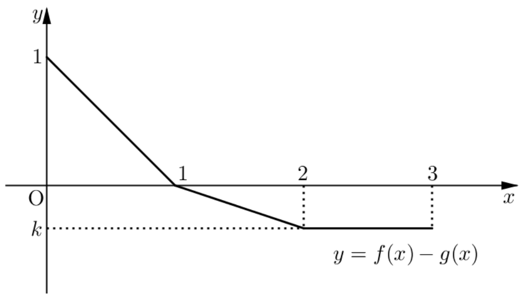
① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

28. 흰 공 6개와 검은 공 6개를 두 명의 학생 A, B에게 남김없이 나누어주려고 한다. 학생 A가 받은 흰 공의 개수가 학생 B가 받은 검은 공의 개수보다 많을 때, 학생 B가 받은 검은 공의 개수가 학생 A가 받은 검은 공의 개수보다 많을 확률은?
(단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 흰 공 또는 검은 공을 하나도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

① $\frac{2}{21}$ ② $\frac{5}{42}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{4}{21}$

단답형

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 3$, $0 \le Y \le 3$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $0 \le x \le 3$에서 각각 연속이고, 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le 1\right)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(0 \le Y \le 1)=\frac{1}{2}$일 때,

$\mathrm{P}\left(-2k \le Y \le \frac{7}{3}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, k는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y=\{0, 1, 4, 9\}$와 함수

$$f : X \to Y, \quad f(x)=(x-4)^2$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $g : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $g(4)=3$
(나) $n=1$, 2, 3, 4, 5일 때, $f(g(n+1)) \le f(g(n))$이다.

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{2-\cos x}$ 에 대하여 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$의 값은? [2점]

① $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ ② $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $-\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{2n}{n+1}\right)=\frac{3}{2},\quad \lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=3$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$의 값은? [3점]

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

25. 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{1}^{e} \frac{f(x)+1}{x}\,dx = \frac{2}{3}$일 때, $\int_{0}^{1} f(e^x)\,dx$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}-e$　② $-\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $-\frac{1}{3}+e$　⑤ $\frac{1}{3}+e$

26. 곡선 $x(2y+k) = \sin(x^2-y+1)$ 위의 점 $(0,1)$에서의 접선이 x축에 평행할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① -6　② -5　③ -4　④ -3　⑤ -2

27. $0<t<4$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)=4e^{-x^2}$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 x 축으로 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 직사각형 ACDB의 대각선의 길이가 최소가 되도록 하는 t 의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

28. 함수 $f(x)=e^{x^2-a|x|+b}$ $(a>0,\ b>0)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\sin\{\pi\times f(x)\}$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 최솟값은? [4점]

> (가) 함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 극대이면 함수 $g(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 극솟값 0을 갖는다.
>
> (나) 함수 $f(x)$ 가 $x=\beta$ 에서 극소이면 함수 $g(x)$ 는 $x=\beta$ 에서 극댓값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 을 갖는다.

① $2\sqrt{\ln\frac{12}{11}}+\ln 3$ ② $\sqrt{\ln\frac{18}{11}}+2\ln 3$ ③ $2\sqrt{\ln\frac{12}{11}}+2\ln 3$

④ $\sqrt{\ln\frac{18}{11}}+3\ln 3$ ⑤ $2\sqrt{\ln\frac{12}{11}}+3\ln 3$

단답형

29. 공비가 $r\ (r \neq 0)$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} < a_1$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - r|a_n|\right) = -\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$

$\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{4} a_n\right|$ 의 값이 자연수일 때, $|a_1|$ 의 최솟값은 k 이다. $25k$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 함수 $y = x^3 + x$ 의 역함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) - \int_a^x \left\{f(t) - \left(bt^2 + 1\right)\right\} dt = x$$

을 만족시킨다. $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -\frac{3}{2}$ 일 때, $\displaystyle\int_0^2 xf(x)\,dx = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 상수이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2, 3, -1)$, $\mathrm{B}(-2, 0, k)$에 대하여 선분 AB의 중점이 y축 위에 있을 때, 상수 k의 값은? [2점]

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

24. 포물선 $y^2 = 4px - 3$의 준선의 방정식이 $x = 1$일 때, 양수 p의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

25. 좌표평면 위에 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 원이 있다. 원 위의 서로 다른 두 점 P, Q가

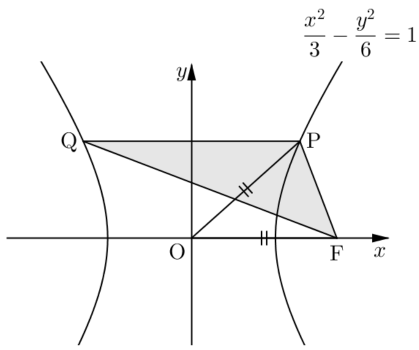
$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{2}|\overrightarrow{PQ}|^2$$

를 만족시킬 때, 선분 PQ의 길이는? [3점]

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

26. 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$과 점 $F(3, 0)$에 대하여 쌍곡선 위에 있는 제1사분면 위의 한 점 P가 $\overline{OP}=\overline{OF}$를 만족시킨다. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 쌍곡선과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

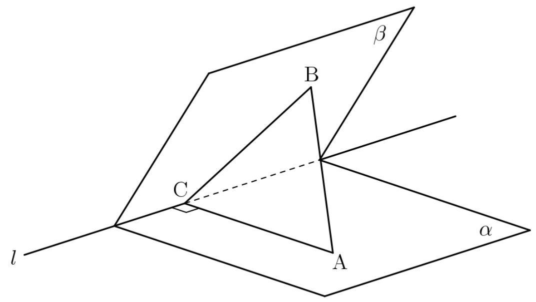


27. 좌표공간에 서로 다른 두 평면 α, β과 그 교선 l이 있다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$이고, 평면 α 위의 한 점 A, 평면 β 위의 한 점 B, 직선 l 위의 한 점 C에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=5,\quad \overline{\mathrm{BC}}=6,\quad \overline{\mathrm{AC}}\perp l$$

이다. 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{11}}{4}$



28. 타원 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$의 한 초점 $\mathrm{F}(c,0)$ $(c>0)$에 대하여 타원 C 위의 한 점 A가 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{FA}}$를 만족시킨다. 타원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 PF의 중점을 Q라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최댓값은? (단, O는 원점이고, A는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]

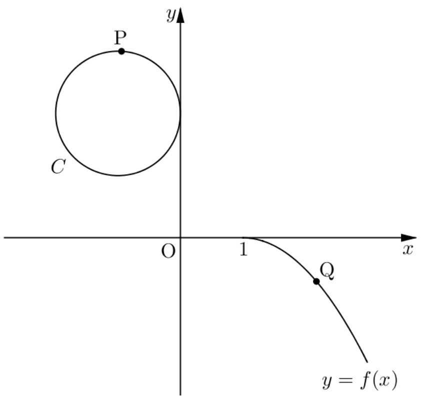
① $\frac{2+\sqrt{11}}{4}$ ② $\frac{2+\sqrt{22}}{4}$ ③ $\frac{1+\sqrt{22}}{2}$ ④ $1+\sqrt{11}$ ⑤ $\frac{3+\sqrt{22}}{2}$

단답형

29. 좌표평면에 원 $C: (x+1)^2+(y-2)^2=1$ 와 함수

$$f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2 \ (1 \le x \le 3)$$

의 그래프가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ 의 최솟값을 m, 최댓값을 M 이라 할 때, $(M+3m)^2$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 좌표공간에 중심이 $(1, 1, \sqrt{2})$ 이고 반지름의 길이가 2인 구 S 가 있다. x 좌표, y 좌표, z 좌표가 모두 0 이상인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형을 C_1, x 좌표와 y 좌표가 각각 0 이상이고, z 좌표는 0 이하인 구 S 위의 모든 점 Q가 나타내는 도형을 C_2 라 하자. 도형 C_1 의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이를 k_1, 도형 C_2 의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이를 k_2 라 할 때, $2k_1-k_2=a\sqrt{3}+b\pi$ 이다. $12ab$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2026학년도 대학수학능력시험 대비 녹색지대 모의고사

수학 영역 정답표

공통과목						선택과목								
						확률과 통계			미적분			기하		
문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점
1	②	2	12	①	4	23	②	2	23	②	2	23	④	2
2	⑤	2	13	②	4	24	②	3	24	③	3	24	⑤	3
3	③	3	14	③	4	25	④	3	25	②	3	25	③	3
4	④	3	15	④	4	26	①	3	26	⑤	3	26	②	3
5	⑤	3	16	4	3	27	⑤	3	27	④	3	27	①	3
6	①	3	17	12	3	28	③	4	28	①	4	28	②	4
7	②	3	18	32	3	29	23	4	29	40	4	29	27	4
8	①	3	19	31	3	30	343	4	30	31	4	30	56	4
9	④	4	20	24	4									
10	③	4	21	48	4									
11	⑤	4	22	65	4									

2026년도 대학수학능력시험 대비
녹색지대 모의고사 해설지
수학 영역

출제자 소개

이재종(그린란드)

- 성균관대 수학교육과 졸업
- 국가장학재단 이공계장학금 전액 장학생
- 네이버 수학 분야 파워지식IN(2013~)
- 녹색지대 모의고사(2020~) 출제 및 제작
- 기대N제(2024) 공저
- (前) 이투스247
- (現) 배곧라라중학교

수능 표본 예상 등급 구분 점수

<확률과 통계>	<미적분>	<기하>
1등급: 86~88	1등급: 80~82	1등급: 83~85
2등급: 78~80	2등급: 71~73	2등급: 74~76
3등급: 69~71	3등급: 62~64	3등급: 65~67

※ 2022학년도 수능부터 이용되는 점수 산출 방식으로 계산하였을 때 예상되는 등급 구분 점수로, 2022~2025 수능 시험 문항을 이용하여 AI로 추정하였습니다.

※ 틀린 문항이 모두 선택 문항인 경우 가장 등급 구분 점수가 낮고, 틀린 문항이 모두 공통 문항인 경우 가장 등급 구분 점수가 높습니다.

주의 사항 및 이용 안내

1. 본 문제지와 해설지의 저작권은 이재종(그린란드)에게 있습니다. 또한, 이 저작물은 크리에이티브 커먼즈 저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국 라이선스에 따라 이용할 수 있습니다.
(이 라이선스에 대한 자세한 정보는 아래의 링크를 참조하여 확인할 수 있습니다.)

2. 해당 저작물은 수험생들의 학습을 돕기 위해 만들어진 것으로, 영리적 목적(문제를 편집하거나 수정하여 판매하는 행위 등)이 아닌 이상 학생들의 학습을 위한 용도로 단순 배포하고 이용하는 것엔 제한이 없습니다.

3. 타인의 창작물을 이용할 때에는 저작자의 동의를 구하고 출처를 표기해 주세요.
창작 문화를 더욱 성숙하게 하고, 지식을 이용한 나눔 활동이 더욱 풍성해질 수 있도록 창작자들을 지지하는 것은 이용자의 몫입니다.

4. 본 시험지에 관한 문의 사항(오타/오류 제보 포함)이 있는 경우 다음으로 연락주시면 안내해 드리도록 하겠습니다.

(E-mail) wowhd93@naver.com
(KaKao) wowhd93

5. 제작자 블로그 주소
https://blog.naver.com/wowhd93
https://greenland.tistory.com/

공통과목(1~22)

1. [출제 의도] 지수법칙을 이해하고 있는가?

$2^{-\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{3}{4}} = 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^1 = 2$

2. [출제 의도] 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$$\int_0^2 (1+x+x^2)dx = \left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2+2+\frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

3. [출제 의도] 함수의 극한을 이해하고 있는가?

주어진 그래프에서

$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 3-} f(x) = 2$ 이므로

구하는 값은 2이다.

4. [출제 의도] 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 2이므로

$a_1 \times (4a_1 + 2a_2 + a_3) = a_1 \times (3a_3) = 3{a_2}^2$

$a_4 = 3{a_2}^2$ 이므로

$4a_2 = 3{a_2}^2 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{3}$

$\therefore a_6 = a_2 \times 2^4 = \frac{64}{3}$

5. [출제 의도] 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$ 이므로 $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 이므로 $\sin\theta < 0$

$\Rightarrow \sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\frac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

6. [출제 의도] 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하고 있는가?

$\sum_{n=1}^{10}(a_n+1) = 6$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n = -4$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{10}(a_n-1)^2 &= \sum_{n=1}^{10}\left({a_n}^2 - 2a_n + 1\right) \\ &= \sum_{n=1}^{10}{a_n}^2 - 2\sum_{n=1}^{10}a_n + 10 \\ &= 14 - 2\times(-4) + 10 = 32\end{aligned}$$

7. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-a+b=0$ ⋯ ①

주어진 등식의 양변을 미분하면

$f(x) = 3x^2 - a$

위 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2 = 3-a$ ⋯ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

$\therefore a+b=1$

8. [출제 의도] 로그함수의 그래프의 교점을 구할 수 있는가?

$x-1=1$ 에서 $x=2$ 이고,

$-2x+3=1$ 에서 $x=1$ 이므로

$\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$ 이다.

또한 $\log_2(x-1) = \log_2(-2x+3)$ 에서

$x-1 = -2x+3$

$3x = 4$, $x = \frac{4}{3}$

즉, 점 C의 x좌표는 $\frac{4}{3}$ 이고, y좌표는

$\log_2\left(\frac{4}{3}-1\right) = -\log_2 3$ 이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2-1)\times\log_2 3 = \frac{1}{2}\log_2 3$

9. [출제 의도] 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 있는가?

주어진 식의 양변에 $n=1$을 대입하면

$S_2 - S_1 = a_2 = -7$

주어진 식의 양변에 $n=3$을 대입하면

$S_6 - S_3 = a_4 + a_5 + a_6 = 3a_5 = -15$, $a_5 = -5$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5 - a_2 = 2 \Rightarrow 3d = 2$, $d = \frac{2}{3}$

$\therefore a_{15} = a_5 + 10d = -5 + \frac{20}{3} = \frac{5}{3}$

10. [출제 의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+5$가 $(2, f(2))$에서 접하므로 $f(2)=3$, $f'(2)=-1$이다.

곱의 미분법에 의하여

$g'(x) = 1 + 2xf(x) + (x^2+k)f'(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}g'(2) &= 1 + 4f(2) + (4+k)f'(2) \\ &= 1 + 12 - (4+k) \\ &= 9-k\end{aligned}$$

문제의 조건에서 $9-k=0$ 이므로 $k=9$

11. [출제 의도] 여러 가지 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$f(x) = x^2+1 \ (x \ge 0)$에서 역함수의 정의에서

$x = \{g(x)\}^2 + 1 \ (x \ge 1)$

$g(x) = \sqrt{x-1} \ (x \ge 1)$ 이다.

주어진 극한에서 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

분자인 $f(x+a) - g(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$f(2+a) - g(2) = 0$

$(a+2)^2 + 1 - 1 = 0$, $\therefore a = -2$

한편

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+a)-g(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2+1-\sqrt{x-1}}{x-2}$$

이고,

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0$,

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{1-(x-1)}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})} = \lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\right) = -\frac{1}{2}$$

이므로 $b = -\frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore a+b = -\frac{5}{2}$

12. [출제 의도] 삼각함수의 최대, 최소를 구할 수 있는가?

$\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$ 이므로

$$f(\pi+x)=-(-\sin x+k)^2-\frac{1}{2}\sin x$$
$$=-\sin^2 x+\left(2k-\frac{1}{2}\right)\sin x-k^2$$
$$f(\pi-x)=-(\sin x+k)^2+\frac{1}{2}\sin x$$
$$=-\sin^2 x+\left(-2k+\frac{1}{2}\right)\sin x-k^2$$

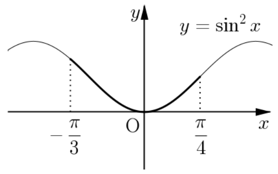
모든 실수 x에 대하여 $f(\pi+x)=f(\pi-x)$이므로

$$2k-\frac{1}{2}=-2k+\frac{1}{2} \Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

$$\therefore f(x)=-\sin^2 x-\frac{1}{16}$$

닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$에서 그림과 같이

$0 \le \sin^2 x \le \left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^2=\frac{3}{4}$ 이므로



$$M=-\frac{1}{16},\ m=-\frac{3}{4}-\frac{1}{16}=-\frac{13}{16}$$

$$\therefore M+m=-\frac{1}{16}-\frac{13}{16}=-\frac{7}{8}$$

13. [출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

$x^2-a_n x+1=\left(x-\frac{a_n}{2}\right)^2+1-\frac{a_n^{\ 2}}{4}$ 에서

함수 $y=x^2-a_n x+1$ 는 $x=\frac{a_n}{2}$ 에서 최솟값 $1-\frac{a_n^{\ 2}}{4}$ 을 갖는다.

즉, 함수 $y=x^2-a_n x+1\ (x \ge 1)$은

(i) $\frac{a_n}{2} \ge 1$ 이면 $x=\frac{a_n}{2}$ 에서 최솟값 $1-\frac{a_n^{\ 2}}{4}$ 을 갖는다.

(ii) $\frac{a_n}{2} < 1$ 이면 $x=1$ 에서 최솟값 $2-a_n$ 을 갖는다.

$$\therefore a_{n+1}=\begin{cases} 2-a_n & (a_n<2) \\ 1-\frac{a_n^{\ 2}}{4} & (a_n \ge 2) \end{cases}$$

즉, $a_{n+1}>0$ 이면 $a_{n+1}=2-a_n$

$a_{n+1} \le 0$ 이면 $a_{n+1}=1-\frac{a_n^{\ 2}}{4}$ 이다.

$a_5=-3$ 에서

$1-\frac{a_4^{\ 2}}{4}=-3 \Rightarrow a_4^{\ 2}=16,\ a_4=4\ (\because a_4 \ge 2)$

$a_4=4$에서

$2-a_3=4 \Rightarrow a_3=-2$

$a_3=-2$ 에서

$1-\frac{a_2^{\ 2}}{4}=-2 \Rightarrow a_2^{\ 2}=12,\ a_2=2\sqrt{3}\ (\because a_2 \ge 2)$

$a_2=2\sqrt{3}$ 에서

$2-a_1=2\sqrt{3} \quad \therefore a_1=2-2\sqrt{3}$

14. [출제 의도] 함수의 연속을 이해하고 있는가?

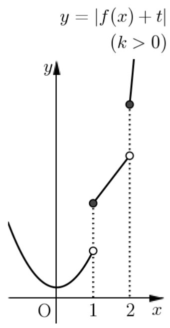
$x<1$ 일 때 $f(x)=x^2-1$ 이고, 이때 $f(x)$는 $x=0$ 에서 극솟값 -1(음수)을 가지므로

함수 $|f(x)+t|$ 가 $x=0$ 에서 극솟값을 가지려면

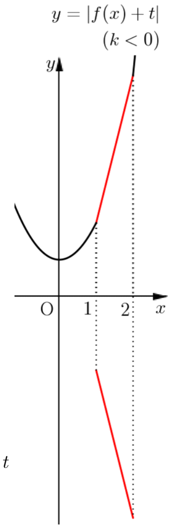
$$f(0)+t \ge 0 \Rightarrow t \ge 1 \ \cdots \ (*)$$

또한 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$를 제외한 모든 점에서 연속이므로 함수 $|f(x)+t|$ 또한 그렇다.

(*)에 의하여 $k \ge 0$ 이면 모든 실수 t에 대하여 $f(x)+t \ge 0$ 이다. 또한, 직선 $y=kx+t$가 두 점 $(1, t)$, $(2, t+4)$를 동시에 지나는 것은 불가능하므로 함수 $|f(x)+t|$ 가 $x=1$, $x=2$ 에서 모두 연속이 되도록 하는 실수 t는 존재하지 않는다.



한편, $k<0$ 인 경우, $1 \le x < 2$ 에서 $kx<0$ 이므로 다음과 같이 $x=1$, $x=2$ 에서 함수 $f(x)+t$ 의 좌극한과 우극한의 합이 0 이 되는 경우 함수 $|f(x)+t|$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이 된다.



$$\lim_{x \to 1-}\{f(x)+t\}=t$$
$$\lim_{x \to 1+}\{f(x)+t\}=k+t$$

에서 $k+t=-t$, $k=-2t$

$$\lim_{x \to 2-}\{f(x)+t\}=2k+t$$
$$\lim_{x \to 2+}\{f(x)+t\}=4+t$$

에서 $2k+t=-4-t$, $k=-2-t$

즉, $-2t=-2-t$ 이므로 $t=2$,

$\therefore k=-2t=-4$

15. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

코사인법칙에 의하여

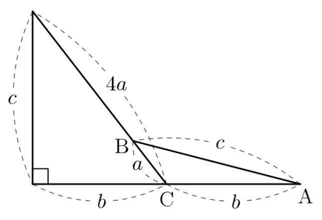
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle\mathrm{C}$ 이므로 문제의 조건에서

$$\frac{1}{2}b^2=-2ab\cos\angle\mathrm{C}$$

$$\Rightarrow b=-4a\cos\angle\mathrm{C}=4a\cos(\pi-\angle\mathrm{C})$$

또한 $\tan(\pi-\angle\mathrm{C})=\frac{c}{b}$ 이므로

그림과 같이 빗변의 길이가 $4a$ 이고, 밑변의 길이가 b 인 직각삼각형의 밑각의 크기가 $\pi-\angle\mathrm{C}$ 이고, 높이가 c 이다.



이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{c}{\sin(\pi-\angle\mathrm{C})}=R$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\frac{c}{4a}}=4a=2\sqrt{5},\ a=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

주어진 조건에 의하여

$$c^2=\frac{5}{4}+\frac{3}{2}b^2 \ \cdots \ ①$$

피타고라스 정리에 의하여

$$b^2+c^2=20 \ \cdots \ ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $c^2=\frac{25}{2}$

$$\therefore c=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

16. [출제 의도] 지수가 포함된 방정식을 풀 수 있는가?

주어진 방정식은

$4^x-2^{x+3}-128=0$,

$(2^x)^2-8\times 2^x-128=0$

$(2^x+8)(2^x-16)=0$

$2^x>0$ 이므로 $2^x=16 \quad \therefore x=4$

17. [출제 의도] 함수의 연속의 정의를 알고 있는가?

함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1+} f(x)=f(1)$ 이다.

주어진 관계식으로부터

$f(1)-4=\frac{2}{3}f(1)$ 이므로 $\therefore f(1)=12$

18. [출제 의도] 삼각함수의 성질을 이해하고 있는가?

자연수 n 의 값에 따라 $(-1)^n$, $\tan\left(\frac{n\pi}{3}\right)$의 값을 구하면

$(-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots$

$\tan\left(\frac{n\pi}{3}\right)$: $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0, \cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은

$$-\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 0$$

의 6개의 숫자가 반복되는 수열이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{n} a_k=0$ 인 n 의 값은

$$n=6m-1,\ n=6m\ (m\text{은 자연수})$$

이다. 즉, 반복되는 한 주기에 $\sum_{k=1}^{n} a_k=0$ 인 n 의 값이 2개 존재하고, $100=6\times 16+4$ 이므로

16번의 주기에 $\sum_{k=1}^{n} a_k=0$ 인 n 이 각각 2개씩 있고, 17번째 주기에서는 그러한 n 이 존재하지 않는다.

따라서 $\sum_{k=1}^{n} a_k=0$ 인 100 이하의 자연수 n 의 개수는 $16\times 2=32$ 이다.

19. [출제 의도] 미분계수의 정의를 이용하여 함수의 극대, 극소를 구할 수 있는가?

주어진 극한으로부터

$f(3)=10$, $f'(3)=2$ 이다.

$f'(3)=11+3a=2$ 에서 $a=-3$

$$f(x)=\int(x^2-3x+2)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$$

이고 $f(3)=10$ 이므로 $C=\frac{17}{2}$

$f'(x)=(x-1)(x-2)$ 이므로

$f(x)$는 $x=1$ 에서 극댓값을 가지고, 그 값은

$$f(1)=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2+\frac{17}{2}=\frac{28}{3}$$

$$\therefore p+q=3+28=31$$

20. [출제 의도] 정적분의 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는
두 점 $(1,0)$, $(2,0)$에서 각각 x축과 만난다.

$\int_1^2 g(x)dx = D$, $\int_2^3 g(x)dx = E$라 하자.

함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭이므로

$A=C+E$이다. 따라서

$$A=B+C \Rightarrow B=E$$

가 성립한다.

또한 $B-D=\int_1^2 f(x)dx$ 이므로

$$B=E \Rightarrow D+\int_1^2 f(x)dx = E$$

$$\Rightarrow E-D=\int_1^2 f(x)dx$$

가 성립한다.

이때 $D=\int_1^2 g(x)dx = -\int_1^2 (x-1)(x-2)^2dx$

$E=\int_2^3 g(x)dx = \int_2^3 (x-1)(x-2)^2dx$

이므로

$$E-D=\int_2^3 (x-1)(x-2)^2dx + \int_1^2 (x-1)(x-2)^2dx = \int_1^3 (x-1)(x-2)^2dx$$

이다.

$\int_1^2 f(x)dx = \frac{k}{6}$ 이고

$$\int_1^3 (x-1)(x-2)^2dx = \int_{-1}^1 x^2(x+1)\,dx = 2\int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3}$$

이므로 $\frac{k}{6}=\frac{2}{3}$ $\therefore k=4$

$\therefore f(4)=4\times3\times2=24$

21. [출제 의도] 거듭제곱근의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 의 값이 존재하므로 $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a$라 하면 $f(x)=x^2+ax$ $(a>0)$라 둘 수 있다.

방정식 $\{f(x)\}^n=-\frac{1}{4}n^2+2n$의 실근 α에 대하여

$f(\alpha)$는 $-\frac{1}{4}n^2+2n$의 n제곱근이다.

(1) n이 홀수인 경우

$n=1$을 포함하여 $-\frac{1}{4}n^2+2n$의 n제곱근의 개수는 1이다. 그 값을 β라 하자.

주어진 방정식은 $f(x)=\beta$가 되는 x를 구하는 것과 같고, 이차함수의 성질에 따라 이러한 x의 개수는 많아봐야 2이다.

따라서, 이 경우 문제의 조건을 만족시키는 $f(x)$는 존재하지 않는다.

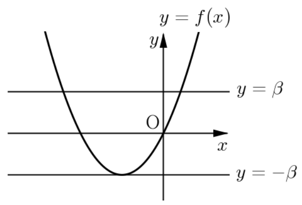
(2) n이 짝수인 경우

(i) $-\frac{1}{4}n^2+2n<0$이면 $-\frac{1}{4}n^2+2n$의 n제곱근의 개수는 0이므로 문제의 조건을 만족시키는 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(ii) $-\frac{1}{4}n^2+2n=0$이면 $-\frac{1}{4}n^2+2n$의 n제곱근의 개수는 1이므로 (1)과 같은 방법으로 문제의 조건을 만족시키는 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(iii) $-\frac{1}{4}n^2+2n>0$이면 $-\frac{1}{4}n^2+2n$의 n제곱근의 개수는 2이고 그 두 값의 부호는 반대이다.
그 두 n제곱근을 각각 $-\beta$, $\beta\,(\beta>0)$라 하자.

그러면, 방정식
$f(x)=-\beta$ 또는 $f(x)=\beta$인 x의 개수가 3이 되어야 하고, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이므로
그림과 같이
방정식 $f(x)=-\beta$의 실근의 개수는 1,
방정식 $f(x)=\beta$의 실근의 개수는 2이어야 한다.



함수 $f(x)=x^2+ax$의 최솟값은 $f\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}$

이므로

$-\frac{1}{4}n^2+2n>0 \iff n(n-8)<0$, $0<n<8$

에서

(a) $n=2$인 경우,

$-\beta$는 $-\frac{1}{4}n^2+2n=3$의 제곱근이다.

$\beta=\frac{a^2}{4}$이므로 $\frac{a^2}{4}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$, $a^2=4\sqrt{3}$

(b) $n=4$인 경우,

$-\beta$는 $-\frac{1}{4}n^2+2n=4$의 네제곱근이다.

$\frac{a^2}{4}=4^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$, $a^2=4\sqrt{2}$

(c) $n=6$인 경우

$-\beta$는 $-\frac{1}{4}n^2+2n=3$의 여섯제곱근이다.

$\frac{a^2}{4}=3^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2}$, $a^2=4\sqrt[6]{2}$

a가 최대가 될 때,
$f(1)=a+1$도 최댓값을 가지므로
(a), (b), (c)에서 $a^2=4\sqrt{3}$일 때 $M=a+1$이다.

$\therefore (M-1)^4=a^4=(4\sqrt{3})^2=48$

22. [출제 의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 다항함수의 형태를 추론할 수 있는가?

$h(t)$의 값이 존재할 때, (분모)$\to0$이므로
(분자)$\to0$이다. 두 함수 $|f(x)|$, $|g(x)|$는
연속이므로 $|f(t)|=|g(t)|$이다.

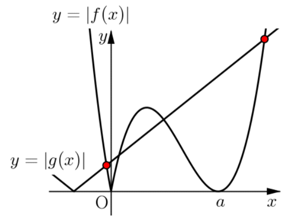
$g(x)=p(x-q)$이라 하자.

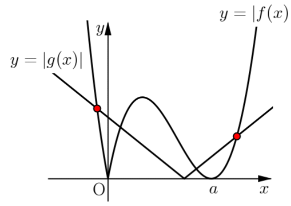
(1) $q\neq0$인 경우
사잇값 정리에 의해 q의 값에 관계없이 방정식
$|f(x)|=|g(x)|$은 열린구간 $(-\infty,0)$, (a,∞)에서 항상 각각 하나의 실근을 갖는다.

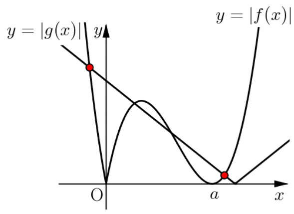
위의 경우에서 열린구간 $(-\infty,0)$, (a,∞)에서
가지는 각각의 교점의 x좌표를 t라 하면
두 함수 $|f(x)|$, $|g(x)|$는 $x=t$에서 미분가능하므로
$h(t)$의 값이 존재하고,

$$h(t)=\lim_{x\to t}\frac{|f(x)|-|f(t)|-|g(x)|+|g(t)|}{x-t}$$
$$=|f(x)|'_{x=t}-|g(x)|'_{x=t}$$

이 성립한다.







따라서 $q\neq0$이면
방정식 $|f(x)|=|g(x)|$은 열린구간 $(-\infty,0)$에서
실근 α, 열린구간 (a,∞)에서 실근 β를 갖고
그것이 위 방정식의 모든 실근이어야 한다.

이때 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 두 함수 $|f(x)|$, $|g(x)|$의
미분계수를 비교하면 어떤 경우라도

$|f(x)|'_{x=\alpha}<|g(x)|'_{x=\alpha}$,
$|f(x)|'_{x=\beta}>|g(x)|'_{x=\beta}$

$\Rightarrow h(\alpha)<0$, $h(\beta)>0$, $h(\alpha)\times h(\beta)<0$
이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

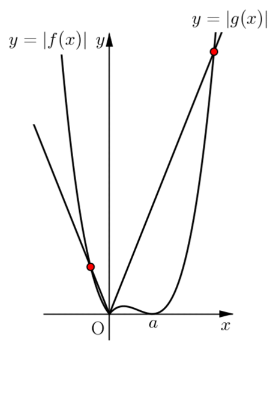
(2) $q=0$인 경우
$f'(0)=a^2$이므로 $|p|$의 값에 따라 나누어 생각한다.

(i) $|p|>a^2$인 경우

$$\lim_{x\to t-}\frac{|f(x)|-|g(x)|}{x-t}=-f'(0)-(-|p|)=|p|-a^2$$

$$\lim_{x\to t+}\frac{|f(x)|-|g(x)|}{x-t}=f'(0)-(|p|)=a^2-|p|$$

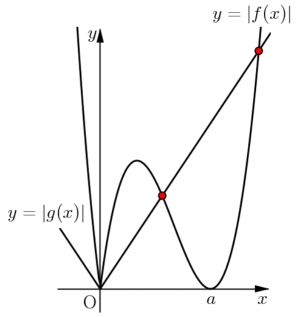
이므로 $h(0)$의 값은 존재하지 않는다.



(1)과 같은 방법으로 사잇값 정리에 의하여 $|f(x)|=|g(x)|$은 열린구간 $(-\infty,0)$에서 실근 α, 열린구간 (a,∞)에서 실근 β를 갖고 $h(\alpha)\times h(\beta)<0$이다.

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $|p|<a^2$인 경우



(i)과 같은 방법으로 $h(0)$의 값은 존재하지 않는다.
또한, 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$은 그림과 같이 열린구간 $(0,a)$과 (a,∞)에서 각각 하나의 실근을 갖는다. 그 실근이 각각 α, β가 되어야 한다.

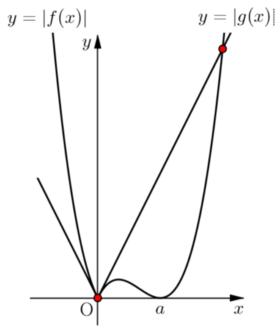
역시 (1)과 같은 방법으로 $h(\alpha)\times h(\beta)<0$이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $|p|=a^2$인 경우

$$\lim_{x\to t-}\frac{|f(x)|-|g(x)|}{x-t}=\lim_{x\to t+}\frac{|f(x)|-|g(x)|}{x-t}=0$$

이 성립하므로 $h(0)=0$이다.

또한, 그림과 같이 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$은 $x=0$과 열린구간 (a,∞)에 속하는 하나의 실근을 갖는다.
즉, $\alpha=0$이고 열린구간 (a,∞)에 속하는 하나의 실근이 β이다.



이 경우, $h(\alpha)\times h(\beta)=0$이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

또한, $\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx=\frac{28}{3}>0$이므로

직선 $y=g(x)$의 기울기는 음수여야 한다.

$\therefore\ g(x)=-a^2x$

따라서

$$\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^a(x^3-2ax^2+2a^2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}ax^3+a^2x^2\right]_0^a=\frac{7a^4}{12}=\frac{28}{3}$$

$a^4=16$이므로 $a=2$이다.

$\therefore\ f(2a+1)-g(2a+1)$

$=f(5)-g(5)=5\times3^2-(-4\times5)=65$

확률과 통계(23~30)

23. [출제 의도] 이항정리를 이해하고 있는가?

이항정리에 의하여 x^4의 계수는

$${}_4\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

24. [출제 의도] 확률의 연산을 할 수 있는가?

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
이므로 주어진 조건에 의하여

$\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

25. [출제 의도] 확률의 정의를 이해하고 있는가?

6장의 카드를 일렬로 나열하는 모든 방법의 수는

$6!=720$ ⋯ ①

양 끝에 놓일 숫자가 적힌 카드 2장을 선택하여 양 끝에 카드를 놓는 방법의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

남은 4장의 카드를 알파벳이 적힌 두 카드가 이웃하도록 놓는 방법의 수는 다음과 같은 형태 중 하나이므로

(알파벳) (알파벳) (숫자) (숫자)
(숫자) (알파벳) (알파벳) (숫자)
(숫자) (숫자) (알파벳) (알파벳)

경우의 수는 $3\times2\times2=12$

따라서 문제의 조건에 맞도록 카드를 나열하는 방법의 수는

$12\times12=144$ ⋯ ②

①, ②에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$$

26. [출제 의도] 이항분포와 확률변수의 성질을 이해하고 있는가?

$\mathrm{E}(X)=\frac{2}{3}n$, $\mathrm{V}(X)=\frac{2}{9}n$이고

$Y=15-\frac{1}{2}X$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(15-\frac{1}{2}X\right)=15-\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)=15-\frac{1}{3}n$

따라서

$\mathrm{V}(X)+\mathrm{E}(Y)=\frac{2}{9}n+15-\frac{1}{3}n=15-\frac{1}{9}n$

이므로

$15-\frac{1}{9}n=12$, $\frac{1}{9}n=3$ $\quad\therefore\ n=27$

27. [출제 의도] 정규분포의 표준화를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

임의로 선택한 웨이퍼 한 장에서 정상적인 칩이 생산된 부분의 넓이를 확률변수 X라 하자.
X는 정규분포 $\mathrm{N}(720,\sigma^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-720}{\sigma}$이다. 문제의 조건에 의하여

$\mathrm{P}(X<650)=0.02$

$\Rightarrow\ \mathrm{P}\left(Z<\frac{650-720}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z<-\frac{70}{\sigma}\right)=0.02$

정규분포곡선의 성질에 의하여

$\mathrm{P}\left(Z<-\frac{70}{\sigma}\right)=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{70}{\sigma}\right)$

이므로 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{70}{\sigma}\right)=0.48$

$\therefore\ \frac{70}{\sigma}=2$, $\sigma=35$

28. [출제 의도] 조합을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

두 학생이 받은 공의 개수를 다음과 같다고 하자.

학생 A: 흰 공 a개, 검은 공 b개
학생 B: 흰 공 p개, 검은 공 q개

학생 A가 받은 흰 공의 개수가 학생 B가 받은 검은 공의 개수보다 많은 경우의 수는
$0\le q<a\le6$인 경우의 수와 같다.
(a와 q의 값이 정해지면 b, p의 값도 정해진다.)

이러한 경우의 수는 0 이상 6 이하의 정수 중에서 2개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

${}_7\mathrm{C}_2=21$ ⋯ ①

학생 A가 받은 흰 공의 개수가 학생 B가 받은 검은 공의 개수보다 많고,
학생 B가 받은 검은 공의 개수가 학생 A가 받은 검은 공의 개수보다 많은 경우의 수는
$0\le b<q<a\le6$인 경우의 수와 같다.
이때 $b+q=6$이고 $q<a\le6$이므로
$q=4$ 또는 $q=5$이다.

(i) $q=4$인 경우 $(b,a)=(2,5),(2,6)$
(ii) $q=5$인 경우 $(b,a)=(1,6)$

따라서 이러한 경우의 수는 3 ⋯ ②

①, ②와 조건부확률의 정의에 의하여 구하는 확률은

$\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$이다.

29. [출제 의도] 연속확률변수에 대한 확률밀도함수의 성질을 이해하고 있는가?

연속확률변수의 성질에 의하여 $0\le x\le3$에서
함수 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이
함수 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이
모두 1이다.

따라서 $\int_0^3\{f(x)-g(x)\}dx=0$이다.

함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프에서
$y\ge0$인 부분과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

이므로, $y<0$인 부분과 x축으로 둘러싸인 부분의

넓이 또한 $\frac{1}{2}$이다. 따라서

$(2+1)\times(-k)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ k=-\frac{1}{3}$ ⋯ ①

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le1\right)=\frac{1}{8}$이고,

주어진 그래프에서 함수 $y=f(x)-g(x)$의

그래프에서 $\frac{1}{2}\le x\le1$인 부분과 x축으로 둘러싸인

부분의 넓이도 $\frac{1}{8}$이므로 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le Y\le1\right)=0$이다.

즉, $\frac{1}{2}\le x\le1$에서 $g(x)=0$이다. ⋯ ②

$\mathrm{P}(0\le Y\le1)=\frac{1}{2}$이고, $0\le x\le1$에서

함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인

부분의 넓이는 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\mathrm{P}(0 \le X \le 1) - \mathrm{P}(0 \le Y \le 1) = \frac{1}{2}$$

$\therefore \mathrm{P}(0 \le X \le 1) = 1$

이로부터 $1 \le x \le 3$ 에서 $f(x) = 0$ 이고,
이 구간에서 $f(x) - g(x) = -g(x)$ 이다. … ③

①, ②, ③에 의하여

$\mathrm{P}\left(-2k \le Y \le \frac{7}{3}\right)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{2}{3} \le Y \le \frac{7}{3}\right)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{2}{3} \le Y \le 1\right) + \mathrm{P}\left(1 \le Y \le \frac{7}{3}\right)$

$= \mathrm{P}(1 \le Y \le 2) + \mathrm{P}\left(2 \le Y \le \frac{7}{3}\right)$

$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$

$\therefore p + q = 18 + 5 = 23$

30. [출제 의도] 중복조합과 중복순열을 활용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

(i) $g(5) = a$, $g(6) = b$ 라 하자.
$g(4) = 3$ 이므로 문제의 조건에 의하여

$$f(b) \le f(a) \le f(g(4)) = 1$$

이다. 따라서 가능한 경우는
$f(a) = f(b) = 0$ / $f(a) = 1$, $f(b) = 0$ /
$f(a) = f(b) = 1$ 인 경우뿐이다.
$f(x) = 1$ 을 만족시키는 $x \in X$ 의 개수는 2 이고,
$f(x) = 0$ 을 만족시키는 $x \in X$ 의 개수는 1 이므로
가능한 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$1 + 2 + 2^2 = 7$$

(ii) $g(1) = p$, $g(2) = q$, $g(3) = r$ 라 하자.
$g(4) = 3$ 이므로 문제의 조건에 의하여

$$f(g(4)) = 1 \le f(r) \le f(q) \le f(p)$$

이다. 이때
$f(x) = 1$ 을 만족시키는 $x \in X$ 의 개수는 2,
$f(x) = 4$ 를 만족시키는 $x \in X$ 의 개수는 2,
$f(x) = 9$ 를 만족시키는 $x \in X$ 의 개수는 1
이므로 $f(p)$, $f(q)$, $f(r)$ 을 1, 4, 9 중에서
중복을 허락하여 3개를 선택하되, p, q, r 중에서
$f(x) = 9$ 인 x 의 개수를 기준으로 p, q, r 을 정하면
된다.
p, q, r 중에서 $f(x) = 9$ 인 x 의 개수가 각각
다음과 같은 경우 순서쌍 (p, q, r) 의 개수는

- 0 인 경우: ${}_2\mathrm{H}_3 \times 2^3 = 32$
- 1 인 경우: ${}_2\mathrm{H}_2 \times 2^2 = 12$
- 2 인 경우: ${}_2\mathrm{H}_1 \times 2^1 = 4$
- 3 인 경우: 1

이다. 따라서 가능한 순서쌍 (p, q, r) 의 개수는

$$32 + 12 + 4 + 1 = 49$$

(i), (ii)에서 문제의 조건을 만족시키는 함수 g 의 개수는 $7 \times 49 = 343$ 이다.

미 적 분 (23 ~ 30)

23. [출제 의도] 몫의 미분법을 이용하여 도함수를 구할 수 있는가?

$f'(x) = -\frac{(2-\cos x)'}{(2-\cos x)^2} = -\frac{\sin x}{(2-\cos x)^2}$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{9} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

24. [출제 의도] 수렴하는 급수의 성질을 이해하고 있는가?

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{2n}{n+1}\right)$ 가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{2n}{n+1}\right) = 0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 2$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = -2$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}(2a_n - b_n) = 3$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(-2a_n + b_n) + \lim_{n\to\infty} 2a_n = -3 + (-4) = -7$$

25. [출제 의도] 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e = 1$ 이므로

$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = -\frac{1}{3}$ 이다.

한편 $e^x = t$ 라 두면 $e^x dx = dt$ 이므로

$dx = \frac{1}{t}dt$ 이고,

x : 0 ~ 1 이면 t : 1 ~ e 이므로

$$\therefore \int_0^1 f(e^x)dx = \int_1^e \frac{f(t)}{t}dt = -\frac{1}{3}$$

26. [출제 의도] 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

주어진 방정식의 양변을 x 에 대해 미분하면

$2y + k + 2xy' = (2x - y')\cos(x^2 - y + 1)$

문제의 조건에서 양변에 $x = 0$, $y = 1$ 을 대입했을 때 $y' = 0$ 이므로

$2 + k = 0 \quad \therefore k = -2$

27. [출제 의도] 미분법을 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

곡선 $y = f(x)$ 는 y 축에 대해 대칭이므로 두 점 A, B 의 좌표를 각각 $(-x, 0)$, $(x, 0)$ 이라 둘 수 있다. $(x > 0)$

$\overline{\mathrm{CD}} = 2x$, $\overline{\mathrm{AC}} = f(x) = 4e^{-x^2}$ 이므로
직사각형 ACDB 의 대각선의 길이를 $g(x)$ 라 하면
$\{g(x)\}^2 = \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = 4x^2 + 16e^{-2x^2}$
$g(x) > 0$ 이므로 $\{g(x)\}^2$ 이 최솟값을 가질 때 $g(x)$ 도 최소가 된다.

$$\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2 = 8x - 64xe^{-2x^2} = 8x\left(1 - 8e^{-2x^2}\right)$$

$x > 0$ 이므로 위의 값이 0 이 되는 x 의 값은
단 하나뿐이고, 그 x 의 값을 p 라 하면
$e^{-2p^2} = \frac{1}{8}$ 이다.

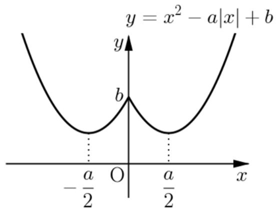
또한, $x = p$ 좌우에서 $\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2$ 의 부호가 음에서 양으로 변하므로 $x = p$ 에서 극솟값을 갖는다.
$g(x)$ 는 $x = p$ 에서 최솟값을 갖는다.
따라서 이때 t 의 값은

$f(p) = 4e^{-p^2} = 4\sqrt{e^{-2p^2}} = \sqrt{2}$

28. [출제 의도] 합성함수의 극대, 극소를 판정할 수 있는가?

$a > 0$, $b > 0$ 이므로 함수 $y = x^2 - ax + b$ 는
y 축보다 오른쪽에 있는 축을 가지면서 y 절편은
0 보다 크다.

또한 함수 $y = x^2 - a|x| + b = |x|^2 - a|x| + b$ 은
곡선 $y = x^2 - ax + b$ 에서 $x \ge 0$ 인 부분을 그리고,
y 축 대칭을 통해 $x < 0$ 인 부분을 그린 것을
그래프로 갖는 함수이다.



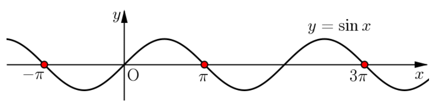
따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값을 가지고,
$x = \pm\frac{a}{2}$ 에서 극솟값을 가진다.

(1) $f(x)$ 가 극댓값을 갖는 경우 $(x = 0)$

$x = 0$ 의 좌우에서 부호 변화는 표와 같다.
(단 $a-$ /$a+$ 는 각각 a 보다 약간 작은 수/큰 수)

x	$0-$	0	$0+$
$x^2 - a\|x\| + b$	$b-$	b	$b-$
$f(x)$	e^b-	e^b	e^b-
$g(x)$	$\sin(\pi e^b -)$	$\sin(\pi e^b)$	$\sin(\pi e^b -)$

문제의 조건에서 $\sin(\pi e^b) = 0$ 이고,
$g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 극솟값을 가져야 하므로
$\sin(\pi e^b -) > \sin(\pi e^b) = 0$ 이어야 한다.



$y = \sin x$ 의 그래프에서 $\pi e^b = m\pi$ (m : 홀수)
$\Rightarrow e^b = m$ (m : 홀수)임을 알 수 있다.

이때 $b > 0 \Rightarrow m > 1$ 이므로 e^b 의 최솟값은 3 이다.
따라서 b 의 최솟값은 $\ln 3$ 이다. … ①

(2) $f(x)$ 가 극솟값을 갖는 경우 $\left(x = \pm\frac{a}{2}\right)$

$x = \pm\frac{a}{2}$ 의 좌우에서 각각 $y = x^2 - a|x| + b$ 의 값의 변화가 동일하므로 $x = \frac{a}{2}$ 에서만 확인해도 충분하다.

$x = \frac{a}{2}$ 의 좌우에서 부호 변화는 표와 같다.

x	$\frac{a}{2}-$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}+$
$x^2 - a\|x\| + b$	$c+$	c	$c+$
$f(x)$	e^c+	e^c	e^c+
$g(x)$	$\sin(\pi e^c +)$	$\sin(\pi e^c)$	$\sin(\pi e^c +)$

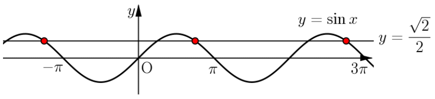
(단, $c = b - \frac{a^2}{4}$)

이때 문제의 조건에 의하여

문제의 조건에서 $\sin(\pi e^{c}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이고,

$g(x)$가 $x = \dfrac{a}{2}$ 에서 극댓값을 가져야 하므로

$\sin(\pi e^{c}+) < \sin(\pi e^{c})$ 이다.



$y = \sin x$ 의 그래프에서

$\pi e^{c} = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi$ (n : 정수)

$\Rightarrow\ e^{c} = \dfrac{3}{4} + 2n$

a의 값이 작아질수록 c의 값이 커지고,

①에서 $0 < e^{c} < e^{b} = 3$ 이므로

$e^{c} = \dfrac{3}{4} + 2 = \dfrac{11}{4}$ 일 때 a가 최소가 된다.

$e^{\ln 3 - \frac{a^2}{4}} = \dfrac{11}{4}$ 에서

$e^{-\frac{a^2}{4}} = \dfrac{11}{12}\ \Rightarrow\ -\dfrac{a^2}{4} = \ln\dfrac{11}{12}$

$\therefore\ a = 2\sqrt{\ln\dfrac{12}{11}}\ \cdots$ ②

따라서 ①, ②에 의하여 $a+b$의 최솟값은

$$2\sqrt{\ln\frac{12}{11}} + \ln 3$$

29. [출제 의도] 등비수열과 등비급수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} < a_1$ 에서 $\dfrac{a_1 r}{1-r} < a_1$ 이다.

$r \neq 0$ 이고 $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n\right|$ 의 값이 자연수이므로 $a_1 \neq 0$ 이다.

이에 a_1의 부호에 따라 나누어 생각한다.

(1) $a_1 > 0$ 인 경우

$\dfrac{r}{1-r} < 1$ 에서 $r < 1-r$, $r < \dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - r|a_n|) = -\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$

에서

(i) $0 < r < \dfrac{1}{2}$ 인 경우

$r|a_n| = a_{n+1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - r|a_n|) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(a_1 - a_{n+1}) = a_1$$

이다. 따라서

$$a_1 = -\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = -\frac{5}{2}\times\frac{a_1 r}{1-r^2}$$

좌변은 양수, 우변은 음수이므로 문제의 조건을 만족시키는 r의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $-1 < r < 0$ 인 경우

$r|a_n| = -|ra_n| = -|a_{n+1}|$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - r|a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_{n+1}|)$$

$a_1 > 0$, $r < 0$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r},\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}| = \frac{|a_2|}{1-|r|} = \frac{-a_1 r}{1+r}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - r|a_n|) = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1 r}{1+r}$$

즉, $\dfrac{a_1}{1-r} - \dfrac{a_1 r}{1+r} = -\dfrac{5}{2}\times\dfrac{a_1 r}{1-r^2}$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{1-r} - \dfrac{r}{1+r} = -\dfrac{5}{2}\times\dfrac{r}{1-r^2}$

$\Rightarrow\ \dfrac{1+r^2}{1-r^2} = -\dfrac{5}{2}\times\dfrac{r}{1-r^2}$

$\Rightarrow\ r^2 + 1 = -\dfrac{5}{2}r$,

$2r^2 + 5r + 2 = 0$, $(2r+1)(r+2) = 0$

$-1 < r < 0$ 에서 $r = -\dfrac{1}{2}$ 이다.

(2) $a_1 < 0$ 인 경우

$\dfrac{r}{1-r} > 1$ 에서 $r > 1-r$, $r > \dfrac{1}{2}$

$r > 0$ 이므로 $r|a_n| = |ra_n| = |a_{n+1}|$ 이고,

$a_1 < 0$, $r > 0$ 이므로 $|a_{n+1}| = -a_{n+1}$이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - r|a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1}) = \frac{a_1}{1-r} + \frac{a_1 r}{1-r} = \frac{a_1(1+r)}{1-r}$$

이므로

$\dfrac{a_1(1+r)}{1-r} = -\dfrac{5}{2}\times\dfrac{a_1 r}{1-r^2}$

$(1+r)^2 = -\dfrac{5}{2}r$, $2r^2 + 9r + 2 = 0$

$r = \dfrac{-9 \pm \sqrt{65}}{2}$ 에서

$r > \dfrac{1}{2}$ 인 r의 값은 존재하지 않는다.

(1), (2)에서 $a_1 > 0$, $r = -\dfrac{1}{2}$ 이다.

$$\left|\sum_{n=1}^{4} a_n\right| = \left|a_1 - \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{8}a_1\right| = \frac{5}{8}a_1$$

이고 이 값이 자연수이므로

$|a_1| = a_1$ 은 $\dfrac{5}{8}a_1 = 1$ 인 경우 최솟값을 갖는다.

따라서 $|a_1| = a_1$ 의 최솟값은 $\dfrac{8}{5}$ 이다.

$\therefore\ 25k = 40$

30. [출제 의도] 여러 가지 함수의 미분법과 적분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

주어진 등식의 양변을 정리하면

$$\int_a^x \{f(t) - (bt^2+1)\}dt = g(x) - x\ \cdots\ \text{(i)}$$

방정식 $g(x) - x = 0$ 의 실근을 $x = \alpha$ 라 하면

역함수의 성질에 의하여

$g(\alpha^3 + \alpha) = \alpha = \alpha^3 + \alpha$, $\alpha = 0$

따라서 방정식 $g(x) - x = 0$ 은 $x = 0$ 만을 실근으로 갖는다.

(*)의 양변에서 좌변은 $x = a$ 일 때 0이 되므로 $a = 0$ 이다.

함수 $y = x^3 + x$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 모든 점에서의 미분계수가 0보다 크므로 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i)의 양변을 미분하면

$f(x) - (bx^2+1) = g'(x) - 1$

$\Rightarrow\ f(x) - bx^2 - 1 = g'(x) - 1\ \cdots$ (ii)

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(0) = \frac{1}{(g^{-1})'(g(0))} = \frac{1}{3\times 0^2 + 1} = 1$$

이므로

(ii)의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $f(0) = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - 1}{x^2} = -\frac{3}{2}$ 이고,

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-bx^2}{x^2} = -b$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x) - 1}{x^2} \overset{x = g^{-1}(t)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{g'(g^{-1}(t)) - 1}{(g^{-1}(t))^2}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1}{(g^{-1})'(t)} - 1}{(g^{-1}(t))^2}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1}{3t^2+1} - 1}{(t^3+t)^2}\quad (\because\ g^{-1}(t) = t^3 + t)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1 - (3t^2+1)}{t^2(t^2+1)^2(3t^2+1)} = -3$$

이므로 (ii)에 의하여

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - bx^2 - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{g'(x) - 1}{x^2}$

$\Rightarrow\ -\dfrac{3}{2} - b = -3\quad \therefore\ b = \dfrac{3}{2}$

한편 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = F(x)$ 라 하면

$$F(x) = g(x) - x + \int_0^x\left(\frac{3}{2}t^2 + 1\right)dt = g(x) + \frac{1}{2}x^3$$

이다. $\cdots$ (iii)

또한 부분적분법에 의하여

$$\int_0^2 xf(x)dx = [xF(x)]_0^2 - \int_0^2 F(x)dx = 2F(2) - \int_0^2 F(x)dx$$

$g(2) = k$ 라 두면 $k^3 + k = 2$ 이므로 $k = 1$

(iii)에 의하여

$$F(2) = 1 + 4 = 5$$

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^1 g(t^3+t)\times(3t^2+1)dt = \int_0^1(3t^3+t)dt = \frac{5}{4}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x^3 dx = \left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^2 = 2$$

이므로 $\displaystyle\int_0^2 F(x)dx = \frac{5}{4} + 2 = \frac{13}{4}$

$\therefore\ \displaystyle\int_0^2 xf(x)dx = 2\times 5 - \frac{13}{4} = \frac{27}{4}$, $p + q = 31$

기 하 (23 ~ 30)

23. [출제 의도] 선분의 중점의 좌표를 구할 수 있는가?

$\frac{-1+k}{2}=0$ 에서 $k-1=0$ 이므로 $k=1$

24. [출제 의도] 포물선의 준선의 뜻을 이해하고 있는가?

$y^2=4px-3$ 에서 $y^2=4p\left(x-\frac{3}{4p}\right)$

이는 포물선 $y^2=4px$ 를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{4p}$ 만큼 평행이동한 것이므로

준선의 방정식은 $x=-p+\frac{3}{4p}$

문제의 조건에서 $-p+\frac{3}{4p}=1$ 이고,

$4p^2+4p-3=0$, $(2p+3)(2p-1)=0$

$p>0$ 이므로 $\therefore\ p=\frac{1}{2}$

25. [출제 의도] 내적의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 내적의 정의에 의하여

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$

코사인법칙과 문제의 조건에 의하여

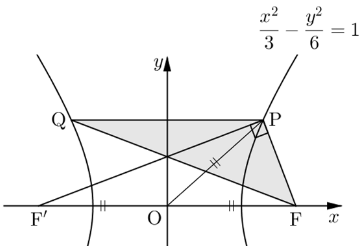
$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$|\overrightarrow{PQ}|^2=4^2+4^2-2\times\frac{3}{2}|\overrightarrow{PQ}|^2$

$\Rightarrow\ 4|\overrightarrow{PQ}|^2=32 \quad \therefore\ |\overrightarrow{PQ}|=\overline{PQ}=2\sqrt{2}$

26. 쌍곡선과 도형의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

그림과 같이 쌍곡선의 F 가 아닌 초점을 F′ 이라 하자. 그러면 $\overline{OP}=\overline{OF}=\overline{OF'}$ 이므로 외심의 성질에 의하여 $\triangle PFF'$ 은 $\angle P=90°$ 인 직각삼각형이다.



$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$ 라 하자.

쌍곡선의 정의에서 $b-a=2\sqrt{3}$ … ①

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{FF'}^2=a^2+b^2$, $a^2+b^2=36$ … ②

①, ②를 연립하면 $ab=12$

점 P 에서 x 축으로 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{PF}\times\overline{PF'}=\overline{FF'}\times\overline{PH}$

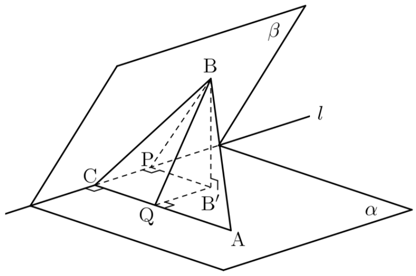
$\Rightarrow\ 6\overline{PH}=ab$, $\overline{PH}=2$

삼각형 OPH 에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{PQ}=2\overline{OH}=2\sqrt{5}$

27. [출제 의도] 삼수선의 정리를 이용하여 이면각의 크기를 구할 수 있는가?



그림과 같이 점 B 에서 평면 α 로 내린 수선의 발을 B′ 이라 하고, 점 B′ 에서 직선 l 과 선분 AC 로 내린 수선의 발을 각각 P, Q 라 하자. 그러면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{B'P}\perp l$, $\overline{AC}\perp\overline{B'Q}$ 이다.

$\overline{B'P}=a$ 라 하면 $\overline{CQ}=a$, $\overline{AQ}=5-a$ 이고,

삼각형 ABC 에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BQ}^2=\overline{BC}^2-\overline{CQ}^2=\overline{AB}^2-\overline{AQ}^2$

$\Rightarrow\ 6^2-a^2=5^2-(5-a)^2$

$\Rightarrow\ 36-a^2=10a-a^2$, $a=\frac{18}{5}$

또한 $\overline{BQ}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CQ}^2}=\sqrt{6^2-\left(\frac{18}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$

문제의 조건에서 $\angle BPB'=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$\overline{BB'}=\overline{B'P}=\frac{18}{5}$

$\therefore\ \overline{B'Q}=\sqrt{\overline{BQ}^2-\overline{BB'}^2}=\frac{6\sqrt{7}}{5}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{B'Q}}{\overline{BQ}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

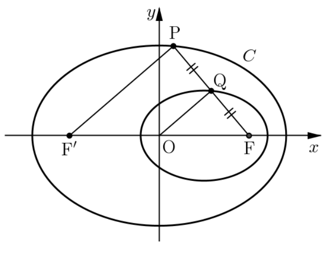
28. [출제 의도] 타원의 접선의 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\overline{OA}=\overline{FA}$ 이므로 점 A 의 x 좌표는 점 F 의 x 좌표의 절반이다.

$c=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$ 이므로 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ k\right)$ 라 하면

문제의 조건에서 $k>0$ 이고,

$\frac{1}{8}+\frac{k^2}{2}=1$, $k^2=\frac{7}{4}$, $k=\frac{\sqrt{7}}{2}$



타원 C 의 F 가 아닌 다른 초점을 F′이라 하면

$\overline{OF}=\overline{OF'}$, $\overline{PQ}=\overline{FQ}$ 이므로

$\triangle OFQ \backsim \triangle F'FP$ 이고, 닮음비는 $1:2$ 이다.

$\overline{PF}+\overline{PF'}=4$ 이므로 $\overline{QO}+\overline{QF}=2$ 이다.

따라서 점 Q 가 그리는 도형은 두 점 O, F 를 초점으로 하고 장축의 길이가 2 인 타원이다.

$\overline{OF}=\sqrt{2}$ 이므로 점 Q 가 그리는 도형 C' 은

타원 $x^2+2y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 만큼 평행이동한 타원이다.

$Q(a,\ b)$ 라 하면

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\cdot(a,\ b)=\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{7}}{2}b$

이다. $\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{7}}{2}b=t$ 라 하면

$b=-\sqrt{\frac{2}{7}}a+\frac{2}{\sqrt{7}}t$ 이다.

t 가 최대가 되려면 타원 C' 이 직선

$y=-\sqrt{\frac{2}{7}}x+\frac{2}{\sqrt{7}}t$ 과 만날 때 y 절편의 최댓값을 구하면 된다.

y 절편이 최대가 되는 경우는

직선 $y=-\sqrt{\frac{2}{7}}x+\frac{2}{\sqrt{7}}t$ 이 타원 C' 에 접하고 y 절편이 양수가 되는 경우이다.

타원 $x^2+2y^2=1$ 에 접하고 기울기가 $-\sqrt{\frac{2}{7}}$ 인 직선의 방정식은

$y=-\sqrt{\frac{2}{7}}x\pm\sqrt{1\times\frac{2}{7}+\frac{1}{2}}=-\sqrt{\frac{2}{7}}x\pm\sqrt{\frac{11}{14}}$

따라서 타원 C' 에 접하고 기울기가 $-\sqrt{\frac{2}{7}}$ 인 직선의 방정식은

$y=-\sqrt{\frac{2}{7}}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pm\sqrt{\frac{11}{14}}$

$\quad=-\sqrt{\frac{2}{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\pm\sqrt{\frac{11}{14}}$

따라서 $\frac{2}{\sqrt{7}}t=\frac{1}{\sqrt{7}}+\sqrt{\frac{11}{14}}$, $t=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{22}}{4}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값은 $\frac{2+\sqrt{22}}{4}$ 이다.

29. [출제 의도] 도형의 방정식을 이용하여 벡터의 크기의 최댓값, 최솟값을 구할 수 있는가?

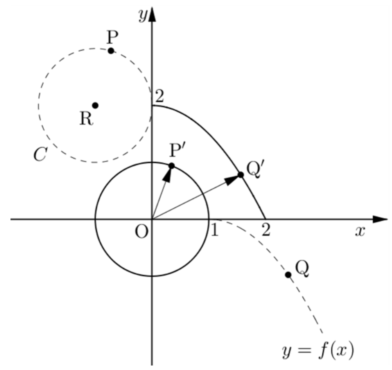
원 C 의 중심을 R 이라 하자. 그러면 R 의 좌표는 $(-1,\ 2)$ 이고,

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{OQ}$

이다. 이때 $\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ'}$ 라 하면 점 Q′ 은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 $\overrightarrow{OR}$ 방향으로 평행이동한 함수의 그래프 위의 점이다.

즉, 점 Q′ 은 함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+2\ (0\le x\le 2)$ 의 그래프 위의 점이다.

$\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{OP'}$ 이라 하면 점 P′ 은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1 인 원 위의 점이다.



$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}|$ 에서

두 벡터 $\overrightarrow{OP'}$ 과 $\overrightarrow{OQ'}$ 이 이루는 각의 크기를

$\theta\ (0\le\theta\le\pi)$ 라 하면

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ'}} \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|\cos\theta+1 \quad \cdots ① \\
&= (|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|+\cos\theta)^2+1-\cos^2\theta \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

이고, 각각의 $\mathrm{Q'}$에 대하여 θ의 값은 자유롭게 정할 수 있으므로(점 $\mathrm{P'}$이 원 위의 점이기 때문)

$|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$가 최대가 되는 경우는 ①에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$가 최대이고, $\theta=0$인 경우이고,

(즉, $|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|+1$)

$|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$가 최소가 되는 경우는 ②에서

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|>1 \Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|+\cos\theta>0$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$가 최소이고, $\theta=\pi$인 경우이다.

(즉, $|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|-1$)

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|=t$라 하고, 점 $\mathrm{Q'}$의 좌표를 (x, y)라 두면 연립방정식

$$
\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x^2+2 \\ x^2+y^2=t^2 \end{cases}
$$

은 $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$인 범위에서 해를 가져야 한다. 이를 연립하여 풀면

$x^2=-2y+4$

$\Rightarrow\ y^2-2y+4-t^2=0$

$g(y)=y^2-2y+4-t^2=(y-1)^2+3-t^2$

이라 하면 $g(0)=g(2)=4-t^2$이고

$g(y)$는 $y=1$일 때 최솟값 $3-t^2$을 가지므로

$4-t^2\ge 0,\ 3-t^2\le 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{3}\le t\le 2 \quad (\because\ t>0)$

(i) $|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$가 최대가 되는 경우

$|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|+1\le 2+1=3$

(ii) $|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$가 최소가 되는 경우

$|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|-1\ge\sqrt{3}-1$

(i), (ii)에서

$\therefore\ (M+3m)^2=(3+3\sqrt{3}-3)^2=27$

30. [출제 의도] 구의 방정식을 이용하여 도형의 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

구 S의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\sqrt{2})^2=4$

이므로 구 S와 xy평면과 만나서 생기는 도형은

원 $C: (x-1)^2+(y-1)^2=2$이다.

구 S에서 $z\ge 0$인 부분을 xy평면에 평행한 평면으로 잘라 생기는 단면(원) 중에서는 반지름의 길이가 2인 대원(구와 반지름이 같은 원)이 존재한다.

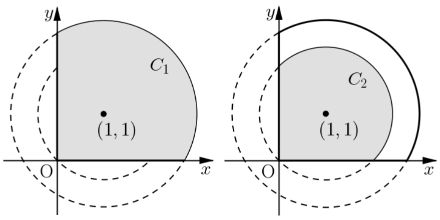
즉, 도형 C_1 위의 임의의 점을 xy평면에 내린 수선의 발은 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$의 내부에서 $x\ge 0$, $y\ge 0$인 부분에 속한다.

따라서 도형 C_1의 xy평면 위로의 정사영은 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$의 내부 중에서 $x\ge 0$, $y\ge 0$인 부분이다.

한편, 구 S에서 $z\le 0$인 부분을 xy평면에 평행한 평면으로 잘라 생기는 단면(원) 중에서 가장 반지름이 큰 것은 원 C이고, 도형 C_2 위의 임의의 점을 xy평면에 내린 수선의 발은 원 C의 내부 중에서 $x\ge 0$, $y\ge 0$인 부분에 속한다.

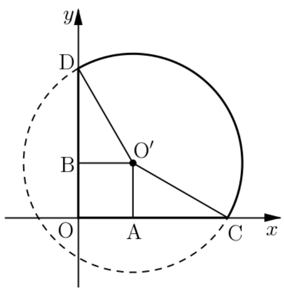
따라서 도형 C_2의 xy평면 위로의 정사영은 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$의 내부 중에서 $x\ge 0$, $y\ge 0$인 부분이다.

두 도형 C_1, C_2의 xy평면 위로의 정사영을 나타낸 그림은 다음과 같다.



xy평면 위의 점 $\mathrm{O'}(1, 1)$에 대하여 점 $\mathrm{O'}$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하고, 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자.

$\overline{\mathrm{O'A}}=\overline{\mathrm{O'B}}=1$, $\overline{\mathrm{O'C}}=\overline{\mathrm{O'D}}=2$이므로



$\angle\mathrm{AO'C}=\angle\mathrm{BO'D}=\dfrac{\pi}{3}$이다.

따라서 $\angle\mathrm{CO'D}=2\pi-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5\pi}{6}$

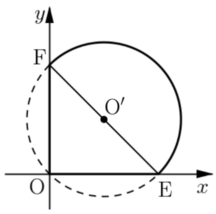
$$
\begin{aligned}
\therefore\ k_1 &= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{5\pi}{6} \\
&= 1+\sqrt{3}+\frac{5\pi}{3}
\end{aligned}
$$

한편, 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 E, F라 하자.

$\angle\mathrm{EOF}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{EF}}$는 이 원의 지름이다.

$\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{OF}}=2$이므로

$\therefore\ k_2=\dfrac{1}{2}\times 2^2+\dfrac{1}{2}\pi\times\sqrt{2}^2=2+\pi$



$$
\begin{aligned}
\therefore\ 2k_1-k_2 &= \left(2+2\sqrt{3}+\frac{10\pi}{3}\right)-(\pi+2) \\
&= 2\sqrt{3}+\frac{7}{3}\pi
\end{aligned}
$$

$\therefore\ 12ab=12\times 2\times\dfrac{7}{3}=56$