2026학년도 원시인 모의고사 1회

정답 및 해설

1.

[정답] ①

2.

[정답] ③

3.

[정답] ③

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$a_3 = a_1 r^2 = 4a_1$ 대하여 $r = 2$

$\frac{a_4}{a_3} = a_3, r = a_1 r^2$

$a_1 = \frac{1}{2}, a_6 = a_1 r^5 = \frac{1}{2} \times 32 = 16$

4.

[정답] ④

5.

[정답] ④

6.

[정답] ①

$\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = -2$

$\sin^3\theta - \cos^3\theta = (\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7.

[정답] ②

8.

[정답] ①

$\frac{1}{2\log_3 x} + \frac{1}{2\log_8 x} + \frac{1}{2\log_{24} x} = \frac{1}{2}\log_x (24)^2$

$\log_x 24 = \frac{1}{\log_{24} x} = \frac{1}{\log_{6a} x}$

따라서 $6a = 24, a = 4$

9.

[정답] ②

$x = 1$일 때 $f(1) = 5a + 2$

이때 주어진 식의 양변을 미분하면

$xf'(x) + f(x) = 6x^2 + 2ax + f(x)$ 이다.

$xf'(x) = 6x^2 + 2ax$

$f(1) = \int_0^1 t^2 f'(t)dt = \int_0^1 (6x^3 + 2ax^2)dx = \left[\frac{3}{2}x^4 + \frac{2}{3}ax^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}a + \frac{3}{2}$

따라서 $f(1) = 5a + 2 = \frac{2}{3}a + \frac{3}{2}$

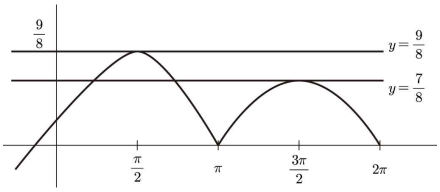
$\frac{13}{3}a = -\frac{1}{2}$ 이므로 $a = -\frac{3}{26}$

10.

[정답] ③

방정식 $\left|\sin x+\frac{1}{8}\right|=k\ (0\le x<2\pi)$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\left|\sin x+\frac{1}{8}\right|$와 함수 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

함수 $y=\left|\sin x+\frac{1}{8}\right|$의 그래프는 다음과 같다.



$f(k)=1$이 되도록 하는 k의 값은 $\frac{9}{8}$

$f(k)=3$이 되도록 하는 k의 값은 $\frac{7}{8}$이다.

즉 $k_1=\frac{9}{8}, k_2=\frac{7}{8}$이므로 $k_1+k_2=2$

11.

[정답] ①

점 P의 위치가 $x(t)=at^3+t^2+bt-1$이므로 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하자.

$v(t)=\frac{dx}{dt}=3at^2+2t+b$, $a(t)=\frac{dv}{dt}=6at+2$

$t=2$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로 점 P의 속도가 부호가 바뀌어야 한다. 즉 속도는 0이어야 하므로 $v(2)=12a+b+4=0$

$b=-12a-4$

또한 $t=1$에서의 가속도와 $t=3$에서의 가속도의 두 배이므로

$a(1)=\frac{dv}{dt}=6a+2$

$a(3)=18a+6$

$a(3)=2a(1)$ 이므로 $18a+6=12a+4$

따라서 $a=-\frac{1}{3}$이므로 $b=0$

따라서 $a+b$의 값은 $-\frac{1}{3}$

12.

[정답] ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$a_{k+1}=a_k+d$, $b_{k+1}=b_k\times r$

$a_k=b_k=k$에서 $k+d=kr$ 이므로 $r=1+\frac{d}{k}$이다. 따라서 d는 k의 배수다.

조건 (다)에서 $a_{k+6}=a_k+5d=k+5d$

$60<k+5d<100$을 만족하는 자연수 k는 5이다.

$12-\frac{k}{5}<d<20-\frac{k}{5}$에서 $k=5$이면

$11<d<19$ 이다.

이때 d는 5의 배수이므로 $d=15$

$d+r=19$

13.

[정답] ③

두 부분의 넓이를 각각 S_A, S_B라 하자.

$S_A-S_B=\int_0^3 f(x)dx$이다.

$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 x^2(x^2-(a+3)x+3a)dx$

$\int_0^3 (x^4-(a+3)x^3+3ax^2)dx$

$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{(a+3)}{4}x^4+ax^3\right]_0^3$

$=\frac{243}{5}-\frac{81(a+3)}{4}+27a$

$a=\frac{9}{5}$

14.

[정답] ④

$\angle BAD = \alpha$라 하자.

삼각형 ABD의 넓이는 $\sin\alpha \times 48 \times \frac{1}{2} = 6\sqrt{15}$

따라서 $\sin\alpha = \frac{6\sqrt{15}}{24}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

이때 α는 제 2사분면의 각이므로 $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$

따라서 코사인 법칙에 의하여

$\overline{BD}^2 = 144 + 16 - 2 \times 12 \times 4 \times \cos\alpha = 160 + 24 = 184$

따라서 $\overline{BD} = \sqrt{184} = 2\sqrt{46}$

$\angle BCD = \pi - \alpha$

따라서 BCD의 외접원의 반지름을 R이라 하자.

사인 법칙에 의해 $2R = \frac{2\sqrt{46}}{\sin(\pi - \alpha)}$

$R = \frac{\sqrt{46}}{\sin\alpha} = \sqrt{46} \times \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{46}}{\sqrt{15}}$

15.

[정답] ③.

$g(1) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = 5 = f(-1) + 3$

따라서 $g(1) = 5,\ f(-1) = 2$

함수 $g(x)$에 대하여 $g'(x) = \begin{cases} 3 & (x \le 1) \\ f'(x-2) & (x \ge 1) \end{cases}$

$\lim_{x > 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x-2) - 2}{x - 1} = f'(-1)$이므로$f'(-1) = 3$이다.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하자.

$f(-1) = a - b + c = 3$

$f'(-1) = -2a + b + 3 = 3$

$b = 2a$ 이므로 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax + c \cdots$ ㉠

ㄱ. $g'(1) = f'(-1) = 3$

ㄴ. $\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{3}{2}$

$g(0) = f(0) = 2$ 이다.

따라서 ㉠에 의해 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax + 2$

$x \le 1$에서 $g(x) - f(x) = 3x + 2 - (x^3 + ax^2 + 2ax + 2)$

$g(x) - f(x) = -x^3 - ax^2 - (2a-3)x$

$\lim_{x\to 0} \frac{-x^3 - ax^2 - (2a-3)x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 - ax - (2a-3)}{x} = -a$

이므로 $a = \frac{3}{2}$

$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2$

$g(4) = f(2) + 3 = 22$

ㄷ. $g(2) = 3$이면 $f(0) = 0$ 이므로

따라서 ㉠에 의해 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax$

$g'(3) = f'(1) = 3$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2a = 3 + 4a = 3$

$a = 0$ 이므로 $f(x) = x^3$

$g(x) = f(x-2) + 3 = (x-2)^3 + 3$

모든 실수 x에 대하여 $g'(x) = 3(x-1)^2 \ge 0$

$g(x)$는 증가함수이므로 극값이 존재하지 않는다.

16.

[정답] 6

17.

[정답] 46

18.

[정답] 26

19.

[정답] 10

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2kx^2+16kx+4$가 극값을 갖지 않기 위해서는

$f'(x) \geq 0, f'(x) \leq 0$이다. 따라서 $f'(x)=x^2+4kx+16k$의 해가 존재하지 않는 것을 보이면 충분하다.

따라서 $(2k)^2-16k=4k(k-4) \leq 0$

주어진 범위 내에서의 자연수 $k=1,2,3,4$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은 10

20.

[정답] 2

두 점 A, B의 x의 좌표를 $x_1, x_2\,(x_1<x_2)$라 하자.

$A\,(x_1, 2^{x_1}), B(x_2, 2^{x_2})$

$2^{x_1}=kx_1, 2^{x_2}=kx_2$

$\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{k(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=k$ 이므로 $2^{x_2}-2^{x_1}=k(x_2-x_1)$

$\overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(2^{x_2}-2^{x_1})^2=\{k^2+1\}(x_2-x_1)^2=4$

$k^2+1>0$ 이므로 $x_2-x_1=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$

$f(k)=\frac{x_2}{x_1}=2^{x_2-x_1}=2^{\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}}$

$f(\sqrt{3})=2^{\frac{2}{\sqrt{4}}}=2$

21.

[정답] 8

$f(2)>0$이면

$$\lim_{x\to 2+}\frac{|f(x)|-|f(2)|}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|f(x)|-|f(2)|}{x-2}\ \lim_{x\to 2+}\frac{|f(x)|-|f(2)|}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$=f'(2)$

$f(2)<0$이면

$$=-\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-f'(2)$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|f(x)|-|f(2)|}{x-2}=-\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

따라서 $\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)+2$이므로 $f(2)=0$ ……㉠

이때 $f'(2)>0$이면

$$\lim_{x\to 1+}\frac{|f(x)|-|f(2)|}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)}{x-2}=f'(2)$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|f(x)|-|f(2)|}{x-2}=-\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{x-2}=-f'(2)$$

$\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)+2$ 이므로 $f'(2)=1$

에서 $f'(1)=1$이어야 하고,

$f'(1)<0$이면

$$\lim_{x\to 2+}\frac{|f(x)|-|f(2)|}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)}{x-2}=-f'(2)$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|f(x)|-|f(2)|}{x-2}=-\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{x-2}=f'(2)$$

$\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)+2$ 이므로 $f'(2)=-1$

한편, 함수 $|(x+2)|f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능 하므로 $x=-2$에서 미분가능하다.

따라서 $f(-2)=0$이다. ……㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=a(x-2)(x+2)$

$f'(x)=2ax$

$f'(2)=1$ 이면 $a=\frac{1}{4}$

$f'(2)=-1$ 이면 $a=-\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{1}{4}(x-2)(x+2)$

$g(6)=\frac{|f(6)|}{4}=\frac{3}{2}$, $g(6)=8$

22.

[정답] 25

조건 (가)에 의해 $a_6\times a_7<0$이다.

$a_6>0$이라고 가정하자.

조건 (가)에 의해 7이상의 자연수 k에 대하여 $a_k<0$이다.

또한 $1\le k\le 6$인 자연수 k에 대하여 $|a_k|=a_k$이다.

$$\sum_{n=1}^{5}|a_{2n}|+|a_7|=|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_7|+|a_8|+|a_{10}|$$

$$\sum_{n=1}^{5}|a_{2n}|+|a_7|=2a_3+a_6-a_7-2a_9$$

$$\sum_{n=1}^{5}|a_{2n-1}|-1=|a_1|+|a_3|+|a_5|+|a_7|+|a_9|-1$$

$$\sum_{n=1}^{5}|a_{2n-1}|-1=2a_2+a_5-a_7-a_9-1$$

조건 (나)에 의하여 $\sum\limits_{n=1}^{5}|a_{2n}|+|a_7|=\sum\limits_{n=1}^{5}|a_{2n-1}|-1$ 이므로

$2a_3+a_6-a_7-2a_9=2a_2+a_5-a_7-a_9-1$ 이 성립한다.

$2a_3-2a_2-a_5+a_6-a_9=-a_1-5d=-a_6=-1$

따라서 $a_6=1$

$a_1=-16$ 이므로 $-16+5d=1$

따라서 $d=\frac{17}{5}$이므로 $a_7=\frac{22}{5}$이므로 모순이다.

따라서 $a_6<0$이다.

조건 (가)에 의해 7이상의 자연수 k에 대하여 $a_k>0$이다.

또한 $1\le k\le 6$인 자연수 k에 대하여 $|a_k|=-a_k$이다.

$$\sum_{n=1}^{5}|a_{2n}|+|a_7|=|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_7|+|a_8|+|a_{10}|$$

$$\sum_{n=1}^{5}|a_{2n}|+|a_7|=-2a_3-a_6+a_7+2a_9$$

$$\sum_{n=1}^{5}|a_{2n-1}|-1=|a_1|+|a_3|+|a_5|+|a_7|+|a_9|-1$$

$a_1-(a_1+2d)+(a_1+4d)-(a_1+5d)+(a_1+8d)=a_1+5d=a_6=-1$

$a_1=-16$이고 $a_6=a_1+5d=-1$이므로 $d=3$

$a_n=-16+3(n-1)=3n-19$

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=3\times\frac{110}{2}-190=-25\text{이다.}$$

따라서 $\left|\sum\limits_{k=1}^{10}a_k\right|=25$