

# 김 O 수 미적분 모의고사

## 4회 해설지

|            |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>1번</b>  | <b>2번</b>  | <b>3번</b>  | <b>4번</b>  | <b>5번</b>  |
| ②          | ⑤          | ②          | ③          | ③          |
| <b>6번</b>  | <b>7번</b>  | <b>8번</b>  | <b>9번</b>  | <b>10번</b> |
| ⑤          | ⑤          | ③          | ⑤          | ①          |
| <b>11번</b> | <b>12번</b> | <b>13번</b> | <b>14번</b> | <b>15번</b> |
| ②          | ④          | ②          | ②          | ④          |
| <b>16번</b> | <b>17번</b> | <b>18번</b> | <b>19번</b> | <b>20번</b> |
| 4          | 15         | 12         | 2          | 40         |
| <b>21번</b> | <b>22번</b> |            |            |            |
| 630        | 501        |            |            |            |

|            |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>23번</b> | <b>24번</b> | <b>25번</b> | <b>26번</b> | <b>27번</b> |
| ③          | ④          | ⑤          | ④          | ②          |
| <b>28번</b> | <b>29번</b> | <b>30번</b> |            |            |
| ③          | 37         | 9          |            |            |

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1.  $\sqrt[3]{32} \times 2^{-1}$ 의 값은? [2점]

- ①  $2^{\frac{1}{3}}$     ②  $2^{\frac{2}{3}}$     ③ 2    ④  $2^{\frac{4}{3}}$     ⑤  $2^{\frac{5}{3}}$

$$\sqrt[3]{32} \times 2^{-1} = 2^{\frac{5}{3}-1} = 2^{\frac{2}{3}}$$

2. 함수  $f(x) = 2x^3 - 5x$ 에 대하여  $f'(1)$ 의 값은? [2점]

- ① 5    ② 4    ③ 3    ④ 2    ⑤ 1

$$f'(x) = 6x^2 - 5, \quad f'(1) = 1$$

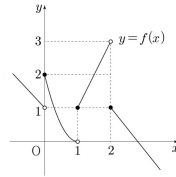
3.  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인  $\theta$ 에 대하여  $\frac{\tan \theta}{\sin \theta} = -3$ 일 때,  $\tan \theta$ 의 값은? [3점]

- ①  $-3\sqrt{2}$     ②  $-2\sqrt{2}$     ③  $-\sqrt{2}$   
④  $2\sqrt{2}$     ⑤  $3\sqrt{2}$

$$\frac{\tan \theta}{\sin \theta} = -3, \quad \frac{1}{\cos \theta} = -3, \quad \cos \theta = -\frac{1}{3} \text{ 이고 } \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ 이다.}$$

$$\left( \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 일 때 } \sin \theta > 0 \right) \therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -2\sqrt{2}$$

4. 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① 1    ② 2    ③ 3    ④ 4    ⑤ 5

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0+} f(X) = 2 \text{ 이므로}$$

구하는 답은 3이다.

5. 공차가 음수인 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 + a_4 = 12, \quad a_1 \times a_5 = 20$$

일 때,  $a_6$ 의 값은? [3점]

- ① 4      ② 2      ③ 0      ④ -2      ⑤ -4

$a_2 + a_4 = 12$ 에서  $a_3 = 6$ 이다. 공차를  $d$ 라 하면,  
 $a_1 \times a_5 = 20$ 에서  $(6-2d)(6+2d) = 20$ ,  $16 = 4d^2$ 에서  
 $d = -2$  ( $\because d < 0$ )

따라서 구하는 답은  $a_6 = a_3 + 3d = 0$ 이다.

6. 1이 아닌 양수  $k$ 가  $\log_{64} 3 \times \log_5 4 = \log_k 3$ 을 만족시킬 때,  $k$ 의 값은? [3점]

- ① 25      ② 50      ③ 75      ④ 100      ⑤ 125

$$\log_{64} 3 \times \log_5 4 = \log_{64} 4 \times \log_5 3 = \frac{1}{3} \times \log_5 3,$$

$$\frac{1}{3} \times \log_5 3 = \log_{125} 3 \text{이므로 } k = 125$$

7. 다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) + f(-x) = 0$ 을

만족시키고  $\int_{-1}^1 (x-2)f'(x)dx = 60$ 일 때,  $f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 15      ② 10      ③ -5      ④ -10      ⑤ -15

$f(x)$ 는 기함수이므로  $f'(x)$ 는 우함수,  $xf'(x)$ 는 기함수이다.

$$\int_{-1}^1 (x-2)f'(x)dx = \int_{-1}^1 xf'(x)dx - 2 \int_{-1}^1 f'(x)dx \text{에서}$$

$$\int_{-1}^1 xf'(x)dx = 0, \quad \int_{-1}^1 f'(x)dx = f(1) - f(-1) = 2f(1) \text{이므로}$$

$-4f(1) = 60$ 에서  $f(1) = -15$ 이다.

8. 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하자.  
자연수  $k$ 에 대하여

$$a_{k+1}=27, \quad a_{k+3}=3, \quad S_{k+4}=182$$

가 성립할 때,  $a_1-k$ 의 값은? [3점]

- ① 79      ② 240      ③ 241      ④ 726      ⑤ 727

1) 공차가 양수인 경우

$$a_{k+4}=1, \quad a_{k+3}=3, \quad a_{k+2}=9, \quad a_{k+1}=27, \quad a_k=81, \quad \dots$$

$k=1$ 인 경우  $S_{k+4}=121$ 이고  $k \geq 2$ 인 경우  $S_{k+4} > 182$ 이므로  
모순이다.

2) 공차가 음수인 경우

$$a_{k+4}=-1, \quad a_{k+3}=3, \quad a_{k+2}=-9, \quad a_{k+1}=27, \quad a_k=-81, \quad \dots$$

$k$ 가 홀수일 때  $S_{k+4} < 0$ 이고

$k$ 가 2보다 큰 짝수일 때  $S_{k+4} > 182$ 이다.

따라서  $k=2$ 일 때  $(-1)+3+(-9)+27+(-81)+243=182$ 로

‘딱’ 성립한다.  $\therefore k=2, a_1=243$ 이므로 답은 241이다.

9. 최고차항의 계수가 1인 이차함수  $f(x)$ 에 대하여 곡선  $y=f(x)$

위의 점  $(0, 0)$ 에서의 접선과 곡선  $y=(x^2-2x)f(x)$  위의 점  
 $(2, 0)$ 에서의 접선이 점  $(4, k)$ 에서 만난다. 상수  $k$ 에 대하여

$f\left(\frac{k}{8}\right)$ 의 값은? [4점]

- ① 4      ② 6      ③ 8      ④ 10      ⑤ 12

$f(0)=0$ 이고 점  $(0, 0)$ 에서의 접선이 점  $(4, k)$ 를 지나므로

$$f'(0)=\frac{k}{4} \text{ 이다. } \therefore f(x)=x^2+\frac{k}{4}x$$

곡선  $y=(x^2-2x)f(x)$  위의 점  $(2, 0)$ 에서의 접선이 점  $(4, k)$ 를  
지나므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-2x)f(x)-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} xf(x) = 2f(2) = \frac{k-0}{4-2} \text{ 이다.}$$

$$\therefore f(2)=\frac{k}{4} \text{ 이다.}$$

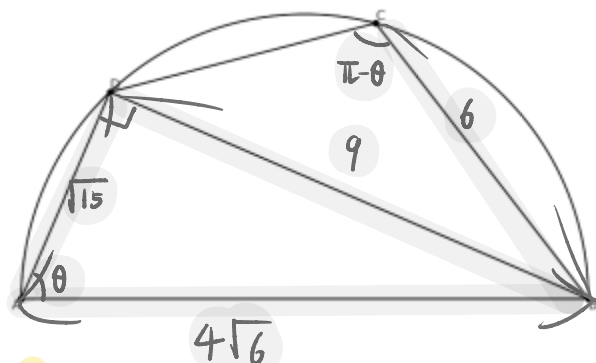
$$f(x)=x^2+\frac{k}{4}x, \quad f(2)=\frac{k}{4} \text{ 이므로 } 4+\frac{k}{2}=\frac{k}{4}, \quad k=-16 \text{ 이다.}$$

$$f(x)=x^2-4x \text{ 에서 } f\left(\frac{k}{8}\right)=f(-2)=12 \text{ 이다.}$$

10. 그림과 같이 선분  $AB$ 를 지름으로 하는 반원의 호  $AB$   
위의 두 점  $C, D$ 에 대하여

$$\overline{BC}=6, \quad \overline{AD}=\sqrt{15}, \quad \overline{BD}=9$$

일 때, 선분  $CD$ 의 길이는? [4점]



- ①  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$       ②  $\frac{4\sqrt{10}}{3}$       ③  $\frac{5\sqrt{10}}{4}$   
④  $\frac{3\sqrt{15}}{2}$       ⑤  $\frac{4\sqrt{15}}{3}$

<1> 정석풀이>

$$\overline{AD}=\sqrt{15}, \quad \overline{BD}=9 \text{ 에서 } \overline{AB}^2=15+81=96 \text{ 이므로 } \overline{AB}=4\sqrt{6}$$

이다.  $\angle BAD=\theta$ 라 하면  $\angle BCD=\pi-\theta$ ,  $\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{8}$  이다.

$\overline{BC}=6$ ,  $\overline{BD}=9$ 이므로  $\overline{CD}=x$ 라 하면 코사인 법칙에 의해

$$x^2+6^2-2 \times x \times 6 \times \cos(\pi-\theta)=9^2 \text{ 에서}$$

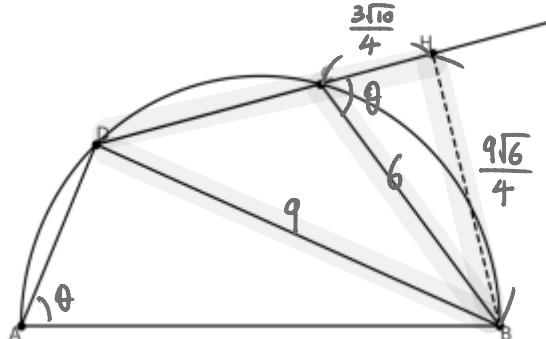
$$x^2+\frac{3\sqrt{10}}{2}x-45=0, \quad (x+3\sqrt{10})\left(x-\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)=0 \text{ 이므로}$$

$$\overline{CD}=\frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ 이다.}$$

(인수분해가 보이지 않는다면 근의 공식도 가능하다.)

<2> 수직(피타고라스 정리)을 이용한 풀이>

점  $B$ 에서 직선  $CD$ 에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하자.



$$\cos\theta=\frac{\overline{CH}}{\overline{BC}}, \quad \overline{CH}^2+\overline{BH}^2=\overline{BC}^2, \quad \overline{DH}^2+\overline{BH}^2=\overline{BD}^2$$

$$\overline{DH}=\sqrt{9^2-\left(\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)^2}=\frac{9\sqrt{10}}{4}$$

11. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수  $f(x)$ 와 상수  $k$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(k)$ 의 값은? [4점]

(가) : 모든 실수  $x$ 에 대하여  $(x-1)^2g(x)=|f(x)|+k$  이다.  
(나) :  $g(1)=-4, g(3)=3$

- ① 33    ② 34    ③ 35    ④ 36    ⑤ 37

- 1) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq 0$ 일 때  
(이차방정식  $f(x)=0$ 의 판별식  $D$ 가  $D \leq 0$ 일 때)

$$x \neq 1 \text{ 일 때, } g(x) = \frac{|f(x)|+k}{(x-1)^2} = \frac{f(x)+k}{(x-1)^2} \text{ 이다.}$$

$$f(x)+k=ax^2+bx+c+k(a>0) \text{ 라 하면}$$

$$g(1)=-4 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2+bx+c+k}{(x-1)^2} = -4 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2+bx+c+k}{(x-1)^2} = -4 \text{ 에서 } ax^2+bx+c+k = -4(x-1)^2 \text{ 이므로}$$

$a > 0$ 에 모순이다.

- 2) 이차방정식  $f(x)=0$ 의 판별식  $D$ 가  $D > 0$ 일 때

$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ 라 하면 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|ax^2+bx+c|+k}{(x-1)^2} = -4 \text{ 이다.}$$

$$f(1) > 0 \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|ax^2+bx+c|+k}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2+bx+c+k}{(x-1)^2} \text{ 이므로}$$

극한값이 음수가 나올 수 없다.  $\therefore f(1) \leq 0, k=f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|ax^2+bx+c|+k}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(ax^2+bx+c)+k}{(x-1)^2} \text{ 가 되어야 극한값이}$$

음수가 나올 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|ax^2+bx+c|+k}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-f(x)+f(1)}{(x-1)^2} = -4 \text{ 이므로}$$

$$f(x)=4(x-1)^2+f(1) \text{ 이다.}$$

$g(3)=3$ 이므로  $(x-1)^2g(x)=|4(x-1)^2+f(1)|+f(1)$ 에  $x=3$ 을 대입하면  $12=|16+f(1)|+f(1)$ 이므로  $f(1)=-2, k=-2$ 이다.

$$\therefore f(k)=4(k-1)^2-2=34$$

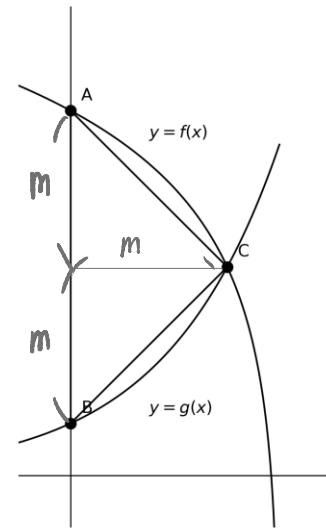
12. 그림과 같이 두 상수  $a(a>1), b(b>0)$ 에 대하여 두 함수

$$f(x)=\log_a(b-x)+4, g(x)=a^x$$

가 있다. 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 가  $y$ 축과 만나는 점을 각각  $A, B$ 라 하고, 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 가 만나는 점을  $C$ 라 할 때, 삼각형  $ABC$ 는 넓이가  $k$ 인 직각이등변삼각형이다.

$a^3 \times b \times k$ 의 값은?

(단, 점  $A$ 의  $y$ 좌표는 점  $B$ 의  $y$ 좌표보다 크다.) [4점]



- ① 84    ② 104    ③ 124    ④ 144    ⑤ 164

점  $B$ 의 좌표가  $(0, 1)$ 이므로  $A(0, 2m+1), C(m, m+1)$ 이라 할 수 있다. (삼각형  $ABC$ 는 직각이등변삼각형)

$A(0, 2m+1)$ 은 곡선  $y=f(x)$  위의 점이므로

$$4+\log_a b=2m+1, \therefore a^{2m-3}=b$$

$C(m, m+1)$ 은 곡선  $y=f(x)$  위의 점이므로

$$4+\log_a(b-m)=m+1, \therefore a^{m-3}=b-m$$

$C(m, m+1)$ 은 곡선  $y=g(x)$  위의 점이므로

$$\therefore a^m=m+1 \text{ 이다.}$$

$$a^{2m-3}=b, a^{m-3}=b-m \text{ 이므로 } a^{2m-3}-a^{m-3}=m$$

$$a^m=m+1 \text{ 이므로 } a^m-a^0=m$$

둘을 연립하면  $a^{2m-3}-a^{m-3}=a^{m-3}(a^m-1)=a^m-1$ 이므로  $m=3$ 이고  $k=9$ 이다.

$$a^m=m+1 \text{ 에서 } a=2^{\frac{2}{3}}, a^{2m-3}=b \text{ 에서 } b=4$$

따라서 구하는 답은  $a^3 \times b \times k=4 \times 4 \times 9=144$ 이다.

13. 두 점  $P$ 와  $Q$ 는 시각  $t=0$ 일 때 각각 원점과 점  $A(k)$ 에서 출발하여 수직선 위를 움직인다.

시각  $t(t \geq 0)$ 에서 점  $P$ 의 속도는  $v(t)=m(t-2)(t-6)$ 이고,

시각  $t(t \geq 0)$ 에서 점  $Q$ 의 가속도는  $a(t)=0$ 일 때,

다음 조건을 만족시키는 양수  $k$ 의 값은 48뿐이다.

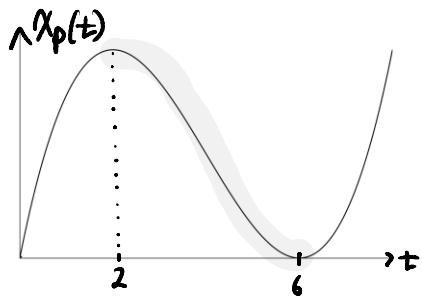
점  $P$ 와 점  $Q$ 가  $t=\alpha(\alpha \geq 0)$ 에서 만나는 모든 실수  $\alpha$ 에 대하여  $v(\alpha) \leq 0$ 이다.

시각  $t=2$ 부터  $t=10$ 까지 점  $P$ 가 움직인 거리는?

(단,  $m$ 은  $m > 0$ 인 상수이다.) [4점]

- ① 224    ② 192    ③ 160    ④ 128    ⑤ 96

시간  $t$ 에 따른 점  $P$ 의 위치 그래프  $x_P(t)$ 를 그리자.



시간  $t$ 에 따른 점  $Q$ 의 속도를  $v_Q(t)$ 라 하면  $v_Q(t)=b$ 이다.

시간  $t$ 에 따른 점  $Q$ 의 위치를  $x_Q(t)$ 라 하면  $x_Q(t)=bt+k$ 이다.

$k=48$ 일 때,  $x_Q(t)$ 의 그래프가  $x_P(t)$  그래프의 극대점과 극솟점을 지나야 박스 조건을 만족하는 양수  $k$ 의 값이 48로 유일하다.

$x_P(t)$  그래프의 극대점은  $(2, \frac{32}{3}m)$ , 극솟점은  $(6, 0)$ 이므로

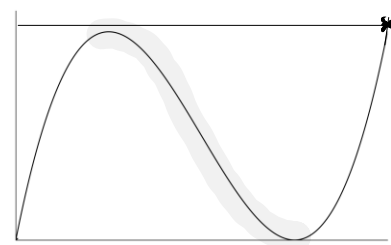
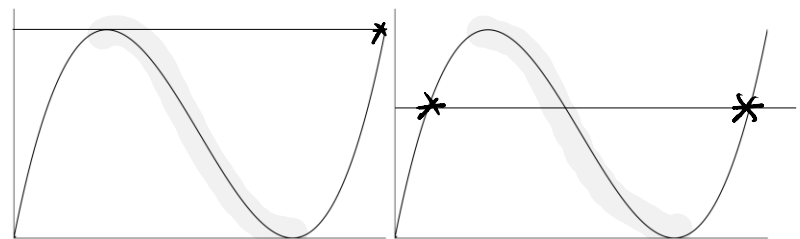
$$2b+48=\frac{32}{3}m, \quad 6b+48=0 \text{에서 } b=-8, \quad m=3 \text{이다.}$$

$$\left( x_P(t) = \frac{mt(t-6)^2}{3} = t(t-6)^2 \right)$$

구하는 답은  $(x_P(2)-x_P(6))+(x_P(10)-x_P(6))=32+160=192$ 이다.

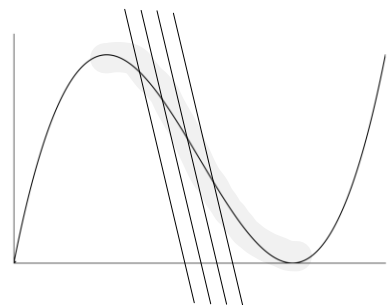
\*추가설명\*

$b=0$ 이면  $v(t) > 0$ ,  $x_P(t)=x_Q(t)$ 를 만족하는  $t(t > 0)$ 가 반드시 하나는 존재한다.



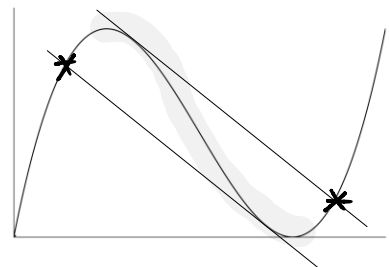
$b > 0$ 일 때도 마찬가지로  $x_P(t)=x_Q(t)$ 를 만족하는  $t(t > 0)$ 가 반드시 하나는 존재한다. ( $t > 6$ 일 때 반드시 만나는 순간존재)

( $b < -8$ 일 때)



$k$ 의 값이 무수히 많이 존재한다.

( $-8 < b < 0$ 일 때)



$k$ 의 값이 하나도 존재하지 않는다.

14. 세 상수  $a(a>4)$ ,  $b$ ,  $c$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수  $t$ 를 작은 수부터 차례대로 나열하면  $t_1, t_2, \dots, t_5$ 이고  $t_1+t_4=a$ 이다.  $a+b+c$ 의 값은? [4점]

$0 \leq x \leq 10$ 에서  $x$ 에 대한 방정식

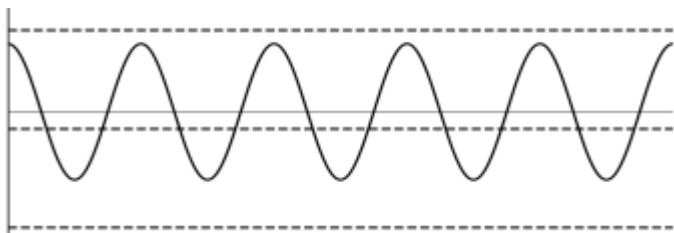
$$(a \cos \pi x + 2)^2 = \{|t-b|-c\}^2$$

의 실근이 존재하고, 모든 실근들은 크기 순서대로 등차수열을 이룬다.

- ① 22      ② 20      ③ 18      ④ 16      ⑤ 14

$||t-b|-c|=k$ 라 한다면 방정식  $(a \cos \pi x + 2)^2 = \{|t-b|-c\}^2$ 은  $\cos \pi x = \frac{-2 \pm k}{a}$ 와 같다. 박스조건을 만족하는  $t$ 의 개수가 5이므로  $k$ 의 값은 최소 2개는 존재해야 한다.

- 1)  $k > 2+a$ 일 때  $y = \cos \pi x$ ,  $y = \frac{-2-k}{a}$ ,  $y = \frac{-2+k}{a}$ ,  $y = -\frac{2}{a}$ 의 그래프



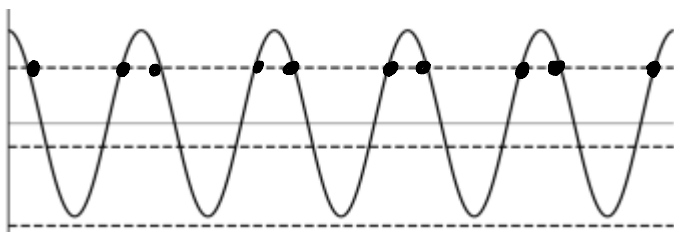
방정식의 실근이 존재하지 않는다.

- 2)  $k = 2+a$ 일 때



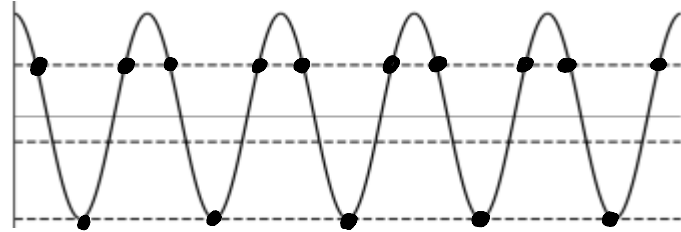
모든 실근이 0, 2, 4, 6, 8, 10이 되어 등차수열이 됨을 알 수 있다.

- 3)  $a-2 < k < 2+a$ 일 때



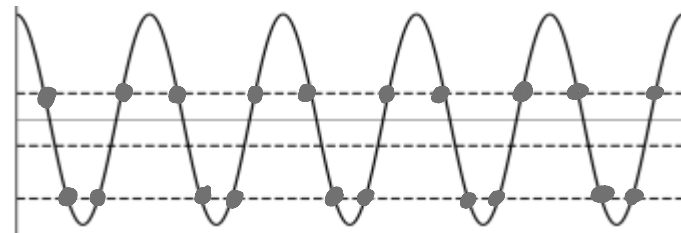
방정식의 실근들이 등간격이 될 수 없다.

- 4)  $k = a-2$ 일 때



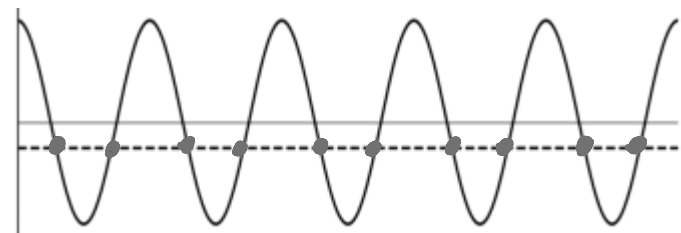
$a=8$ 이면 등간격이 될 수 있다.  $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, 5, \frac{17}{3}, \frac{19}{3}, 7, \frac{23}{3}, \frac{25}{3}, 9, \frac{29}{3}$

- 5)  $0 < k < a-2$ 일 때



3)과 마찬가지로 방정식의 실근들이 등간격이 될 수 없다.

- 6)  $k=0$ 일 때 (당연히 안된다.)

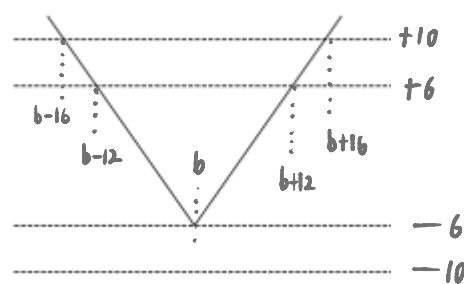


따라서  $a=8$ 이 되어 가능한 경우가 1), 4)가 되어야 한다.

$k$ 의 값이 10,  $-6$ 로 두 가지 경우일 때 박스조건을 만족한다.

(박스조건을 만족하는  $t$ 의 개수가 5이므로  $k$ 의 값은 최소 2개는 존재해야 한다.)

$t$ 에 따른  $|t-b|-c$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



$-c=-6$ 이 되어야  $t$ 의 개수가 5가 될 수 있다.

$t_1=b-16$ ,  $t_4=b+12$ 이므로

$(b-16)+(b+12)=a=8$ 이 되어  $b=6$ 이 된다.

따라서 구하는 답은  $a+b+c=8+6+6=20$ 이다.



15.  $f(-1)=0$ ,  $f(-2)=-7$ 인 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 실수  $a$ 의 값의 범위가

$$a=5 \text{ 또는 } a \leq m$$

일 때,  $f(2m)$ 의 값은? (단,  $m$ 은  $m < 5$ 인 상수이다.) [4점]

함수  $\int_a^x f(t)\{|t-a|-(t-a)\}dt$ 의 최댓값이 0이다.

- ① 150      ② 175      ③ 200      ④ 225      ⑤ 250

$$g(x) = \int_a^x f(t)\{|t-a|-(t-a)\}dt, \quad g(a)=0 \text{이고}$$

$$g'(x) = f(x)\{|x-a|-(x-a)\}, \quad x \geq a \text{에서 } g'(x)=0 \text{이므로}$$

$$x \geq a \text{에서 } g(x)=0 \text{이다.}$$

$$|x-a|-(x-a) = \begin{cases} 0 & (x \geq a) \\ -2(x-a) & (x < a) \end{cases}$$

이고,  $x < a$ 에서  $|x-a|-(x-a) > 0$ 임을 알 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = -\infty \text{이면 } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty \text{이므로 모순이다.}$$

따라서  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = \infty$ 이고,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{|x-a|-(x-a)\} = \infty$ 이므로  $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수임을 알 수 있다.

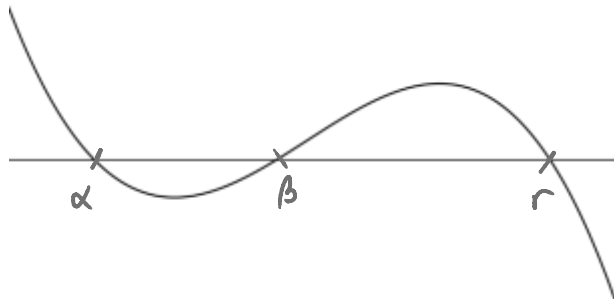
1)  $f(x)$ 의 부호변화가  $x=a$ 에서만 있을 때  
( $x$ 축과 한 점에서만 만나거나  $f(x)=0$ 이 중근을 가질 때)  
 $x < a$ 일 때  $f(x) > 0$ 이고  $x > a$ 일 때  $f(x) < 0$ 이다.

$a > \alpha$ 이면 구간  $(\alpha, a)$ 에서  $g'(x) < 0$ 이고  $g(a)=0$ 이므로  $g(\alpha) > g(a)=0$ 이므로 최댓값이 0일 수 없다.

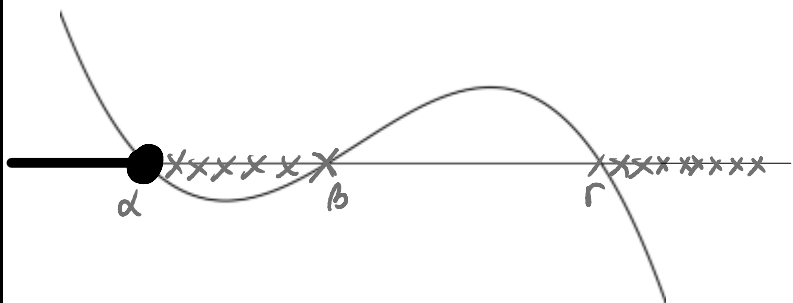
$a \leq \alpha$ 이면 구간  $(-\infty, a)$ 에서  $g'(x) > 0$ 이고  $g(a)=0$ 이므로 구간  $(-\infty, a)$ 에서  $g(x) < g(a)=0$ 이 되어 최댓값이 0이므로 성립한다.

따라서 조건을 만족하는  $a$ 의 범위는  $a \leq \alpha$ 이므로 모순이다.

2) 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과의 교점의 개수가 3이다.  $f(x)=-k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$  ( $\alpha < \beta < \gamma$ ,  $k > 0$ )라 하자.



이때  $\alpha < a \leq \beta$ 이면  $(\alpha, a)$ 에서  $g'(x) < 0$ 이므로 마찬가지로 조건을 만족시킬 수 없고,  $a > \gamma$ 이면  $(\gamma, a)$ 에서  $g'(x) < 0$ 이므로 마찬가지로 조건을 만족시킬 수 없다.  
 $a \leq \alpha$ 이면 구간  $(-\infty, a)$ 에서  $g'(x) > 0$ 이므로 성립한다.



$\beta < a \leq \gamma$ 일 때 어떻게 되어야 하는지 보자.

$$\beta < p \leq \gamma, \quad \int_p^\alpha f(t)\{-2(t-p)\}dt = 0 \text{인 } p \text{가 존재해야}$$

문제에서 제시한 꼴로  $a$ 의 값의 범위가 나타난다.

$$1) \quad \beta < p^* < \gamma, \quad \int_{p^*}^\alpha f(t)\{-2(t-p^*)\}dt = 0 \text{인 } p^* \text{가 존재할 때}$$

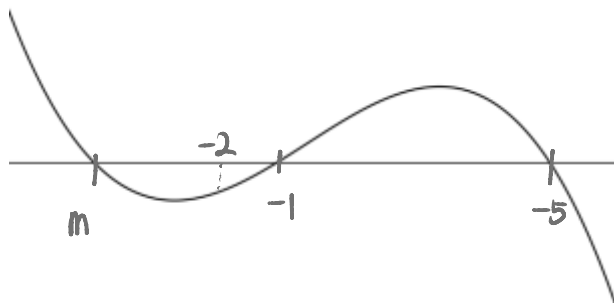
$$\beta < a < p^* \text{이면 } g(\alpha) > 0 \text{이고}$$

$$p^* \leq a \leq \gamma \text{이면 구간 } (-\infty, a) \text{에서 } g(x) \leq 0 \text{이다.}$$

따라서 조건을 만족하는  $a$ 의 범위는  $a \leq \alpha$  또는  $p^* \leq a \leq \gamma$ 이므로 모순이다.

$$2) \quad \int_\gamma^\alpha f(t)\{-2(t-\gamma)\}dt = 0 \text{이고 조건을 만족시키는}$$

$a$ 의 범위가  $a=\gamma$  또는  $a \leq \alpha$ 이다.



$\gamma=5$ 이고  $f(-2) < 0$ 이므로  $\alpha$ 가  $-10$ 이 될 수 없다.  
따라서  $\beta=-1$  ( $\alpha < -1$ )이다.



$f(x) = -k(x-\alpha)(x+1)(x-5)$ 라 하면  $\int_{\gamma}^{\alpha} f(t)\{-2(t-\gamma)\}dt = 0$ 에서

$$\int_5^{\alpha} (t-\alpha)(t+1)(t-5)^2 dt = 0 \text{이다.}$$

$$\int_5^{\alpha} (t-\alpha)(t+1)(t-5)^2 dt = 0 \text{에서 } \alpha-5=q \text{라 하면}$$

$$\int_0^q t^2(t+6)(t-q)dt = \int_0^q (t^4 + (6-q)t^3 - 6qt^2)dt = 0,$$

$$\frac{q^5}{5} + \frac{(6-q)q^4}{4} + \frac{q^3(-6q)}{3} = 0, \quad 4q-5(q-6)-40=0,$$

$$q=-10 \text{이므로 } \alpha=-5 \text{이다.}$$

$$f(x) = -k(x+5)(x+1)(x-5) \text{에서 } f(-2) = -7 \text{이므로 } k = \frac{1}{3} \text{이다.}$$

$$m = \alpha = -5 \text{이고 } f(-10) = \frac{(-5) \times (-9) \times (-15)}{-3} = 225 \text{이다.}$$

\*\*\*

$$\beta < p^* < \gamma, \quad \int_{p^*}^{\alpha} f(t)\{-2(t-p^*)\}dt = 0 \text{인 } p^* \text{가 존재한다고 해보자.}$$

$$p^* \leq a \leq \gamma \text{일 때 구간 } (-\infty, a] \text{에서}$$

$$g(x) \text{의 최댓값은 } g(\alpha) \text{ 또는 } g(a) \text{이다.}$$

$$g(\alpha) \leq g(a) = 0 \text{이어야 } \int_a^x f(t)\{|t-a|-(t-a)\}dt \text{의}$$

$$\text{최댓값이 } 0 \text{이다.}$$

$$p^* \leq a \leq \gamma \text{에서 } a \text{의 값에 따른 } g(\alpha) \text{의 값을 } h(a) \text{라 하면}$$

$$h(a) = \int_a^{\alpha} f(t)\{-2(t-a)\}dt = -2 \int_a^{\alpha} t f(t)dt + 2a \int_a^{\alpha} f(t)dt \text{이다.}$$

$$h'(a) = -2\{-af(a)\} + 2 \int_a^{\alpha} f(t)dt - 2af(a) = 2 \int_a^{\alpha} f(t)dt \text{이고}$$

$$h(p^*) = 0 \text{이면 } h'(p^*) < 0 \text{이므로 } h(a) < 0 \text{을 만족하는}$$

$$a(p^* < a \leq \gamma) \text{가 존재한다.}$$

이렇게 되면 박스 조건을 만족하는 모든 실수  $a$ 의 범위가 문제에서처럼 나오지 않는다.

그냥 딱  $a = \gamma$ 일 때  $g(\alpha) = 0$ 이어야 문제에서처럼 나온다.

\*\*\*

### 단답형

16. 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$2x+4 \leq f(x) \leq x^2+2x+4$$

를 만족시킬 때,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값을 구하시오. [3점]

주어진 부등식을 살펴보면,

$$2x+4 \leq f(x) \leq x^2+2x+4$$

입니다.  $x \rightarrow 0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x+4) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+2x+4) = 4$$

이므로, 샌드위치(조임) 정리에 의해

따라서 구하는 답은 4이다.

17. 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = n^2$$

을 만족시킬 때,  $a_3$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = n^2 \text{에서 } \sum_{k=1}^3 \frac{a_k}{k} - \sum_{k=1}^2 \frac{a_k}{k} = 3^2 - 2^2$$

$$\frac{a_3}{3} = 5 \text{이므로 } a_3 = 15 \text{이다.}$$

18.  $-9^9$ 의  $n$ 제곱근 중에서 정수인 것이 존재하도록 하는 2이상의 모든 자연수  $n$ 의 값의 합을 구하시오. [3점]

문제에서  $-9^9$ 의  $n$ 제곱근 중 정수(실수 정수)가 존재하려면, 다음 조건을 만족해야 합니다.

1.  $(-9^9)^{1/n}$ 이 실수 정수여야 함.
2.  $-9^9 = -(9^9) = -(3^2)^9 = -3^{18}$ 임을 이용.

$-3^{18}$ 의  $n$ 제곱근이 실수가 되려면  $n$ 이 홀수여야 합니다(짝수인 경우  $-3^{18}$ 의 실수  $n$ 제곱근은 존재하지 않음).

$$x = \sqrt[n]{-3^{18}} = -\sqrt[n]{3^{18}} = -3^{\frac{18}{n}}$$

가 정수가 되려면,  $\frac{18}{n}$ 이 정수여야 합니다. 즉,  $n$ 은 18의 약수 중 홀수여야 하며, 조건에  $n \geq 2$ 가 붙습니다.

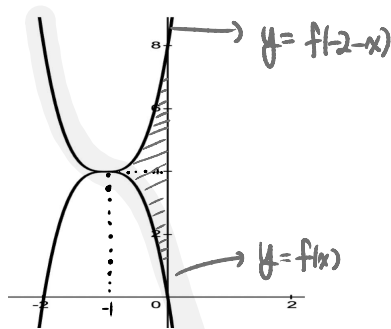
따라서 조건을 만족하는  $n$ 은 3, 9이며 구하는 답은  $3+9=12$ 이다.

19. 함수  $f(x) = -4x^3 - 12x^2 - 12x$ 에 대하여 두 곡선  $y = f(x)$ ,  $y = f(-2-x)$ 와  $y$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

곡선  $y = f(-2-x)$ 의 그래프는 곡선  $y = f(x)$ 의 그래프를  $x = -1$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

$$f'(x) = -12x^2 - 24x - 12 = -12(x+1)^2 \leq 0 \text{ 이므로}$$

곡선  $y = f(x)$ 와 곡선  $y = f(-2-x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$\begin{aligned} \text{따라서 구하는 답은 } & \int_{-1}^0 \{f(-2-x) - f(x)\} dx = 2 \times \int_{-1}^0 \{4 - f(x)\} dx \\ & = 2[4x - (-x^4 - 4x^3 - 6x^2)]_{-1}^0 = 20 \text{이다.} \end{aligned}$$

20.  $f(0)=0$ 인 다항함수  $f(x)$ 에 대하여

$$(a+3)f(a) = 2b^3 - f(b)$$

를 만족하는 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수가  $n$ 이다. 자연수  $n$ 에 대하여  $f(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$(a+3)f(a) = 2b^3 - f(b)$ 를 만족하는 순서쌍의 개수가 유한개이므로 함수  $(x+3)f(x)$ 와  $2x^3 - f(x)$ 의 치역의 교집합의 원소의 개수가 유한개여야 한다.

1)  $f(x) = 0$ 이면

$0 = 2b^3$ 을 만족하는 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수가 한없이 많으므로 모순이다. ( $b=0$ 이고  $a$ 는 모든 실수)

2)  $f(x) = px$ 이면

$(x+3)f(x)$ 는 이차식,  $2x^3 - f(x)$ 는 삼차식이므로 치역의 교집합의 원소의 개수가 한없이 많다. 삼차함수의 치역은  $(-\infty, \infty)$ 이다.

3)  $f(x) = px^n + \dots (n \geq 4)$ 이면

$n$ 이 홀수일 때 우변이  $n$ 차식이므로 치역이  $(-\infty, \infty)$ 이고,

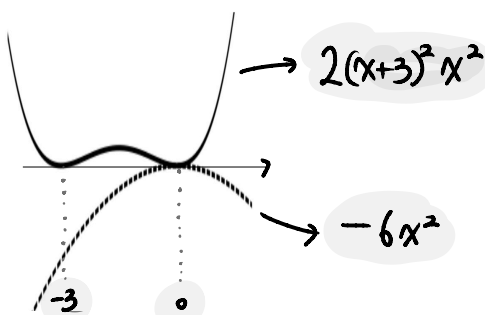
$n$ 이 짝수일 때 좌변이  $n+1$ 차식이므로 치역이  $(-\infty, \infty)$ 가 되어 모순이다.

$\therefore f(x)$ 는 삼차식이다.

우변의 치역이  $(-\infty, \infty)$ 이지 않도록  $f(x) = 2x^3 + \dots$ 이어야 한다.

순서쌍  $(0, 0)$ 이  $(a+3)f(a) = 2b^3 - f(b)$ 을 만족하므로

함수  $(x+3)f(x)$ 의 최솟값은 함수  $2x^3 - f(x)$ 의 최댓값과 0으로 같아야 한다.



함수  $(x+3)f(x)$ 는  $x = -3$ ,  $x = 0$ 에서 함숫값이 0이므로  $x = -3$ ,  $x = 0$ 에서 극값을 가져야 한다.

따라서  $f(x) = 2x^2(x+3)$ 이 되어

$$(x+3)f(x) = 2x^2(x+3)^2, \quad 2x^3 - f(x) = -6x^2$$

이다. 따라서 구하는 답은  $f(2) = 40$ 이다.

\*\*\*순서쌍은 총 두 개로  $(-3, 0)$ 과  $(0, 0)$ 이다.\*\*\*

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

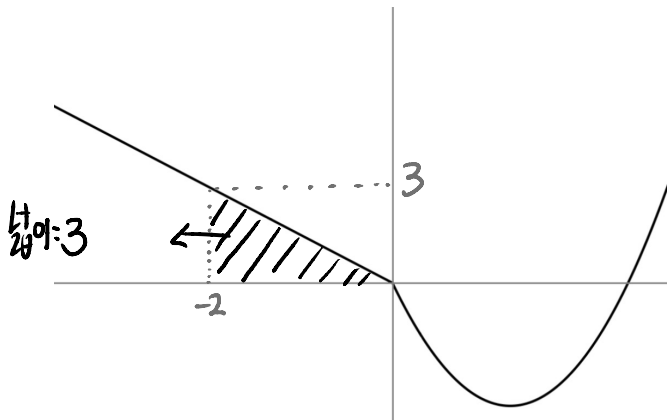
(가) :  $x \geq 0$ 에서  $f(x) - f(-2) = x^3 - 3x^2 + 3$ 이다.

(나) :  $\left\{ \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'(x+t) - f'(x-t)}{t} \mid x \leq 0 \right\} = \{\alpha, \beta\}$

두 상수  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ )에 대하여  $\alpha \times \beta \times \{f(4) - f(-4)\}$ 의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)$ 는 미분가능하므로  $f'(0) = 0$

$x \geq 0$ 에서  $f'(x) = 3x^2 - 6x$ 이다.



$f'(x)$ 의 그래프를 그려보면 위와 같다.

$x < 0$ 일 때  $f'(x)$ 가 직선이어야

(나)에서 집합의 원소의 개수가 유한개일 수 있다.

$x < 0$ 에서  $f'(x) = ax$ 라 하자.

$x < 0$ 에서  $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'(x+t) - f'(x-t)}{t}$ 의 값은  $2a$ 로 일정하고

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'(0+t) - f'(0-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'(0) - f'(-t)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3t^2 - 6t}{t} + \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{at}{t} = a - 6 \text{이다.}$$

(가)에서  $f(0) - f(-2) = 3$ 이므로  $\int_{-2}^0 (ax) dx = 3$ 에서  $a = -\frac{3}{2}$ 이다.

다.  $\alpha = -\frac{3}{2} - 6 = -\frac{15}{2}$ 이고,  $\beta = 2a = -3$ 이다.

$$f(4) - f(-4) = f(4) - f(-2) + \int_{-4}^{-2} f'(x) dx$$

$$= 19 + \int_{-4}^{-2} \left(-\frac{3}{2}x\right) dx = 28$$

구하는 답은  $\alpha \times \beta \times \{f(4) - f(-4)\} = \left(-\frac{15}{2}\right) \times (-3) \times 28 = 630$ 이다.

22. 수열  $\{a_n\}$ 은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (a_n > n) \\ 5a_n - 3 & (a_n \leq n) \end{cases}$$

을 만족시킨다.  $a_k = k$ 를 만족시키는 25이하의 자연수  $k$ 의

개수가 4일 때, 가능한 모든  $a_1$ 의 값의 합은  $\frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의

값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

최초로  $a_n = n$ 을 만족하는 자연수를  $m$ 이라 하면  $a_m = m$ ,

$$a_{m+1} = 5m - 3, a_{m+2} = 5m - 6, a_{m+3} = 5m - 9, \dots, a_{2m} = 2m$$

이고,  $a_m = m$ 과  $a_{2m} = 2m$ 인 두 자연수  $m, 2m$  사이에  $a_k = k$ 를 만족하는 자연수  $k$ 는 존재하지 않는다.

1)  $m=1$ 일 때  $a_k = k$ 를 만족하는  $k$ 는 1, 2, 4, 8, 16, ...이므로

$a_k = k$ 를 만족시키는 25이하의 자연수  $k$ 의 개수가 5이다.

2)  $m=2$ 일 때,  $a_k = k$ 를 만족하는  $k$ 는 2, 4, 8, 16, ...이므로

조건을 만족한다.

3)  $m=3$ 일 때,  $a_k = k$ 를 만족하는  $k$ 는 3, 6, 12, 24, ...이므로

조건을 만족한다.

4)  $m=4$ 일 때,  $a_k = k$ 를 만족하는  $k$ 는 4, 8, 16, ...이므로

$a_k = k$ 를 만족시키는 25이하의 자연수  $k$ 의 개수가 3이다.

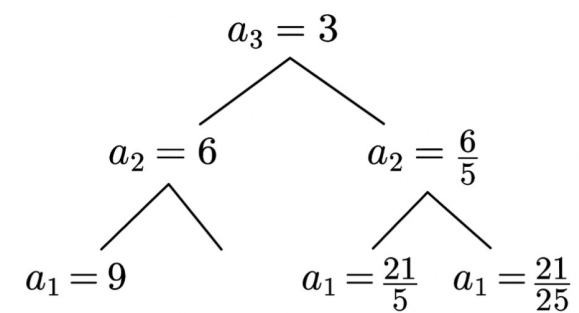
5)  $m \geq 5$ 일 때 4)와 마찬가지로  $a_k = k$ 를 만족시키는 25이하의

자연수  $k$ 의 개수가 4개 미만이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$m=2$ 일 때,  $a_1 \neq 1$ 이므로  $a_1 - 3 = 2$ 에서  $a_1 = 5$ 이다.

$m=3$ 일 때,  $a_3 = 3$ 이고 다음과 같이  $a_1$ 으로 가능한 값은

$9, \frac{21}{5}, \frac{21}{25}$ 이다.



$5 + 9 + \frac{21}{5} + \frac{21}{25} = \frac{476}{25}$ 에서 구하는 답은 501이다.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}$ 의 값은? [2점]

- ① 5      ② 4      ③ 3      ④ 2      ⑤ 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{1}{2}} = 3$$

24.  $\int_0^1 x e^{-2x} dx$ 의 값은? [3점]

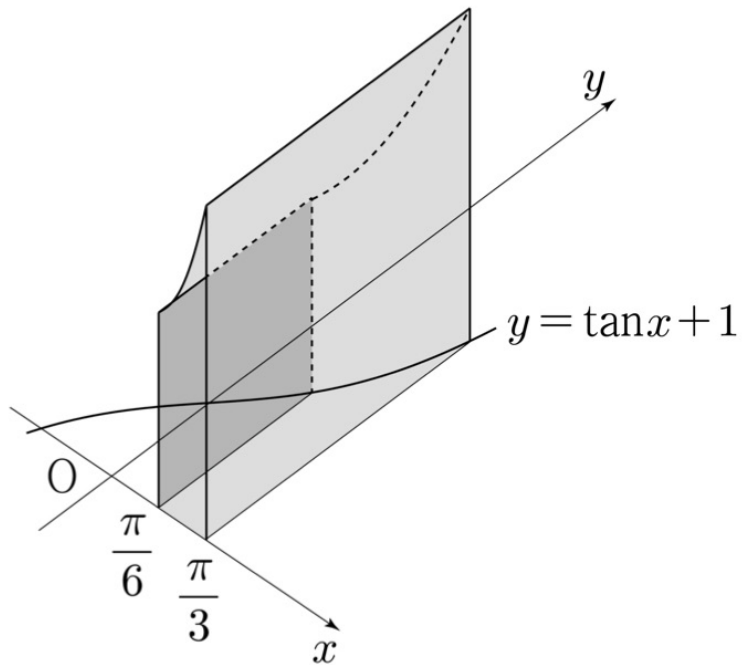
- ①  $\frac{e^2-1}{4e^2}$       ②  $\frac{e^2-2}{4e^2}$       ③  $\frac{e^2+3}{4e^2}$   
④  $\frac{e^2-3}{4e^2}$       ⑤  $\frac{e^2+2}{4e^2}$

부분적분을 이용하자.

$$\int_0^1 x e^{-2x} dx = \left[ x \times \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{-2} dx = \frac{e^{-2}}{-2} - \left[ \frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^1 = \frac{e^2-3}{4e^2}$$

25. 그림과 같이 곡선  $y = \tan x + 1$ 과  $x$ 축 및 두 직선

$x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]



- ①  $\sqrt{3} - \ln 3$       ②  $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \ln 3$       ③  $\frac{\sqrt{3}}{3} + \ln 3$   
 ④  $\sqrt{3} + \ln 3$       ⑤  $\frac{2\sqrt{3}}{3} + \ln 3$

구하는 답은

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x + 1)^2 dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan^2 x + 2\tan x + 1) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \sec^2 x + \frac{2\sin x}{\cos x} \right) dx = [\tan x - 2\ln|\cos x|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \ln 3$$

26. 직선  $x = 2$  위의 점 A에 대하여 점 A를 지나고 직선 OA와 수직인 직선이  $y$ 축과 만나는 점을 B라 하자. 점 C(2, 0)에

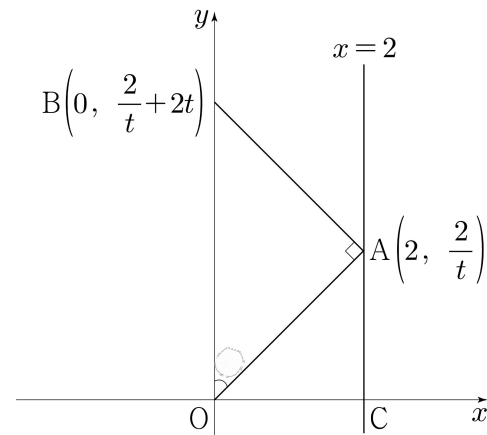
대하여  $\tan(\angle ABC) = \frac{1}{12}$  일 때,  $\tan(\angle AOB)$ 의 값은?

(단, 점 A의  $y$ 좌표는 0이 아니고, O는 원점이다.) [3점]

- ① 5      ② 4      ③ 3      ④ 2      ⑤ 1

편의상 점 A가 제 1사분면에 있다고 하자.

(제 4사분면에 있을 수 있지만 일반성을 잃지 않는다.)



$\tan(\angle AOB) = t$ 라 하면

A의 좌표는  $(2, \frac{2}{t})$ 이고 B의 좌표는  $(0, \frac{2}{t} + 2t)$ 이다.

$$\tan(\angle ABO) = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{1}{t},$$

$$\tan(\angle CBO) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{t}{t^2 + 1}$$

$$\tan(\angle ABC) = \tan(\angle ABO - \angle CBO) = \frac{\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1}}{1 + \frac{1}{t} \times \frac{t}{t^2 + 1}} = \frac{1}{t^3 + 2t} = \frac{1}{12}$$

계산하면  $(t-2)(t^2+2t+6)=0$ 이므로  $t=2$ 이다.

27. 다항함수  $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + x^2 & (x \leq 0) \\ f(x) - x & (x > 0) \end{cases}$$

가 있다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{g(-x)}{g(x)} \right| = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+g(-x))}{\ln(1+g(x))} = -2$$

일 때,  $f(-2)$ 의 값은? (단,  $f(0) > -1$ 이다.) [3점]

- ① -10      ② -8      ③ -6      ④ -4      ⑤ -2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{g(-x)}{g(x)} \right| = -\infty \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(-x) + x^2}{f(x) - x} = 0$$

이고,

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이상이면 극한값이  $\pm 10$ 이 되고

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이하이면 극한이 존재하지 않는다.

$f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(-x) + x^2}{f(x) - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+1)x^2 - bx + c}{ax^2 + (b-1)x + c} = 0 \text{이므로}$$

$a = -1$ 이고  $\therefore f(x) = -x^2 + bx + c$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+g(-x))}{\ln(1+g(x))} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(-bx + c + 1)}{\ln(-x^2 + (b-1)x + c + 1)}$$

에서  $c \neq 0$ 이면 극한값은 1이다. 따라서  $c = 0$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(-bx + 1)}{\ln(-x^2 + (b-1)x + 1)} = \frac{-b}{b-1} = -2$$

에서  $b = 2$ 이다.

$f(x) = -x^2 + 2x$ 이고 구하는 답은  $f(-2) = -8$ 이다.

28. 실수  $t$  ( $t > 0$ )에 대하여 함수  $f(x) = e^{tx} \times \sin x$  ( $x \geq 0$ )가 있다.

곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(s, f(s))$ 에서의 접선의 방정식을

$y = g(x)$ 라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 실수  $s$ 의 최솟값을

$h(t)$ 라 하자.

(가) 상수  $m$  ( $\frac{\pi}{2} < m < \pi$ )에 대하여  $g(m) = 0$ 이다.

(나) 함수  $\int_0^x (f(a) - g(a))da$ 는  $x = s$ 에서 극값을 갖지 않는다.

함수  $h(t)$ 는  $t = \alpha$ 에서 최댓값을 가질 때,  $\lim_{t \rightarrow \alpha+} h(t) = \frac{3}{4}\pi$ 이다.

$\alpha + m$ 의 값은? [4점]

①  $\frac{1}{4}\pi + \sqrt{2} + 1$       ②  $\frac{1}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$       ③  $\frac{3}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

④  $\frac{1}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$       ⑤  $\frac{3}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$

조건 (가)와 (나)를 종합하면

“외부의 점  $(m, 0)$ 에서 곡선  $y = f(x)$ 에 그은 변곡접선이 아닌

접선을  $y = g(x)$ 이라 하자.”이다.

함수  $\frac{f(x) - 0}{x - m}$  ( $x \geq 0, x \neq m$ )가 극대 또는 극소가 되는  $x$ 중

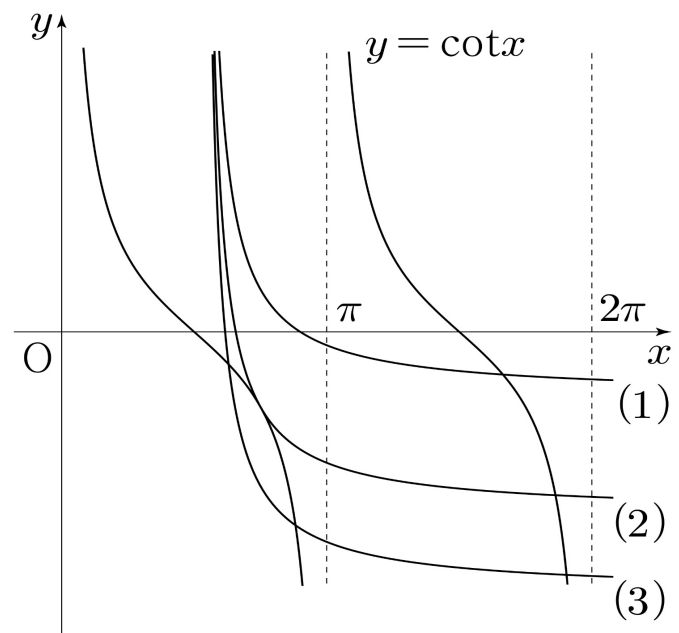
가장 작은 값이  $h(t)$ 이다.

도함수가 0되는  $x$ 의 값을 찾자.

$$\left( \frac{e^{tx} \sin x}{x - m} \right)' = \frac{e^{tx} (t \sin x + \cos x)(x - m) - e^{tx} \sin x}{(x - m)^2} = 0$$

$$\cot x = \frac{1}{x - m} - t$$

$t$ 의 값에 따른 두 곡선  $y = \cot x$ ,  $y = \frac{1}{x - m} - t$ 의 관계를 보자.





(2)의 상황에서 두 곡선이 공통접선을 갖는 점의  $x$ 좌표를  $k$ 라 하면  $x=k$ 에서는 함수  $\frac{f(x)}{x-m}$ 가 극값을 갖지 않으므로 함수  $h(t)$ 가 최댓값을 갖는다.

$$\therefore (2)의 상황에서 t=\alpha, \lim_{t \rightarrow \alpha+} h(t)=k=\frac{3}{4}\pi$$

$t=\alpha$ 일 때  $x=\frac{3\pi}{4}$ 에서 두 곡선이 공통 접선을 가지므로

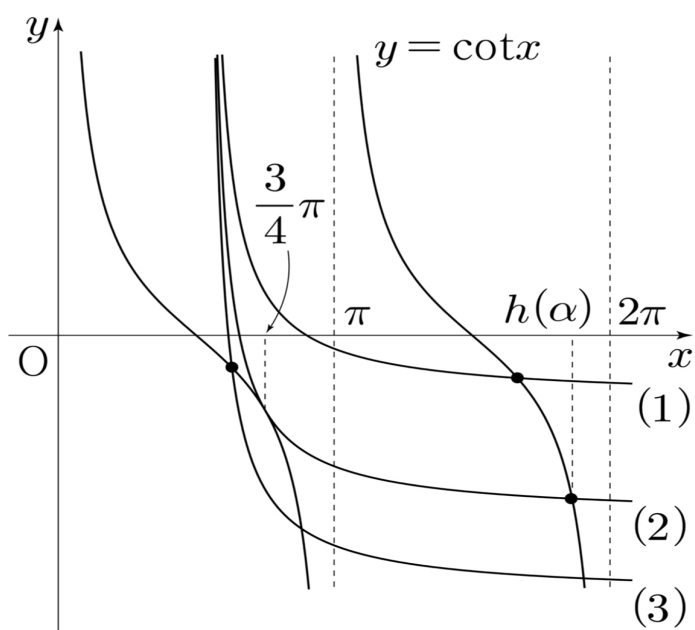
$$\cot \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\frac{3\pi}{4}-m} - \alpha$$

$$-\csc^2 \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\left(\frac{3\pi}{4}-m\right)^2}$$

연립하면  $m=\frac{3\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\alpha=1+\sqrt{2}$ 이고

구하는 답은  $m+\alpha=\frac{3}{4}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}+1$ 이다.

\*\*\* $t$ 에 따른  $h(t)$  분석하기\*\*



- (1)  $t \rightarrow \alpha-$  일 때  $h(t) \rightarrow h(\alpha)-$   
 (2)  $t = \alpha$  일 때  $h(t)$ 는 최댓값  $h(\alpha)$  (이때  $h(\alpha) \neq k$ 이다.)  
 (3)  $t \rightarrow \alpha+$  일 때  $h(t) \rightarrow \frac{3}{4}\pi-$

단답형

29. 이차함수  $f(x)$ 와 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여 방정식

$$(n^4 - 2n^2 + 1)f(x) = n^4 - 2n^2 + 2$$

는 서로 다른 두 실근  $\alpha_n, \beta_n$  ( $\alpha_n < \beta_n$ )을 갖는다.

$\sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$ 일 때,  $f(8)$ 의 값을 구하시오. [4점]

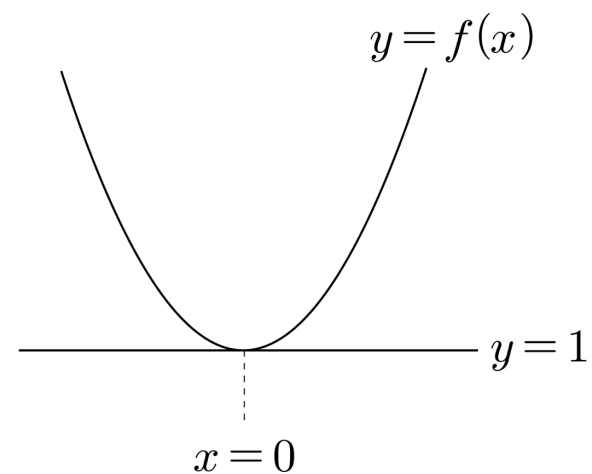
2이상의 자연수  $n$ 에 대하여 방정식  $f(x) = \frac{1}{n^4 - 2n^2 + 1} + 1 > 1$

은 서로 다른 두 실근을 갖고,

$\sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$$

이므로 방정식  $f(x) = 1$ 은 중근 0을 갖는다.



$f(x) = ax^2 + 1$  ( $a > 0$ )라 하면 방정식

$$ax^2 + 1 = \frac{1}{n^4 - 2n^2 + 1} + 1$$

의 두 실근 중 작은 근이  $\alpha_n$ 이므로

$$\alpha_n = -\sqrt{\frac{1}{a(n^4 - 2n^2 + 1)}} = -\sqrt{\frac{1}{4a}} \times \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

이다.

$$\sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| = \sqrt{\frac{1}{4a}} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right\} = \sqrt{\frac{1}{4a}} \times \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4\sqrt{a}} = 1$$

$$\therefore f(x) = \frac{9}{16}x^2 + 1$$

구하는 답은  $f(8) = 37$ 이다.



## 홀수형

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고  $f(x) > 0$ 인 함수  $f(x)$ 는 역함수  $g(x)$ 를 갖는다. 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$4x^3 f(x) = g(1) \times f'(x) \times (\ln f(x))^3 - 6g(1) \times f'(x) \times (\ln f(x))^2$$

을 만족시킨다.  $f'(-6) = -pe^q$ 일 때,  $p \times q$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $p$ 와  $q$ 는 유리수이다.) [4점]

주어진 식에서 양변을  $f(x)$ 로 나누고  $x$ 에 대하여 적분하자.

$$x^4 = g(1) \times \left\{ \frac{(\ln f(x))^4}{4} - 2(\ln f(x))^3 \right\} + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$x = g(y) \ (y > 0)$ 를 대입하면

$$g(y)^4 = g(1) \times \left\{ \frac{(\ln y)^4}{4} - 2(\ln y)^3 \right\} + C$$

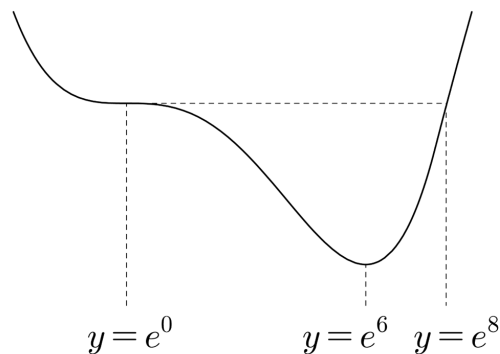
이다.

우변을  $y$ 에 대하여 미분하면

$$\frac{g(1)}{y} \times \{(\ln y)^3 - 6(\ln y)^2\}$$

이므로 우변은  $y = e^6$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$g(1) \times \left\{ \frac{(\ln y)^4}{4} - 2(\ln y)^3 \right\} + C \text{의 그래프}$$



$$g(y)^4 = g(1) \times \left\{ \frac{(\ln y)^4}{4} - 2(\ln y)^3 \right\} + C \text{에 } y=1 \text{을 대입하면}$$

$$C = (g(1))^4$$

임을 알 수 있다. 다시  $y = e^8$ 을 대입하면

$$\{g(e^8)\}^4 = \{g(1)\}^4$$

이다.

$g(1) = 0$ 이면  $g(x)$ 는 일대일 대응 함수가 아니고

$g(1) < 0$ 이면  $y$ 의 값이 한없이 커질 때 우변은 음의 무한대로 발산하므로 모순이다. ((좌변)  $\geq 0$ )

따라서  $g(1) > 0$ 임을 알 수 있다.

$g(e^8) = \pm g(1)$ 에서  $g(y)$ 는 일대일 대응 함수이므로

$$g(1) > 0, \quad g(e^8) = -g(1) < 0$$

임을 알 수 있고 사잇값 정리에 의하여

1보다 크고  $e^8$ 보다 작은 어떤 상수  $c$ 에 대하여

$$g(c) = 0$$

임을 알 수 있다.

$$g(y)^4 = g(1) \times \left\{ \frac{(\ln y)^4}{4} - 2(\ln y)^3 \right\} + (g(1))^4 \text{에서}$$

우변이 항상 0이상임을 알 수 있다.

우변은  $y = e^6$ 일 때 최소이며

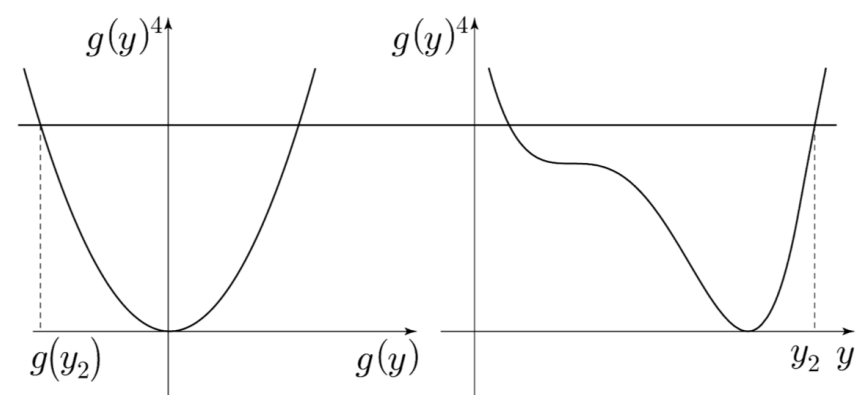
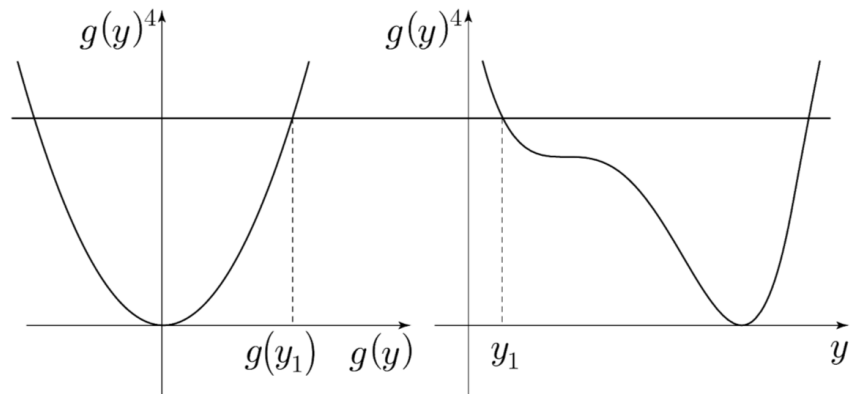
$$g(1) \times \{ (g(1))^3 - 108 \} \geq 0$$

임을 알 수 있다.

$g(1) > 6$ 이면 모든 양수  $y$ 에 대하여  $(g(y))^4 > 0$ 이므로

$g(c) = 0$ 에 모순이다.

$$\therefore g(1) = 6, \quad c = e^6$$



$$g(y) = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{6(\ln y)^4 - 48(\ln y)^3}{4} + 6^4} & (0 < y \leq e^6) \\ -\sqrt[4]{\frac{6(\ln y)^4 - 48(\ln y)^3}{12} + 6^4} & (y > e^6) \end{cases} \text{이다.}$$

$g(e^8) = -6$ 이므로  $f(-6) = e^8$ 이다.

$$4x^3 f(x) = g(1) \times f'(x) \times (\ln f(x))^3 - 6g(1) \times f'(x) \times (\ln f(x))^2$$

에  $x = -6$ 을 대입하면

$$f'(-6) = -\frac{9e^8}{8} \text{이므로 구하는 답은 } 9 \text{이다.}$$