해설

21.

[정답] 20

[출제 의도] 극한으로 정의된 부등식을 이용하여 사차함수의 개형을 추론한다.

주어진 부등식 $f(x) < \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-f(x)}$이 성립하기 위한 조건은

(가) $f(x)\neq x$일 때 $f(x)<0$

(나) $f(x)=x$일 때 $f(x)<f'(x)$, 즉 $f'(x)>x$이다.

만일 $f(x)<0$인 구간이 존재한다면, (가)에 의해 부등식 $f(x) < \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-f(x)}$를 만족하는 실수 x의 개수가 무수히 많다.

$\Rightarrow$ 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다. …… ㉠

이는 곧 $x=0$에서 함수 $f(x)$의 부호 변화가 없어야 한다는 뜻이므로, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축에 접한다.

$\Rightarrow f'(0)=0$

0과 1은 $f(x)=x$의 실근이다. 또한 ㉠에 의해 $\alpha<0$일 수 없다.

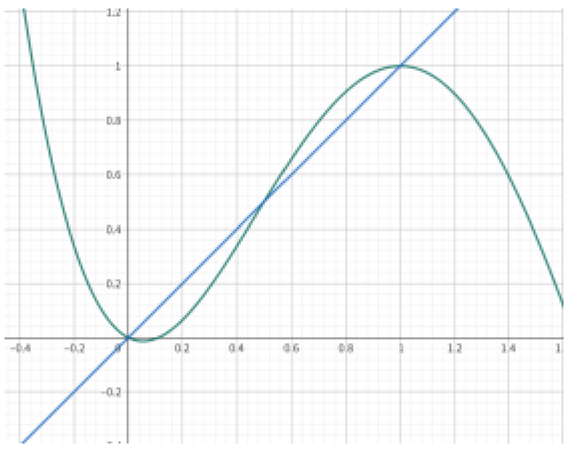
한편 $x=0$일 때 $f'(0)=0$이므로 $f'(x)>x$를 만족하지 않는다. 즉 $\alpha\neq 0$이다.

$\Rightarrow \alpha\geq 2$

$\alpha\neq 1$이므로, $x=1$에서 부등식이 성립하지 않아야 한다. 즉 $f'(1)\leq 1$이어야 한다. 다음과 같이 경우를 나누어 보자.

(i) $f'(1)<1$이면

함수 $f(x)$의 개형이 그림과 같다.



즉 $0<m<1$인 어떤 실수 m에 대하여 $f(m)=m$, $f'(m)>1$을 만족시키므로 $x=m$일 때 부등식을 만족시킨다. 이는 α가 정수라는 조건에 모순이다.

(ii) $f'(1)=1$이면

방정식 $f(x)=x$의 세 실근이 0, 1, α이므로, $f'(\alpha)>\alpha$를 만족시키는 경우 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x)$를 $f(x)=ax(x-1)^2(x-\alpha)+x$라 두자.

먼저 $f'(0)=0$에서 $a\times-\alpha=-1$, $a=\frac{1}{\alpha}$을 얻는다.

또한 $f'(\alpha)>\alpha$를 만족시켜야 하므로 $(\alpha-1)^2+1>\alpha$, $\alpha<1$ 또는 $\alpha>2$를 얻는다. 이중 $\alpha\geq 2$를 만족시키는 범위는 $\alpha>2$. … 1)

다음으로 함수 $f(x)$가 ㉠을 만족시켜야 한다.

$f(x)=\frac{1}{\alpha}x(x-1)^2(x-\alpha)+x$를 인수분해하면

$f(x)=\frac{1}{\alpha}x^2(x^2-(2+\alpha)x+1+2\alpha)$이고 함수 $x^2-(2+\alpha)+1+2\alpha$의 부호 변화가 없어야 하므로 판별식 $D=4+4\alpha+\alpha^2-4-4\alpha\leq 0$에서 $0\leq\alpha\leq 4$를 얻는다. … 2)

1), 2)에서 α의 범위는 $2<\alpha\leq 4$이다.

$f(4)$의 값은 $f(4)=\frac{144}{\alpha}-32$이다. 이 값은 $\alpha=3$일 때 16, 최솟값은 $\alpha=4$일 때 4. 모든 값의 합은 $16+4=20$이다.