

Infinity

출제

이지철

조항기

박상진

이유준

황정하

검토

문혁준

이민영

주서강

덥고 습한 날씨 속에서 고생하는 수험생 여러분
자신을 존중하며 끝까지 정진하시길 응원합니다.

일부 문항은 손글씨 그래프를 제공하였습니다.
양해 부탁드립니다.

등급컷

1등급	80 ~ 82
2등급	72 ~ 76

공통

1	③	2	②	3	⑤	4	④	5	⑤
6	②	7	①	8	①	9	④	10	④
11	②	12	①	13	③	14	④	15	⑤
16	7	17	36	18	55	19	14	20	435
21	16	22	188						

미적분

23	①	24	⑤	25	①	26	③	27	②
28	②	29	22	30	4				

Infinity Prologue

Infinity 모의고사 1회는 평가원과 유사하면서
익숙함과 적당한 신박함이 공존하는 것에 초점을 두어
제작하였습니다.

9번부터 13번, 20번, 21번, 30번 문항에서 익숙함을,
14번, 15번, 22번, 28번, 29번 문항에서 적당한 신박함을
느낄 수 있도록 기획하였습니다.

모의고사의 난이도는 평가원보다 체감상 어렵지만,
평가원의 범주 안에 있는 난이도로 기획하였습니다.

공통 영역

1. $3^{\log_9 8}$ 의 값은? [2점]

- ① $2^{\frac{1}{2}}$ ② 2 ③ $2^{\frac{3}{2}}$ ④ 2^2 ⑤ $2^{\frac{5}{2}}$

답 : ③

해설

$$\begin{aligned} 3^{\log_9 8} &= 8^{\log_9 3} \\ &= 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

2. 함수 $f(x) = 8x^3 - 7x$ 에 대해 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은?

[2점]

- ① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

답 : ②

해설

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= f'(1) \\ &= (24x^2 - 7)|_{x=1} = 17 \end{aligned}$$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 번째 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$S_8 - S_6 = 8(S_5 - S_3), \quad a_2 = \frac{3}{4}$

일 때, $a_4 + a_5$ 의 값은? [3점]

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

답 : ⑤

해설

S_n 으로 이루어진 식

$S_8 - S_6 = 8(S_5 - S_3)$

을 정리하면

$a_8 + a_7 = 8(a_5 + a_4)$

이다. 양변을 $a_5 + a_4$ 로 나누고 정리하면

$r^3 = 8 \rightarrow r = 2$

이다. 따라서

$a_4 + a_5 = (\frac{3}{4})r^2 + (\frac{3}{4})r^3 = 3 + 6 = 9$

이다.

4. 함수

$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+4 & (x < 4) \\ x^3-ax & (x \geq 4) \end{cases}$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 8
- ② 10
- ③ 12
- ④ 14
- ⑤ 16

답 : ④

해설

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로,
 $x = 4$ 에서도 연속이어야 한다. 따라서

$\lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 - 3x + 4 = \lim_{x \rightarrow 4^+} x^3 - ax$

이고,

$16 - 12 + 4 = 64 - 4a \rightarrow a = 14$

이다.

7. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = 3x^3 + 2x^2 - x + a$$

를 만족시킬 때, $a \times f(-1)$ 의 값은? [3점]

- ① -16 ② -13 ③ -10 ④ -7 ⑤ -4

답 : ①

해설

주어진 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 3 + 2 - 1 + a \rightarrow a = -4$$

임을 알 수 있다. 주어진 식의 양변을 미분하면

$$f(x) = 9x^2 + 4x - 1$$

이고, 따라서

$$f(-1) = 4, \quad a \times f(-1) = -16$$

이다.

8. 두 수의 합이 음수인 실수 a, b 에 대하여

$$a + b + 2ab = \log_6 2, \quad a^2 + b^2 = \log_6 18$$

을 만족시킬 때, $a + b$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

답 : ①

해설

$a + b$ 를 p ($p < 0$), ab 를 q 라고 치환하자. 식을 다시 정리하면

$$p + 2q = \log_6 2, \quad p^2 - 2q = \log_6 18$$

이다. 두 식을 더하여 정리하면

$$p^2 + p - 2 = 0$$

이고, 따라서

$$a + b = p = -2$$

이다.

9. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} -f'(x) & (x < 1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

가 실수 전체 집합에서 연속이고 $f(1)=6$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?
[4점]

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

답 : ④

해설

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로,
 $x=1$ 에서도 연속이어야 한다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

이고, $f(1)=6$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(x) = (x-1)^2 - 6(x-1) + 6$$

따라서

$$f(3) = -2$$

이다.

InfinitY Plus

쉬운 설명을 위해 함수 $f(x)$ 가 최고차항이 1인
이차함수라고 할 때, $f(k)=a$, $f'(k)=b$ 라고 하면,
함수 $f(x)$ 는 다음과 같이 표현하는 것이 편리하다.

$$f(x) = (x-k)^2 + b(x-k) + a$$

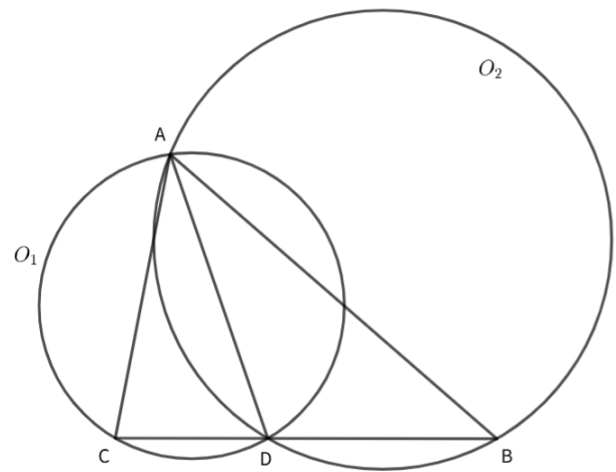
10. $\angle A = 60^\circ$ 인 삼각형 ABC가 존재한다. 선분 BC 위의
점 D에 대하여 삼각형 ADC의 외접원을 O_1 , 삼각형 ADB의
외접원을 O_2 라고 할 때, 두 원 O_1 , O_2 의 넓이의 비가 4:9이다.
 $\overline{AB}=6$ 일 때, 선분 BC의 길이는? [4점]

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

답 : ④

해설

문제의 조건을 바탕으로 그림을 그리면 다음과 같다.



두 원 O_1 , O_2 의 넓이의 비가 4:9이므로 반지름의 비는
2:3임을 알 수 있다. 따라서 이를 사인법칙에 적용하면
다음과 같은 비례식을 세울 수 있다.

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \angle ADC} : \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ADB} = 2:3$$

이때 $\sin \angle ADC = \sin \angle ADB$ 이므로

$$\overline{AC} : \overline{AB} = 2:3$$

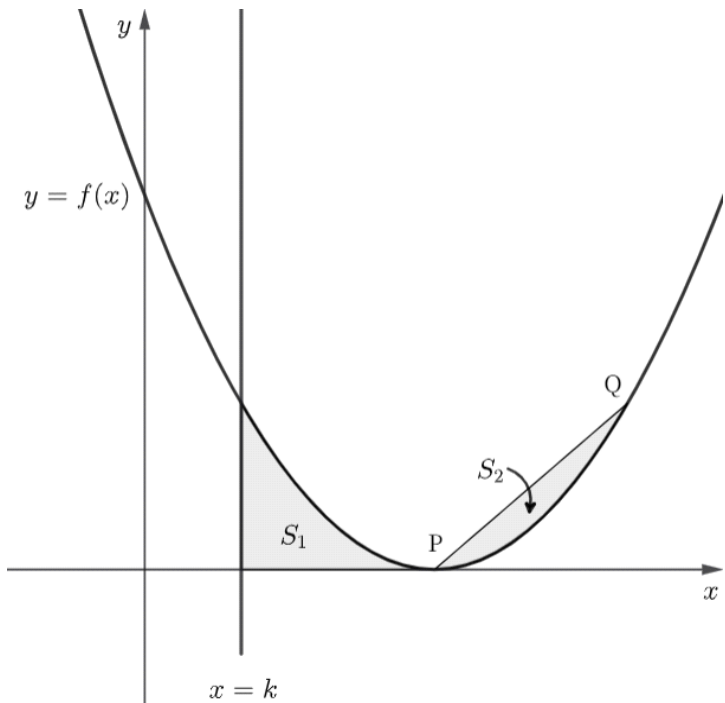
이고, 조건에 의하여 $\overline{AB}=6$ 이므로 $\overline{AC}=4$ 이다.
 $\angle A = 60^\circ$ 이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙을
사용하면

$$\overline{BC} = 2\sqrt{7}$$

이다.

11. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 가 점 $P(2, 0)$ 에서 x 축과 접한다. 점 P 와 점 $Q(\frac{10}{3}, f(\frac{10}{3}))$ 에 대하여 곡선 $f(x)$ 와 직선 $x=k(k<2)$ 및 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1 , 곡선 $f(x)$ 와 선분 PQ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 = 2S_2$ 일 때, 상수 k 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$



답 : ②

해설

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 할 때

$$f(x) = a(x-2)^2$$

이고 직선 PQ 의 방정식은

$$y = g(x) = \frac{4a}{3}(x-2)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_k^2 f(x)dx = \int_k^2 a(x-2)^2 dx \\ &= \frac{a}{3}(2-k)^3 \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_2^{\frac{10}{3}} g(x) - f(x) dx \\ &= \int_2^{\frac{10}{3}} a(x-2)\left(\frac{10}{3}-x\right) dx \\ &= \frac{32}{81}a \end{aligned}$$

이다. 주어진 조건에 의해 $S_1 = 2S_2$ 이므로

$$2 \times \frac{32}{81}a = \frac{a}{3}(2-k)^3 \rightarrow k = \frac{2}{3}$$

이다.

InfinitY Plus

이차함수 $f(x)$ 가 $y = ax^2$ 의 형태일 때, 두 점 $(0, 0)$, $(k, f(k))$ 을 잇는 선분과 $f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이와 세 점 $(0, 0)$, $(k, 0)$, $(k, f(k))$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 비는 1:3이다.

12. 곡선 $y = \sin 2\pi x$ 와 곡선 $y = \cos 4\pi x + k$ ($0 < k < 1$)가 제 1사분면에서 만나는 교점 중 x 좌표가 가장 작은 점을 A, 두 번째로 작은 점을 B라 하자. 곡선 $y = \sin 2\pi x$ 위의 점 A, 점 B가 아닌 한 점을 C라 할 때, 점 A의 x 좌표와 점 C의 x 좌표의 합은 1이고 $\overline{BC} = \frac{3}{2}$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 할 때, $S \times k$ 의 값은? (단, k 는 상수) [4점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

답 : ①

해설

$y = \sin 2\pi x$ 와 $y = \cos 4\pi x$ 의 그래프는 모두 $x = \frac{1}{4}$ 에

대칭이므로 점 A와 점 B는 $x = \frac{1}{4}$ 에 대해

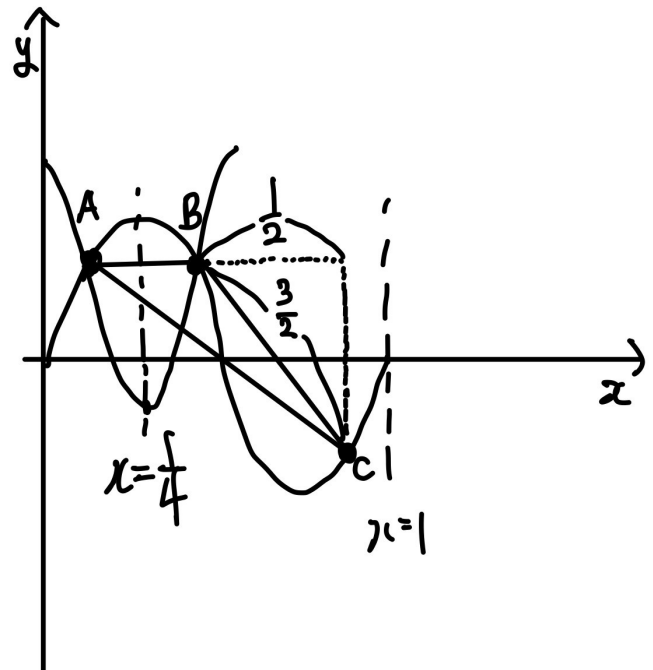
대칭이다. 문제의 조건에 의해 점 A의 x 좌표와 점 C의 x 좌표의 합은 1이므로, 세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각

$$a, \frac{1}{2} - a, 1 - a \quad (0 < a < \frac{1}{4})$$

이라 할 수 있다.

문제의 조건에 의해 $\overline{BC} = \frac{3}{2}$ 이고 점 B와 점 C의

x 좌표 차이는 $\frac{1}{2}$ 이므로



문제의 상황은 위의 그림처럼 그려진다. 이때

피타고라스의 정리를 이용하면 점 B와 점 C의 y 좌표의 차이는 $\sqrt{2}$ 이라는 것을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} & \sin 2\pi\left(\frac{1}{2} - a\right) - \sin 2\pi(1 - a) \\ &= \sin(\pi - 2\pi a) - \sin(2\pi - 2\pi a) \\ &= 2\sin 2\pi a = \sqrt{2} \end{aligned}$$

즉, $\sin(2\pi a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고, $a = \frac{1}{8}$ 이다. 따라서, S 와 k 의 값은 각각

$$S = \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이고, $S \times k = \frac{1}{8}$ 이다.

13. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{12}$ 이고 $x=2$ 에서 극댓값을 갖는
사차함수 $f(x)$ 에 대하여, 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $f(x)=t$ 가 서로 다른 두 실근만을 갖도록 하는
임의의 실수 t 에 대하여, 두 실근의 곱은 항상 음수이다.

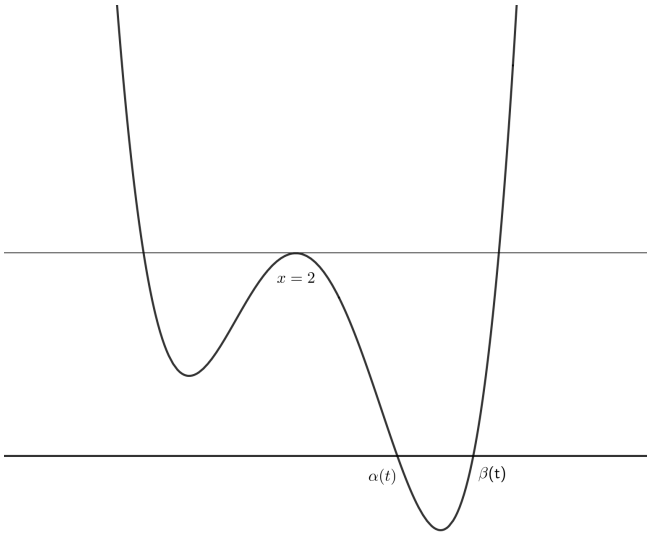
$f'(5)$ 의 값이 자연수일 때, 가능한 모든 $f'(5)$ 의 값의 합은?
[4점]

- ① 92 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 108

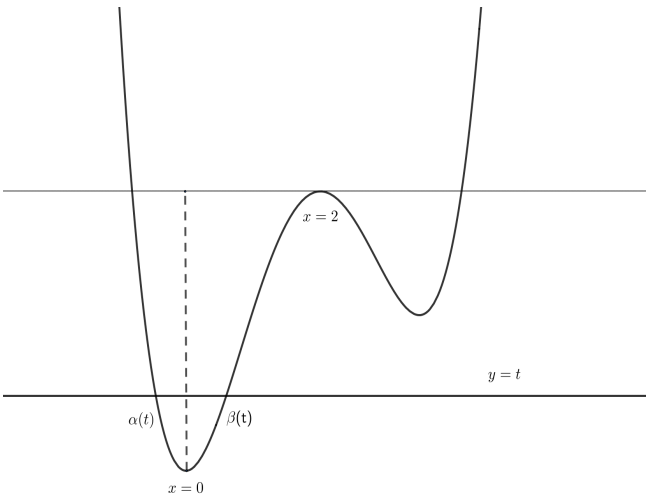
답 : ③

해설

사차함수 $f(x)$ 의 그래프가 $x=2$ 에서 극댓값을
가지므로 함수 $f(x)$ 가 가질 수 있는 그래프 개형은
3가지이다.



첫 번째 개형의 경우, $\beta(t) > \alpha(t) > 2$ 인 경우가 생기므로
두 실근의 곱이 양수이고, 조건에 위배된다.



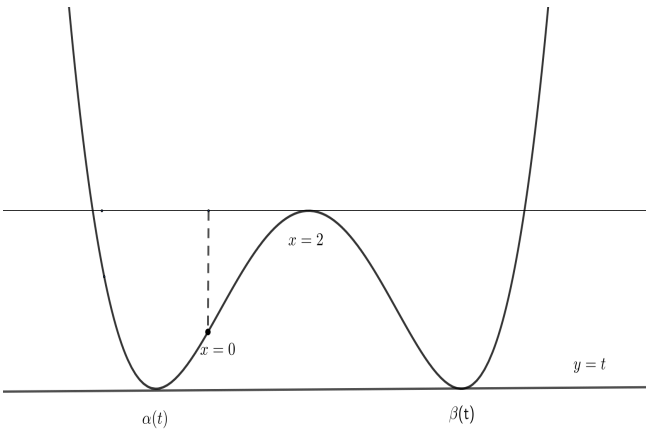
두 번째 개형의 경우 $\alpha(t), \beta(t)$ 의 부호가 달라야 하므로
 $x=0$ 에서 극솟값을 가져야 한다. 따라서

$$f'(x)=\frac{1}{3}x(x-2)(x-p),\ (2<p<4)$$

이라 할 수 있다. 이때

$$f'(5)=5(5-p)\ \rightarrow\ 5<f'(5)<15$$

이다. 따라서 $f'(5)$ 의 값으로 가능한 자연수의 합은
90이다.



세 번째 개형의 경우 두 실근의 부호가 다르기 위해서는
0보다 작은 곳에서 극솟값을 가져야 한다. 따라서

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x-2+s)(x-2)(x-2-s),\ (s>2)$$

라 할 수 있다. 이때

$$f'(5)=9-s^2\ \rightarrow\ f'(5)<5$$

이다. 따라서 $f'(5)$ 의 값으로 가능한 자연수의 합은
10이다.

세 가지의 경우를 종합하였을 때,
 $f'(5)$ 의 값으로 가능한 자연수의 합은 100이다.

14. 양의 실수 b 와 k 에 대하여 역함수를 갖는 함수 $f(x)=b \times k^x$ 가 존재한다. a_1 이 자연수이고, $a_m=0$ 인 자연수 m 이 존재하는 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \begin{cases} f(n) & (a_n \geq n) \\ f^{-1}(n) & (a_n < n) \end{cases}$$

이고, $a_3=3$ 을 만족시킨다. a_1 이 최소가 되게 하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(4)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

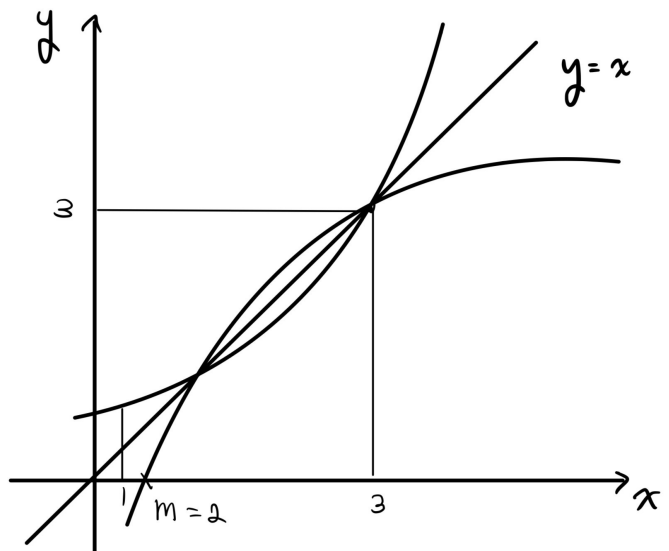
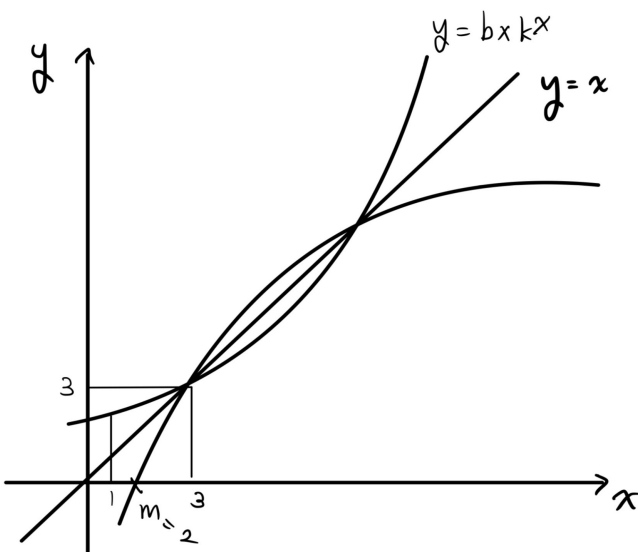
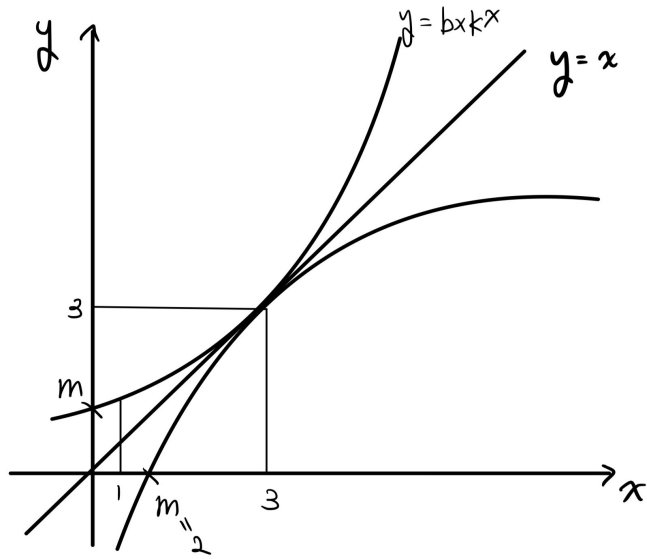
답 : ④

해설

양의 실수 k 의 값에 따라 경우를 나누어서 살펴보자.

1) $k=1$ 인 경우 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하지 않으므로 모순이다.

2) $k>1$ 인 경우 아래와 같이 세 가지의 개형이 가능하다.



a_1 이 자연수이며, $a_3=3$ 이므로 세 가지의 개형 모두 $m=2$ 로 확정되는 것을 파악할 수 있다. 이때 대칭성에 의하여

$$f(0)=m \rightarrow b=m=2$$

이다. 또한 $a_3=3$ 이므로

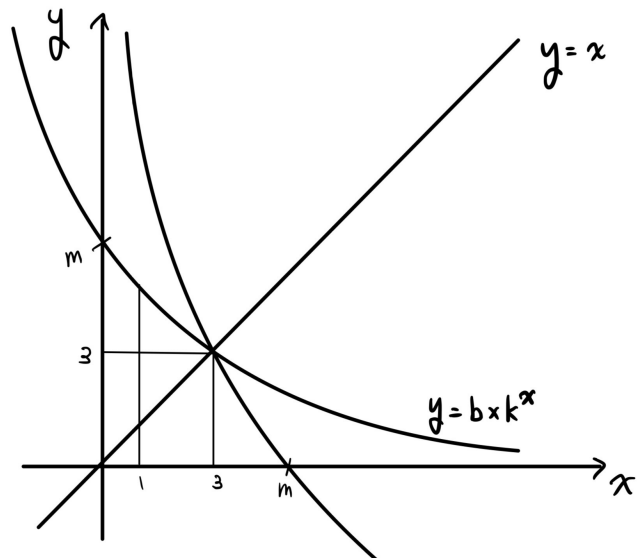
$$f(3)=3 \rightarrow bk^3=3 \rightarrow k=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

이다. 하지만, 조건에 의하여 a_1 은 자연수여야 한다.

$$a_1=bk=2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

이므로 이는 모순이다. 따라서 $k<1$ 이다.

3) $0<k<1$ 인 경우 아래와 같은 개형이 가능하다.



이때 대칭성에 의하여 $f(0)=b=m$ 이고 문제의 조건에 의하여

$$a_3 = bk^3 = 3 = mk^3$$

이다. 또한

$$a_1 = bk = mk$$

이므로 양변을 세제곱하여 위의 두 식을 정리하면

$$(a_1)^3 = m^3k^3 = m^2(mk^3) = 3m^2$$

이다. a_1 이 자연수여야 하므로 자연수 m 은 다음과 같은 꼴이어야 한다.

$$m = 3 \times p^3 \text{ (} p \text{는 자연수)}$$

문제의 조건 및 그래프의 특성상 $m \geq 4$ 이므로 p 는 1보다 큰 자연수가 가능하다. 따라서 자연수 m 은 p 가 2일 때 최솟값 $m=24$ 를 가진다. 결론적으로

$$b = m = 24$$

$$3 = mk^3 = 24k^3 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

이고

$$f(x) = 24 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow f(4) = \frac{3}{2}$$

이다.

Memo

15. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 최솟값 $m(m < 0)$ 을 가질 때, m 보다 큰 실수 t 에 대하여 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 곱을 $g(t)$ 라 하자. $h(t) > 0$ 인 실수 t 가 존재하는 함수

$$h(t) = \begin{cases} g(t) & (t > m) \\ 0 & (t \leq m) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족할 때, m 의 최댓값은? [4점]

(가) $\lim_{t \rightarrow \alpha} h(t)$ 의 값은 α 가 0이 아닌 실수일 때 존재한다.

(나) $4 \lim_{t \rightarrow 0+} h(t) = 9 \lim_{t \rightarrow 0-} h(t)$

- ① $-\frac{256}{243}$ ② $-\frac{128}{243}$ ③ $-\frac{32}{81}$ ④ $-\frac{64}{243}$ ⑤ $-\frac{32}{243}$

답 : ⑤

해설

(가) 조건에서 $\alpha = m$ 을 대입하면

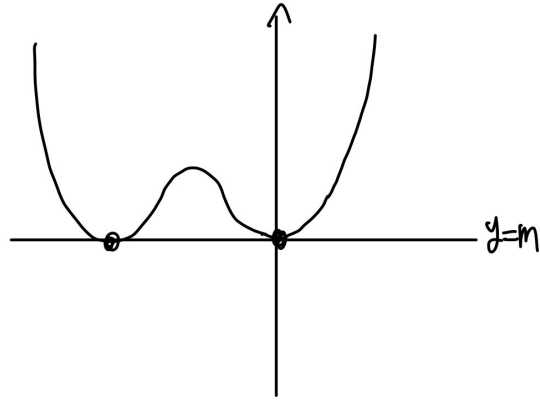
$$\lim_{t \rightarrow m+} h(t) = g(m), \quad \lim_{t \rightarrow m-} h(t) = 0$$

$$\rightarrow g(m) = 0$$

을 얻는다. 따라서 $f(x)=m$ 의 실근의 곱이 0이므로 $f(0)=m$ 이다.

이때 (나) 조건에 의해 $f(x)$ 는 극댓값을 가져야 한다. 또한 $h(t) > 0$ 인 t 가 존재하기 위해서 $f(x)$ 는 $x < 0$ 인 x 에서 극댓값을 갖는다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프 개형을 두 가지로 나누어 생각해 볼 수 있다.

케이스 1



첫 번째 경우는 (나) 조건에 의해 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 0인 경우이다.

$f(x)=0$ 의 세 실근을 작은 순서대로 a, b, c 라고 하면

$$\lim_{t \rightarrow 0+} h(t) = ac, \quad \lim_{t \rightarrow 0-} h(t) = ab^2c$$

이므로 $4ac = 9ab^2c$ 이고 $b = -\frac{2}{3}$ 이다. 따라서

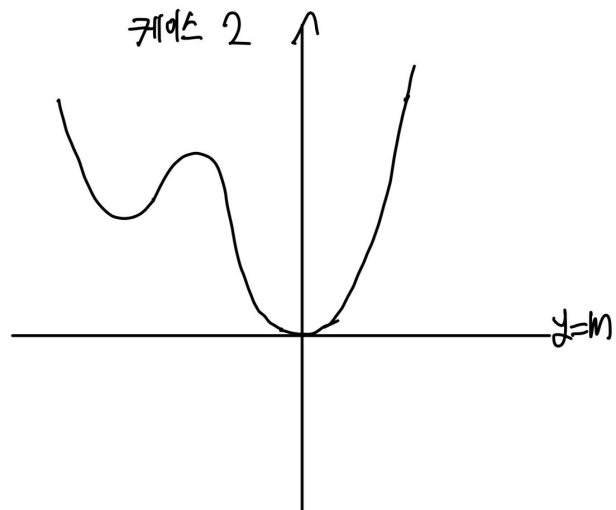
$$f'(x) = 4x(x + \frac{2}{3})(x + \frac{4}{3})$$

이고 m 의 값을 계산하면

$$m = f(0) = \int_{-\frac{2}{3}}^0 f'(x) dx = -\frac{16}{81}$$

이다.

케이스 2



두 번째 경우는 (나) 조건에 의해 함수 $f(x)$ 의 극댓값 또는 극솟값이 0인 경우이다.

1) 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 0인 경우 $f(x)=0$ 의 세 실근을 작은 순서대로 a, b, c 라고 하면

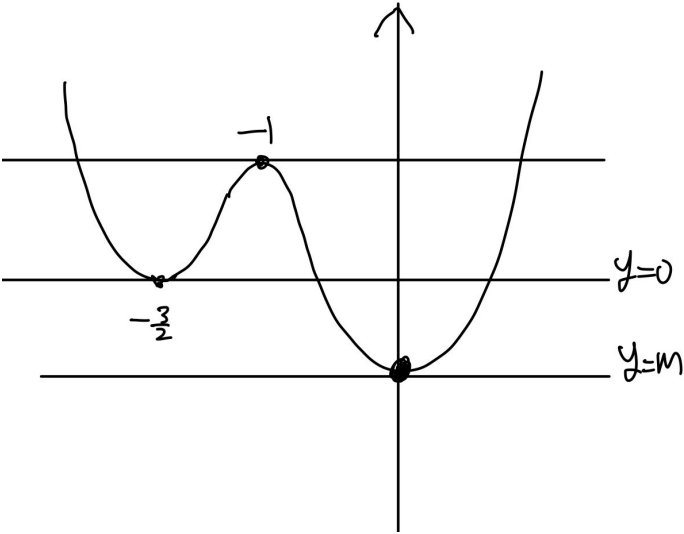
$$\lim_{t \rightarrow 0+} h(t) = ab^2c, \quad \lim_{t \rightarrow 0-} h(t) = ac$$

이므로 $4ab^2c = 9ac$ 이고 $b = -\frac{3}{2}$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값을 M 이라고 할 때 $f(x)=M$ 의 세 실근을 p, q, r 라고 하면, (가) 조건에 의하여 $\lim_{t \rightarrow M} h(t)$ 의 값이 존재해야 한다. 따라서,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} h(t) = pr, \quad \lim_{t \rightarrow 0-} h(t) = pq^2r$$

이므로 $q = -1$ 이다.



이때

$$f'(x) = 4x(x + \frac{3}{2})(x + 1)$$

이고,

$$m = f(0) = \int_{-\frac{3}{2}}^0 f'(x) dx = -\frac{9}{16}$$

이다.

2) 다른 경우들과 마찬가지로 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 0인 경우 $f(x)=0$ 의 세 실근을 a, b, c 라고 하면

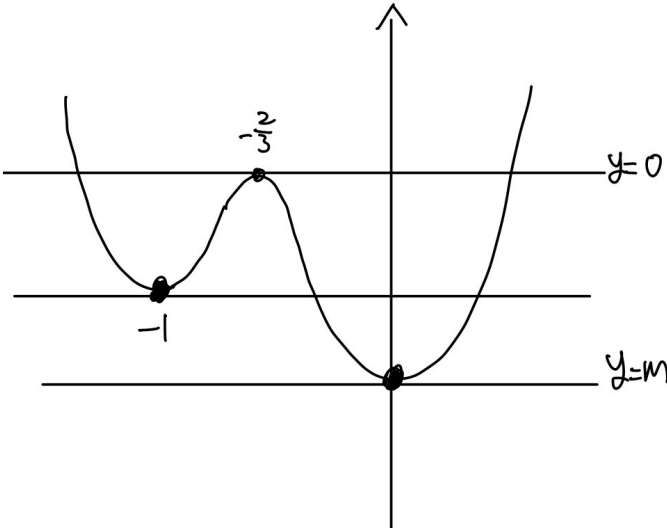
$$\lim_{t \rightarrow 0+} h(t) = ac, \quad \lim_{t \rightarrow 0-} h(t) = ab^2c$$

이므로 $4ac = 9ab^2c$ 이고 $b = -\frac{2}{3}$ 이다.

또한 $f(x)$ 의 극솟값을 M 이라고 할 때 $f(x)=M$ 의 세 실근을 p, q, r 라고 하면

$$\lim_{t \rightarrow 0+} h(t) = pr, \quad \lim_{t \rightarrow 0-} h(t) = pq^2r$$

이므로 $q = -1$ 이다.



이때

$$f'(x) = 4x(x + \frac{2}{3})(x + 1)$$

이고

$$m = f(0) = \int_{-\frac{2}{3}}^0 f'(x) dx = -\frac{32}{243}$$

이다.

따라서 구하는 m 의 최댓값은 $-\frac{32}{243}$ 이다.

18. 수열 $\{a_n\}$ 에 대해 $a_n = \frac{m+1}{n(n+1)}$ 이다. $b_m = \sum_{n=1}^m a_n$ 일 때,

$\sum_{m=1}^{10} b_m$ 을 구하시오. [3점]

답 : 55

해설

수열 $\{b_m\}$ 을 m 에 대해 정리하면

$$\begin{aligned} b_m &= \sum_{n=1}^m a_n \\ &= (m+1) \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)} \\ &= (m+1) \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = m \end{aligned}$$

이다.

따라서 $\sum_{m=1}^{10} b_m = 55$ 이다.

19. 실수 전체의 집합에서 정의된 이차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{xf'(x) - f(x)} = 2$$

를 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

답 : 14

해설

주어진 식

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$$

을 통해 이차함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(x) = (x-1)\{p(x-1)+3\}$$

또한, 주어진 식

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{xf'(x) - f(x)} = 2$$

에 의하여

$$p = 2$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$f(3) = 2 \times (2 \times 2 + 3) = 14$$

이다.

20. 세 실수 $a(a > 0)$, b , $k(k > 0)$ 에 대하여 시각 $t=0$ 일 때, 점 $A(k)$ 에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t(t > 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

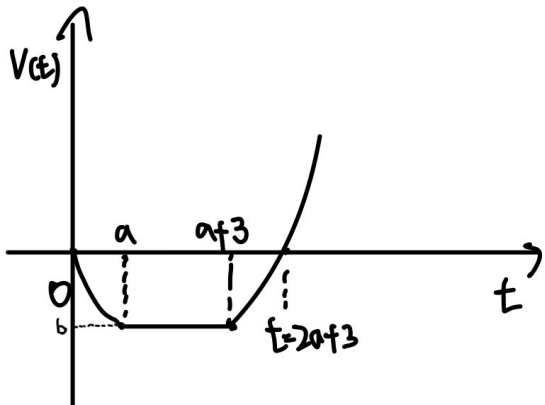
$$v(t) = \begin{cases} \frac{4}{21}t(t-2a-3) & (0 \leq t \leq a \text{ 또는 } t \geq a+3) \\ b & (a < t < a+3) \end{cases}$$

이다. $v(a)=b$ 이고, 점 P 가 $t=k$ 에서만 원점을 지날 때, $70(a+b+k)$ 의 값을 구하시오. (단, a , b , k 는 상수이다.) [4점]

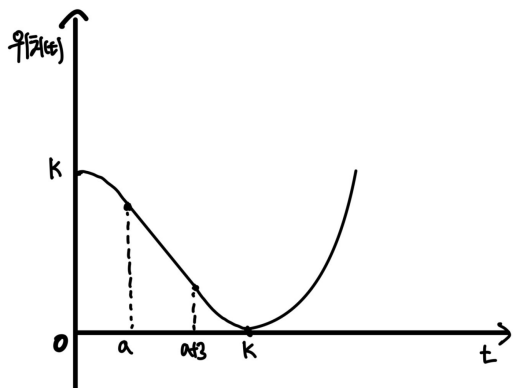
답 : 435

해설

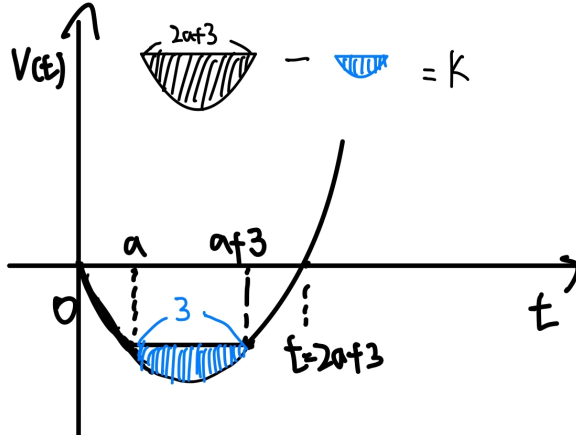
$v(a)=b$ 이므로 함수 $v(t)$ 는 연속이다. 따라서 $y=v(t)$ 의 그래프는 아래와 같다.



또한 $t=k$ 일 때만 점 A 가 원점을 지나므로 점 A 의 (위치 - 시간) 그래프는 아래와 같다.



따라서 $k=2a+3$ 이고 $\int_0^k v(t)dt = -k$ 이다.



위 그림처럼 넓이 공식을 이용해 계산하면

$$\int_0^k v(t)dt = -\left(\frac{4}{21} \times \frac{(2a+3)^3}{6} - \frac{4}{21} \times \frac{3^3}{6}\right) = -k$$

이고, $k=2a+3$ 을 대입하여 k 의 값을 구하면

$$k=6, a=\frac{3}{2}$$

이다. $v(a)=b$ 이므로

$$b=-\frac{9}{7}$$

이고, $70(a+b+k)=435$ 이다.

21. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 양의 실수 m 에 대하여

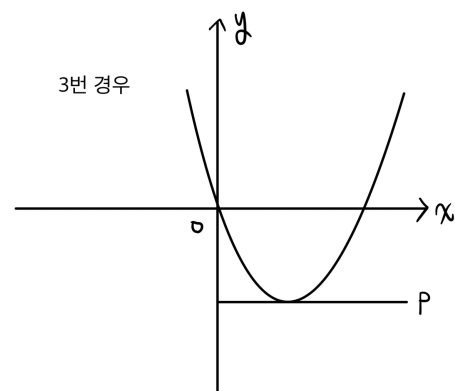
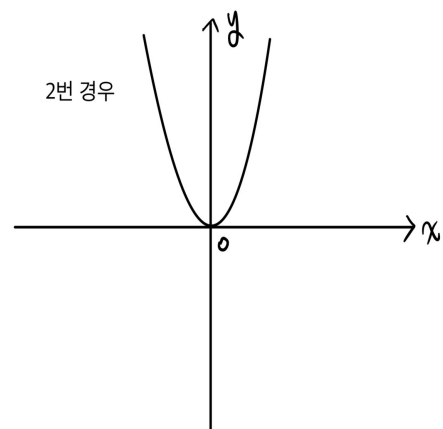
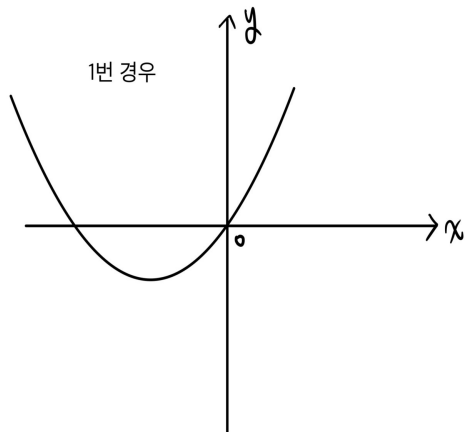
$$f(x) = \frac{m}{t}(x-t) \quad (t > 0)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자. $f(0)=0$ 이고, 함수 $g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속이 되도록 하는 양의 실수 k 가 존재하지 않는다. 가능한 m 의 값들 중 최댓값이 9일 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오. [4점]

답 : 16

해설

문제의 조건에 의하여 모든 양의 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)$ 와 직선 $y = \frac{m}{t}x - m$ 의 교점의 개수가 일정해야 한다. $f(0)=0$ 이므로 가능한 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 의 개형은 아래 세 가지뿐이다.



1) 1번 경우를 살펴보면, $m > 0$ 이면 함수 $g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속이 되도록 하는 양의 실수 k 가 존재하므로 주어진 조건에 모순이다.

2) 2번 경우도 1번 경우와 마찬가지로 $m > 0$ 이면 함수 $g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속이 되도록 하는 양의 실수 k 가 존재하므로 주어진 조건에 모순이다.

3) 마지막으로 3번 경우를 살펴보자. 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 p 라고 할 때

- $-m < p$ 이면, 어떤 실수 t 에 대하여 직선

$$y = \frac{m}{t}x - m \text{이 이차함수 } f(x) \text{와 접한다. 따라서 함수}$$

$g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속이 되도록 하는 양의 실수 k 가 존재하지 않는다는 조건에 모순된다.

- $-m \geq p$ 이면, 모든 양의 실수 t 에 대하여 $g(t)$ 의 값이 2이므로 함수 $g(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속이 되도록 하는 양의 실수 k 가 존재하지 않는다는 조건을 만족시킬 수 있고, 이 때 m 의 최댓값은 9이므로 $p = -9$ 이다.

따라서, 이차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이며 $f(0)=0$, 최솟값이 -9 이므로

$$f(x) = x(x-6) \rightarrow f(8) = 16$$

이다.

InfinitY Comment

직선 $y = \frac{m}{t}(x-t)$ 를 움직이면서 이차함수 $f(x)$ 와의 교점의 개수를 파악하려고 하면 기울기와 x 절편이 모두 변수이기에 어려움을 겪을 것이다. 따라서 변수의 개수를 줄여주어야 한다. 따라서 주어진 식을 $y = \frac{m}{t}x - m$ 로 변형하여 실수 m 을 고정한 상태로 변수 t 를 움직이면서 교점 개수를 파악하면 문제를 더 쉽게 해결할 수 있다.

22. a_1 이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 다음과 같다.

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 + 3 & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{a_n}{2} & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

$\sum_{k=1}^{95} a_k$ 가 홀수가 되게 하는 a_1 을 작은 것부터 순서대로 나열한

수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때 $\sum_{k=1}^9 b_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

답 : 188

해설

수열 $\{a_n\}$ 이 a_n 의 홀짝성에 따라 정의되고 있으므로
항들의 홀짝성에 관한 규칙을 파악하는 것이 필요하다.

먼저, a_m 을 홀수라고 하면, 수열의 정의에 따라
 $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$ 을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_m = 2k - 1 \text{ (단, } k \text{는 자연수)}$$

$$a_{m+1} = 4k^2 - 4k + 4$$

$$a_{m+2} = 2k^2 - 2k + 2$$

$$a_{m+3} = k^2 - k + 1$$

이다. 이때, a_{m+3} 을 살펴보면

$$k^2 - k + 1 = k(k-1) + 1$$

에서 $k(k-1)$ 은 짝수이므로, a_{m+3} 은 홀수이다.

즉, a_m 이 홀수일 때 아래의 표와 같이 3주기를 갖고
홀/짝/짝의 규칙이 있다는 것을 파악할 수 있다.

a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	a_{m+3}	a_{m+4}	a_{m+5}	a_{m+6}
홀	짝	짝	홀	짝	짝	홀

수열 $\{a_n\}$ 의 규칙을 파악하였으니 a_1 의 특징에 따라
' $\sum_{k=1}^{95} a_k$ 가 홀수가 되게 하는'의 조건을 만족하는지
살펴보자. (단, k 는 자연수)

1) $a_1 = 2k - 1$ 인 경우

a_1 이 홀수이므로 $a_1 + a_2 + a_3$ 은 홀수이다. 따라서
주기성에 의해 $\sum_{k=1}^{93} a_k$ 는 홀수이다. 주기성에 의해 a_{94} 는
홀수이고, a_{95} 는 짝수이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{95} a_k$ 는 짝수 $\rightarrow$ 조건을 만족시키지 못한다.

2) $a_1 = 2(2k - 1)$ 인 경우

a_1 이 2의 배수이지만 4의 배수는 아닌 경우로, a_2 부터
규칙을 가진다. $\sum_{k=1}^{94} a_k$ 가 홀수이고, 주기성에 의해 a_{95} 도
홀수이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{95} a_k$ 는 짝수 $\rightarrow$ 조건을 만족시키지 못한다.

3) $a_1 = 4(2k - 1)$ 인 경우

a_1 이 4의 배수이지만 8의 배수는 아닌 경우로, a_3 부터
규칙을 가진다.

$\therefore \sum_{k=1}^{95} a_k$ 는 홀수 $\rightarrow$ 조건을 만족시킨다.

1), 2), 3)에 따라 $\sum_{k=1}^{95} a_k$ 의 홀짝성은 a_1 이 2를 인수로
가진 개수 달라진다는 것을 파악할 수 있고, 이를 아래의
표로 정리해보았을 때 $\sum_{k=1}^{95} a_k$ 의 홀짝성은 3주기를 가지게
됨을 알 수 있다.

a_1 꼴	$\sum_{k=1}^{95} a_k$ 의 홀짝성
$2k - 1$	짝수
$2(2k - 1)$	짝수
$4(2k - 1)$	홀수
$8(2k - 1)$	홀수
$16(2k - 1)$	홀수
$32(2k - 1)$	짝수
$64(2k - 1)$	짝수
$128(2k - 1)$	짝수
$256(2k - 1)$	홀수

위의 표의 내용을 정리하면 아래와 같다.

가능한 a_1 꼴	가능한 a_1 의 값
$4(2k-1)$	4, 12, 20, 28, 36, 44 ...
$8(2k-1)$	8, 24, 40, 56 ...
$16(2k-1)$	16, 48, 80 ...
$256(2k-1)$	256, 768 ...
$\vdots$	$\vdots$

수열 $\{b_n\}$ 은 $\sum_{k=1}^{95} a_k$ 가 홀수가 되게 하는 a_1 을 작은 것부터 순서대로 나열한 것이므로 위에 표에 따라 $\{b_n\}$ 의 각 항들의 값을 알 수 있다. 따라서 $\sum_{k=1}^9 b_k$ 의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^9 b_n &= 4+8+12+16+20+24+28+36+40 \\ &= 188\end{aligned}$$

InfinitY Comment

수열 $\{a_n\}$ 이 a_n 의 홀짝성에 따라 정의되고 있으므로 항들의 홀짝성에 관한 규칙을 파악하려고 시도해야 한다. a_1 이 자연수라는 조건으로부터 a_1 을 가정하고 수열을 나열하면, a_n 이 홀수일 때 주기적 성질이 나타남을 파악할 수 있으며 이를 바탕으로 일반화하여 답을 구할 수 있다.

(기우성이라는 표현이 있지만 이해의 편리함을 위해 홀짝성이라는 표현을 사용하였습니다.)

Memo

28. 오직 한 점에서만 불연속인 함수 $f(x)$ 가 실수 전체 집합에서

$$(f(x) - e^{x-a} - b)(f(x) - \ln(x-b) - a) = 0 \quad (b \geq 0)$$

을 만족하고, 일차함수 $g(x)$ 에 대하여 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $h(x) = \lim_{t \rightarrow x+} \frac{g(t)}{f(t)}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$$

(나) 방정식 $h(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

$$\lim_{x \rightarrow e^{-2}} \frac{f(x) + 1}{e^2 x - 1} = 1 \text{ 일 때, 곡선 } y = f(x) \text{ 와 직선 } y = g(x) \text{ 의}$$

서로 다른 교점의 개수가 2가 되도록 하는 직선 $y = g(x)$ 의 기울기의 최댓값과 최솟값의 합은?

(단, a 와 b 는 상수이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0$ 이다.) [4점]

- ① $e-2$ ② $e-1$ ③ $2e-2$ ④ $2e-1$ ⑤ $2e$

답 : ②

해설

$$\text{먼저 } \lim_{x \rightarrow e^{-2}} \frac{f(x) + 1}{e^2 x - 1} = 1 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow e^{-2}} f(x) = -1 \text{ 이다.}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow e^{-2}} e^{x-a} + b > 0 \text{ 이므로 극한값이 } -1 \text{ 이 될 수}$$

없다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow e^{-2}} \ln(x-b) + a = \ln(e^{-2} - b) + a = -1$$

이다.

미분계수의 정의를 이용해 극한을 계산하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow e^{-2}} \frac{f(x) + 1}{e^2 x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow e^{-2}} \frac{\ln(x-b) + a + 1}{x - \frac{1}{e^2}} \times \frac{1}{e^2} = \frac{1}{(e^{-2} - b)e^2} = 1 \end{aligned}$$

이므로 $b=0$ 이다. 이를 $\ln(e^{-2} - b) + a = -1$ 에 대입하면 $a=1$ 이다.

이를 정리하면 $f(x) = e^{x-1}$ 또는 $f(x) = \ln x + 1$ 이다.

이때 함수 $y = \ln x + 1$ 은 $x < 0$ 일 때는 정의되지

않으므로 $x < 0$ 인 구간에서는 $f(x) = e^{x-1}$ 이다. 또한

$x = e^{-2}$ 근처에서는 $f(x) = \ln x + 1$ 임을 확인했으므로

구간 $0 \leq x < e^{-2}$ 에서 불연속인 점이 하나 생긴다.

따라서 $f(e^{-2}) = -1$ 이고 $f(\frac{1}{e}) = 0$ 이다. 이때

$x = \frac{1}{e}$ 에서 $h(x)$ 가 정의되기 위해 $g(\frac{1}{e}) = 0$ 이다.

따라서 $g(x) = m(x - \frac{1}{e})$ 라고 하면

$$\begin{aligned} h(\frac{1}{e}) &= \lim_{x \rightarrow e^{-1}+} \frac{m(x - e^{-1})}{\ln x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow e^{-1}+} \frac{m}{\frac{\ln x + 1}{x - e^{-1}}} = \frac{m}{e} \neq 0 \end{aligned}$$

이다.

따라서 $h(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)}{\ln x + 1} = 0$ 이 되어야 $h(x) = 0$ 이

실근을 갖게 된다.

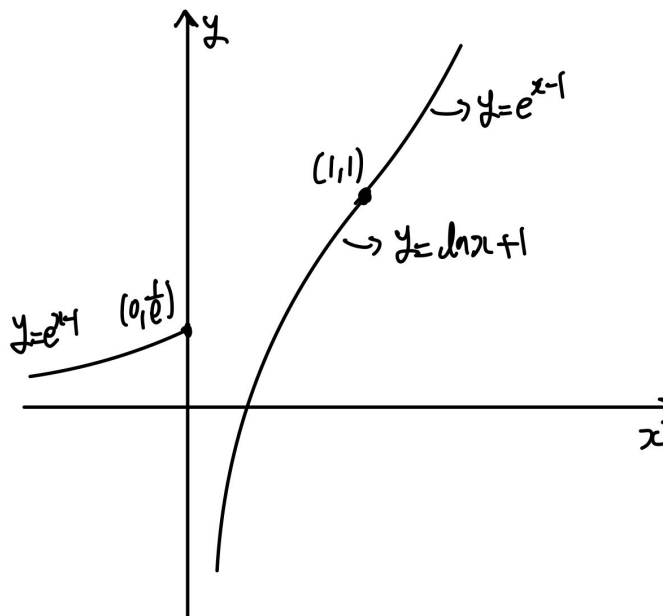
마지막으로 (가) 조건에 의해 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ 이고, 불연속

점은 발문 조건에 의해 더 이상 생기면 안되므로

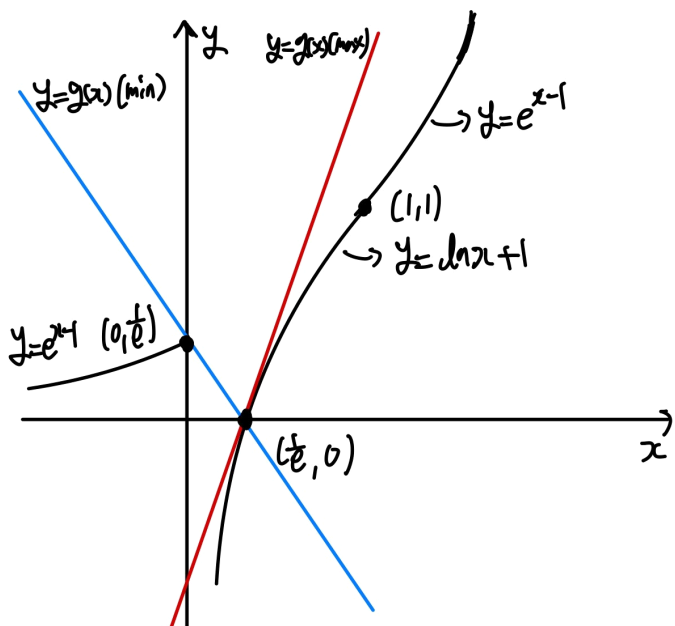
$y = e^{x-1}$ 과 $\ln x + 1$ 의 유일한 교점인 $x=1$ 에서 함수가 바뀌며

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & (x \leq 0, x > 1) \\ \ln x + 1 & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

가 될 것이고, 그래프는 아래와 같다.



Memo

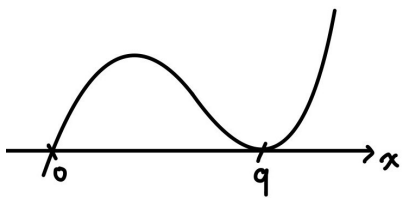


$g(x)$ 의 그래프는 $(\frac{1}{e}, 0)$ 을 지나는 직선이므로 $f(x)$ 와
 두 교점을 갖는 m 의 최솟값과 최댓값은 각각 $(0, \frac{1}{e})$ 을
 지날 때, $(\frac{1}{e}, 0)$ 에서 $f(x)$ 에 접할 때이므로 최솟값과
 최댓값은 각각 $-1, e$ 이다. 따라서 구하는 m 의 최솟값과
 최댓값의 합은 $e-1$ 이다.

- 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 단일근을 갖는 경우

따라서, 이 경우가 정답 상황이다. 자세하게 살펴보자.
 $x=0$ 에서 단일근을 가지며, $f(9)=0$ 을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는 다음 2가지의 경우가 가능하다.

(1) $f(x)=0$ 의 서로 다른 근이 2개인 경우



자연수 p 에 대하여 $a_p=9$ 인 항이 존재한다면

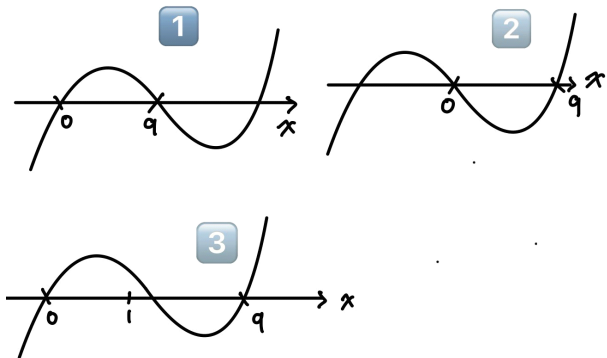
$$\{n \mid b_n \times b_{n+1} \leq 0\} = \{p-1, p\}$$

이고, 자연수 p 에 대하여 $a_p=9$ 인 항이 존재하지 않는다면

$$\{n \mid b_n \times b_{n+1} \leq 0\} = \emptyset$$

이므로, $f(x)=0$ 의 서로 다른 근이 2개인 경우는 (나) 조건을 만족할 수 없다.

(2) $f(x)=0$ 의 서로 다른 근이 3개인 경우



먼저 2번 경우는 $f(1) > 0$ 이라는 문제 조건에 모순이므로 불가능하다.

- 1번 개형

r 이 1이 아닌 자연수이므로

$$a_3 = a_1 \times \left(-\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{33}{r^2} \leq \frac{33}{4} < 9$$

이고, 따라서,

$$\{n \mid b_n \times b_{n+1} \leq 0\} = \emptyset$$

이다. 이는 (나) 조건에 의해 모순이다.

- 3번 개형

1, 2번 개형이 모두 모순이므로 3번 개형이 정답 상황이다. 3번 개형을 살펴보자. (나) 조건에 의해

$$\{n \mid b_n \times b_{n+1} \leq 0\} = \{n \mid 2 \leq n \leq 5, n \text{은 자연수}\}$$

를 만족해야 하므로

$$1 < a_3 \leq 9, 1 < a_5 \leq 9$$

를 만족해야 한다. 이를 정리하면

$$\frac{1}{33} < \left(-\frac{1}{r}\right)^4 \leq \left(\frac{9}{33}\right)^2$$

이며,

$$13 < \left(\frac{33}{9}\right)^2 \leq r^4 < 33$$

이므로 이를 만족하는 자연수 r 은 2이다. 따라서 $r=2$ 일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{33}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{33}{\frac{3}{2}} = 22$$

이다.

30. 상수 $a(a > 0)$ 에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 존재하고, 함수

$$g(x)=\begin{cases} \sin x-a & (x\geq 0) \\ a\cos x & (x<0) \end{cases}$$

가 존재한다. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수 $h(x)=f(g(x))$ 가 $x=\alpha$ 에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 α 의 값들 중 구간 $(-2\pi,\frac{3}{2}\pi)$ 에 속하는 값들을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 이라 할 때, $\alpha_1+\alpha_5=-\frac{3}{2}\pi$ 를 만족한다. $f(a)=0$ 일 때, $m\times h(\alpha_6)$ 의 값을 구하시오. (단, m 은 자연수) [4점]

답 : 4

해설

함수 $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\rightarrow 0^+}f(g(x))=\lim_{x\rightarrow 0^-}f(g(x))$$

이다. 따라서

$$\lim_{x\rightarrow -a^+}f(x)=\lim_{x\rightarrow a^-}f(x)$$

이므로 $f(-a)=f(a)$ 이다. 또한

$$h'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

이므로

$$\lim_{x\rightarrow 0^+}g'(x)f'(g(x))=\lim_{x\rightarrow 0^-}g'(x)f'(g(x))$$

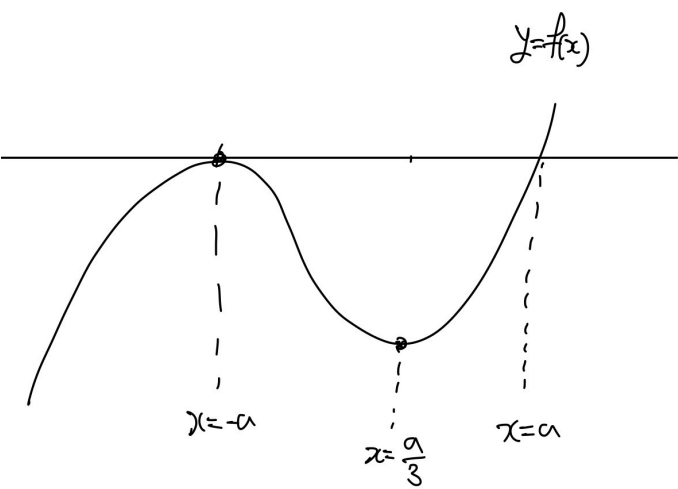
이다. 이때

$$\lim_{x\rightarrow 0^+}g'(x)f'(g(x))=f'(-a)$$

$$\lim_{x\rightarrow 0^-}g'(x)f'(g(x))=0$$

이므로 $f'(-a)=0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다. ($a > 0$)



함수 $h(x)$ 가 극대 또는 극소인 점은 $x=0, g(x)=-a, g(x)=\frac{a}{3}, g'(x)=0$ 일 때이다.

구간 $(-2\pi,\frac{3}{2}\pi)$ 에서 함수 $g(x)$ 의 개형을 그려보면 a 의 크기에 따라 세 가지 경우가 나온다.

