아드레날린 ex
공통

1. 함수 $f(x)=x^2-4x+5$와 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+a)+b & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 실수 t에 대하여
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를
$h(t)$라 하자.

$$\left| \lim_{t \to k+} h(t) - \lim_{t \to k-} h(t) \right| = 2$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 1, 4, 5일 때,
$g(-4)$의 값은? 〔2025년 7월 13〕

① 9　　② 10　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13

1. 정답 ⑤ 〔2025년 7월 13〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x) = x^2 - 4x + 5$가 있는데 $g(x) = \begin{cases} f(x+a) + b & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이랍니다.

지금 보면 $x = 0$을 제외하고는 다 다항함수니까 연속이죠? $x = 0$에서만 연속인지 확인해보면 되겠네요.
좌극한과 우극한이 같아야 하므로 $f(a) + b = a^2 - 4a + 5 + b = f(0) = 5$이고 $a^2 - 4a + b = 0$입니다.

그럼 $g(x)$라는 함수는 $x \geq 0$에서는 $f(x)$ 그대로 두고, $x < 0$에서는 $f(x)$를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 움직인 후, $x = 0$에서 5라는 값이 갖게 한 함수겠네요.

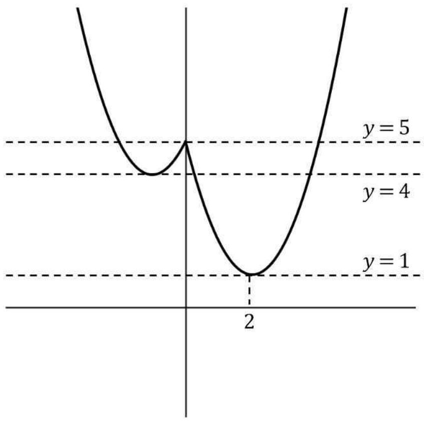
2) 문제 해석, 함수 극한의 논리

이때 $y = g(x)$ 그래프와 x축에 평행한 $y = t$라는 직선을 그었을 때 만나는 점의 개수가 $h(t)$라고 하네요. 이때 $\left| \lim_{t \to k+} h(t) - \lim_{t \to k-} h(t) \right| = 2$인 k가 1, 4, 5라고 합니다.

일단 $\left| \lim_{t \to k+} h(t) - \lim_{t \to k-} h(t) \right| = 2$의 의미부터 해석해볼게요. 결국 $\lim_{t \to k+} h(t)$는 $y = k$보다 아주 살짝 위에 있는 $y = k+$라는 직선을 그었을 때 $y = g(x)$와 만나는 점의 개수죠? $\lim_{t \to k-} h(t)$는 반대로 $y = k$보다 아주 살짝 아래에 있는 $y = k-$라는 직선을 그었을 때 $y = g(x)$와 만나는 점의 개수이구요. 일반적인 경우라면 이 두 값은 같아야 해요. 살짝 위든 살짝 아래든 만나는 점의 개수가 달라질 리가 없잖아요. 이게 가능하기 위해서는 $g(x)$가 $y = t$라는 극댓값 또는 극솟값을 가져야 합니다.

그 y값이 지금 1, 4, 5라는 거잖아요? 일단 $y = 5$는 $f(0) = g(0) = 5$의 값이죠? 그럼 일단 $x = 0$을 의심해봐야 하구요. 그리고 $x \geq 0$일 때 $g(x) = x^2 - 4x + 5$인데 $x = 2$에서 극솟값 1을 가지네요. 마침 조건을 만족시키는 y값에 1이 포함되어 있죠?

그러면 마지막 4는 뭘까요? $x < 0$에서 $g(x) = f(x+a) + b$가 가져야 할 극솟값을 말하는 거 아닐까요? 대충 그래프를 그려보면



이런 느낌이 되는 거죠.

$a^2-4a+5+b=5$이고 $b=-a^2+4a$이므로 $x<0$에서 $g(x)=(x+a)^2-4(x+a)-a^2+4a+5$이고

$g(x)=x^2+2ax-4x+5$이네요. 미분하면 $g'(x)=2x+2a-4$이므로 $x=2-a$에서 극솟값을 갖습니다.

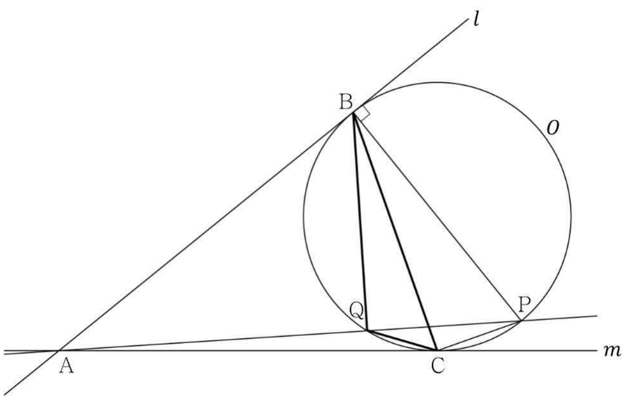
$x=2-a$를 $g(x)=(x+a)^2-4(x+a)-a^2+4a+5$에 넣으면 4라는 값이 나와야겠죠? 넣어보면

$g(2-a)=-a^2+4a+1=4$이고 $a^2-4a+3=(a-1)(a-3)=0$입니다.

지금 $x<0$에서 $g(x)$는 $f(x)$를 x축의 방향으로 $-a$만큼 움직였잖아요? $x>0$에서 극소가 되는 x좌표가 2였는데 우리가 그린 그래프처럼 $x<0$에서도 극소가 되는 점이 있기 위해서는 최소한 2보다는 더 움직여야 합니다. 따라서 $a=3$이네요. $g(x)=x^2+2x+5$입니다.

$g(-4)$의 값을 구하라고 하네요. 값은 $g(-4)=13$입니다. 답은 ⑤번이네요.

2. 그림과 같이 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원 O의 외부에 있는 점 A에서 원 O에 그은 두 접선을 각각 l, m이라 하고, 두 직선 l, m이 원 O와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 B를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 원 O와 만나는 두 점 중에서 B가 아닌 점을 P, 직선 AP가 원 O와 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=12$일 때, $\sin(\angle \mathrm{BPQ}) : \sin(\angle \mathrm{QPC}) = 3:1$이다. 삼각형 BQC의 넓이는? 〔2025년 7월 14〕



① $\dfrac{14\sqrt{2}}{3}$　　② $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$　　③ $6\sqrt{2}$

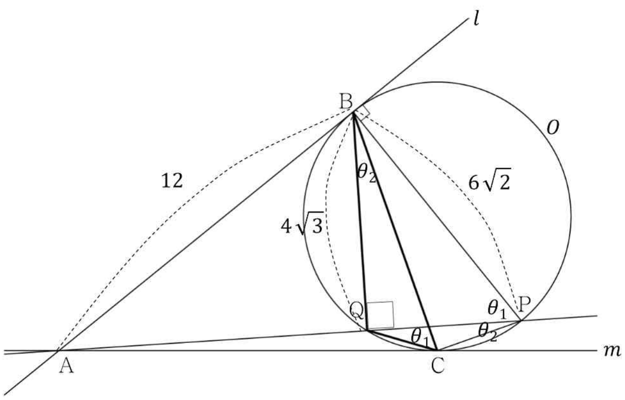
④ $\dfrac{20\sqrt{2}}{3}$　　⑤ $\dfrac{22\sqrt{2}}{3}$

2. 정답 ② 〔2025년 7월 14〕

1) 문제해석

일단 주저리주저리 써놨는데 표시해놓을 거 표시해볼게요. 일단 원에 접하는 선 l에 수직인 선을 그었으니 $\overline{\mathrm{BP}}=6\sqrt{2}$는 지름이네요? 그럼 $\angle\mathrm{PQB}$는 직각입니다. 이러면 삼각형 ABP, ABQ, QBP 모두 닮음이잖아요? $\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{BQ}}$입니다. 그러면 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{QP}}^2+\overline{\mathrm{BQ}}^2=(6\sqrt{2})^2$이고 정리하면 $\overline{\mathrm{QP}}=2\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{BQ}}=4\sqrt{3}$입니다.

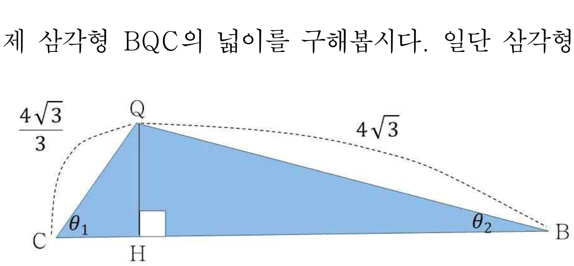
그리고 원주각도 활용할 수 있겠네요. $\angle\mathrm{BPQ}=\angle\mathrm{BCQ}$, $\angle\mathrm{QBC}=\angle\mathrm{QPC}$입니다. 근데 $\sin(\angle\mathrm{BPQ}):\sin(\angle\mathrm{QPC})=3:1$이라고 했네요? 바로 써먹으면 되겠어요. 일단 $\angle\mathrm{BPQ}=\angle\mathrm{BCQ}=\theta_1$, $\angle\mathrm{QBC}=\angle\mathrm{QPC}=\theta_2$라고 해볼게요. 그럼 $\sin\theta_1=3\sin\theta_2$입니다.



이때 삼각형 BCQ, BPQ 모두 원에 내접하는 삼각형이잖아요? 따라서 $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin\theta_1}=\dfrac{\overline{\mathrm{QC}}}{\sin\theta_2}=2\mathrm{R}=6\sqrt{2}$입니다.

$\sin\theta_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin\theta_2=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$, $\overline{\mathrm{QC}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$입니다.

이제 삼각형 BQC의 넓이를 구해봅시다. 일단 삼각형 BQC를 좀 볼게요.



지금 $\sin\theta_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{QC}}}$이니까 $\overline{\mathrm{QH}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$이죠? 이러면 $\overline{\mathrm{BC}}$는 그냥 각각 피타고라스 씁시다.

$\overline{\mathrm{HC}}=\frac{4}{3}$이고 $\overline{\mathrm{HB}}=\frac{20}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=8$입니다. 삼각형 BQC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\times 8=\frac{16\sqrt{2}}{3}$이네요. 답은 ②번입니다.

3. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-x^2 & (x \le 0) \\ \{f(x)\}^2+x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=b$에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $g(x)=0$은 음의 실근을 갖는다.

$g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) 〔2025년 7월 15〕

① $\frac{183}{2}$ ② $\frac{187}{2}$ ③ $\frac{191}{2}$ ④ $\frac{195}{2}$ ⑤ $\frac{199}{2}$

3. 정답 ① 〔2025년 7월 21〕

1) 조건해석, 절댓값 함수

함수 $f(x)=x^2+ax+b$가 있는데 $g(x)=\begin{cases} |f(x)|-x^2 & (x \le 0) \\ \{f(x)\}^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$라고 합니다.

일단 해석부터 해볼게요. 일단 $x \le 0$에서 $g(x)=|f(x)|-x^2$인데 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수라는 거 말고는 아무것도 아는 게 없네요. 심지어 $f(x)>0$이라면 $g(x)$는 일차함수일 수도 있어요. $f(x)>0$일 때 $g(x)=f(x)-x^2=ax+b$이고 $f(x) \le 0$이라면 $g(x)=-2x^2-ax-b$이니까요.

$x>0$에서는 $g(x)=\{f(x)\}^2+x^3$인데 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수니까 $x>0$에서 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수겠네요.

이때 (가)조건에서 $g(x)$는 $x=b$에서만 미분가능하지 않다고 합니다. 일단 $x>0$에서는 미분가능합니다. 다항함수니까요. 문제는 $x \le 0$에서인데 일단 $x=0$에서의 미분가능을 확인해봐야 하겠네요. 그리고 절댓값 함수가 변하는 지점에서 미분불가능한 것이 유력하죠? $f(x)$의 부호에 따라 변하니 결국 $f(x)$가 0이 되는 부분에서 미분가능을 확인해봐야겠어요. 결국 $b \le 0$입니다.

(나)조건에서 $g(x)=0$이 음의 실근을 갖는다고 합니다. 이러면 그 음의 실근을 갖는 부분도 미분가능인지 확인해봐야겠군요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 케이스 분류

2-1) $f(x) \ge 0$인 경우

먼저 $x \le 0$에서 $g(x)=|f(x)|-x^2$부터 볼게요. 만약 $x \le 0$에서 계속 $f(x) \ge 0$이라면? 그러면 $g(x)=ax+b$입니다. 이러면 $x<0$, $x>0$ 모두 미분가능합니다. 다항함수이니까요.

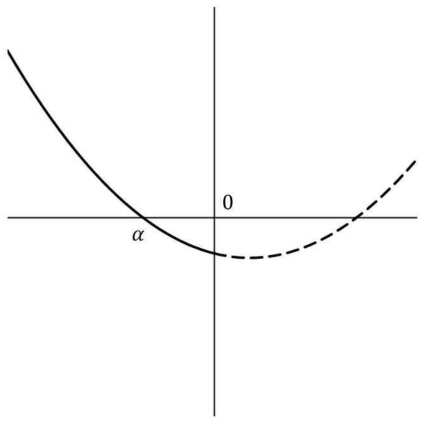
이러면 결국 미분불가능한 점은 $x=0$이 되어야 하니까 $b=0$이 되는데, $b=0$이라면 $g(x)=\begin{cases} ax & (x \le 0) \\ x^4+(2a+1)x^3+a^2x^2 & (x>0) \end{cases}$에서 $g(x)$의 음의 실근이 존재하지 않습니다. 결국 $f(x)$는 x축과 두 번 만나게 되는 최고차항의 계수가 1인 이차함수입니다. $f(x)<0$인 부분이 존재하는 거죠.

이렇게 되면 $f(x)=0$인 지점이 $x \le 0$에서 몇 개가 있는지가 중요하겠네요. 0개인 경우는 바로 앞에서

안된다고 확인했구요. 1개인 경우를 확인해볼게요.

2-2) $f(x)=0$이 음의 실근을 하나만 가질 경우

$x<0$에서 $f(x)=0$인 지점이 존재하고 그 지점의 x좌표를 α라고 가정하면 $x<\alpha$일 때는 $f(x)>0$이고, $\alpha<x<0$일 때는 $f(x)<0$입니다.



이렇게 말이죠.

이러면 결국 $g(x)=\begin{cases} ax+b & (x\le\alpha) \\ -2x^2-ax-b & (\alpha<x\le 0) \\ x^4+(2a+1)x^3+(2b+a^2)x^2+2abx+b^2 & (x>0) \end{cases}$입니다. 우리가 확인해봐야 하는 구간은 $x=0,\ \alpha$입니다.

$x=0$부터 확인해볼게요. 일단 연속인지부터 보면 좌극한은 $-b$이고 우극한은 b^2입니다. 이 둘은 같을까요? 같다고 가정해볼게요. 그러면 $b^2+b=b(b+1)=0$이므로 $b=0$이거나 $b=-1$입니다.

만약 $b=0$이라면 미분불가능한 지점은 $x=0$ 하나여야 합니다. 이때 $b=0$이면 $f(x)=x^2+ax=x(x+a)$가 되어서 $\alpha=-a$가 되죠? 미분계수를 비교해보면 $x=0$에서 좌미분계수가 $-a=\alpha$인데 우미분계수는 0입니다. 우리는 $\alpha<0$이라고 가정했으니 미분불가능 맞네요.

이때 $x=\alpha$에서 좌미분계수는 $a=-\alpha$이고 우미분계수는 $-4\alpha-a=-3\alpha$입니다. $\alpha<0$이므로 이 둘은 같지 않네요? 그럼 미분불가능한 지점이 두 개가 되는데요?

$b=-1$이라 하면 미분불가능한 지점은 $x=-1$ 하나여야 합니다. 그러면 $x=0$에서는 미분가능해야겠죠?
$x=0$에서 좌미분계수가 $-a$이고 우미분계수가 $-2a$이므로 미분가능하기 위해서는 $a=0$입니다.
미분불가능한 지점이 $x=-1$이니까 $\alpha=-1$이어야겠죠? $a=0,\ b=-1$이므로

$f(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$이고 $\alpha=-1$도 맞네요. 모든 조건이 충족되는데요?

$g(x)=\begin{cases}-1 & (x\le -1)\\ -2x^2+1 & (-1<x\le 0)\\ x^4+x^3-2x^2+1 & (x>0)\end{cases}$이고 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $g(3)=91$이므로 $g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)=\frac{183}{2}$이고 답은 ①번입니다.

나머지도 케이스도 일단 볼게요.

그럼 $x=0$에서 애초에 연속이 아니라고 가정해봅시다. $b=0$과 $b=-1$이 모두 아니라고 가정하는 거죠. 그럼 $x=0$에서 미분불가능하니 (가)조건에서 언급한 유일한 미분불가능점인 $x=b$가 0이 되어 $b=0$이어야 합니다. 모순이네요?

2-3) $f(x)=0$이 음의 실근을 두 개 가질 경우

이번엔 2개인 경우인 경우를 확인해볼게요. $x<0$에서 $f(x)=0$이 되는 x가 두 개 있다고 가정하고 그 x좌표를 각각 α, β라고 하면 $x\le 0$에서 $g(x)=\begin{cases}ax+b & (x\le\alpha)\\ -2x^2-ax-b & (\alpha<x<\beta)\\ ax+b & (\beta\le x\le 0)\\ x^4+(2a+1)x^3+(2b+a^2)x^2+2abx+b^2 & (x>0)\end{cases}$이 되겠죠? $\alpha<x<\beta$에서만 $f(x)<0$이 될 테니까 $g(x)=-f(x)-x^2$이고 나머지는 $g(x)=f(x)-x^2$이니까요.

이것도 아까랑 마찬가지로 $x=0$에서 연속이냐 아니냐부터 따져야겠네요. 만약 연속이 맞다고 가정하면 $b^2=b$해서 $b=0$이거나 $b=1$입니다. $b\le 0$이어야 하니까 $b=1$은 불가능하네요.
아까랑 마찬가지로 연속이 아니라고 가정하면 $b=0$이 아니어야 하는데 $x=0$에서 연속이 아니므로 미분불가능하죠? 따라서 $b=0$가 되어 모순이 일어납니다.

아무튼 $b=0$이라고 가정해보면 $f(x)=x^2+ax=x(x+a)$가 됩니다. 이러면 $f(x)=0$이 음의 실근을 두 개 갖지 않잖아요? 가정을 위배하네요.

따라서 유일한 경우는 $f(x)=0$이 음의 실근을 하나만 갖고 $a=0$, $b=-1$인 경우네요.

4. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6 = 6$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. 〔2025년 7월 22〕

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.
>
> (나) 네 항 a_2. a_3, a_4, a_5 중 짝수인 항의 개수는 1이다.

4. 정답 76 〔2025년 7월 22〕

1) 문제해석

모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있는데 $a_6 = 6$이 되도록 하는 모든 a_1의 합을 구하랍니다.

(가)조건에서 $a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$ 라고 하네요.

(나)조건에서 a_2. a_3, a_4, a_5 중 짝수는 하나라고 하구요.

일단 $a_6 = 6$이니까 $n = 4$를 넣어보면 $a_6 = 6 = \begin{cases} a_5 + a_4 & (a_4\text{가 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_4 & (a_4\text{가 짝수인 경우}) \end{cases}$ 이죠? 이러면 a_4가 홀수인지 짝수인지를 기준으로 먼저 나눠봐야겠어요.

2) 케이스분류

2-1) a_4가 짝수인 경우

$a_4 = 12$입니다. 짝수 맞네요? 그러면 $n = 2$를 넣어보면 $a_4 = 12 = \begin{cases} a_3 + a_2 & (a_2\text{가 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_2 & (a_2\text{가 짝수인 경우}) \end{cases}$ 가 되네요.

그런데 이때 (나)조건에서 a_2. a_3, a_4, a_5 중 짝수는 하나라고 했는데 이미 a_4가 짝수죠? 그러면 나머지는 무조건 홀수여야 합니다. 그러면 $a_4 = 12 = a_3 + a_2$인데 짝수가 되기 위해서는 짝수+짝수이거나 홀수+홀수여야 하잖아요? 마침 a_2, a_3 모두 홀수여야 하니까 조건을 만족하네요. 그럼 가능한 $(a_2,\ a_3)$의 조합은 (1, 11), (3, 9), (5, 7), (7, 5), (9, 3), (11, 1)이네요.

$n = 3$을 넣으면 $a_5 = \begin{cases} a_4 + a_3 & (a_3\text{가 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_3 & (a_3\text{가 짝수인 경우}) \end{cases}$ 인데 a_3은 홀수이므로 $a_5 = a_4 + a_3$입니다. 이때 a_3과 a_4는 각각 홀수, 짝수잖아요? 홀수+짝수는 홀수죠. 그리고 a_5도 홀수이구요. 조건을 만족하네요.

$n=1$을 넣으면 $a_3=\begin{cases} a_1+a_2 & (a_1\text{가 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_1 & (a_1\text{가 짝수인 경우}) \end{cases}$입니다. 이때 a_3은 1, 3, 5, 7, 9, 11이 가능합니다.

그럼 a_1이 홀수인지 짝수인지 또 나눠볼까요?

2-1-1) a_1가 짝수인 경우

$a_3=\frac{1}{2}a_1$이고 a_3는 1, 3, 5, 7, 9, 11 중 하나이므로 가능한 a_1은 2, 6, 10, 14, 18, 22입니다.

2-1-2) a_1가 홀수인 경우

이러면 a_1, a_2, a_3이 전부 홀수가 됩니다. 이때 a_1이 홀수니까 $a_3=a_2+a_1$인데 홀수+홀수는 홀수가 나올 수 없죠? 조건을 만족시키지 못합니다.

2-2) a_4가 홀수인 경우

$a_6=6=a_5+a_4$입니다. 이때 홀수+?=짝수가 나오려면 ?는 홀수여야 하겠죠? a_5 역시 홀수입니다. 가능한 $(a_4,\ a_5)$의 조합은 (1, 5), (3, 3), (5, 1)이네요.

$n=3$을 넣으면 $a_5=\begin{cases} a_4+a_3 & (a_3\text{가 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_3 & (a_3\text{가 짝수인 경우}) \end{cases}$인데 만약 a_3가 홀수라면? $a_5=a_4+a_3$이 됩니다.

그런데 a_3, a_4, a_5 모두 홀수잖아요? 홀수+홀수가 홀수가 나올 수 없으니 a_3는 짝수입니다. $a_5=\frac{1}{2}a_3$이네요.

$n=2$를 넣어보면 $a_4=\begin{cases} a_3+a_2 & (a_2\text{가 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_2 & (a_2\text{가 짝수인 경우}) \end{cases}$인데 만약 a_2가 짝수라면 a_2, a_3가 짝수가 되어

(나)조건을 위배합니다. 따라서 a_2가 홀수이고 $a_4=a_3+a_2$, a_2는 홀수, a_3는 짝수, a_4는 홀수이므로 조건을 만족시키네요.

지금까지 정보를 정리하면 $(a_4,\ a_5)$의 조합은 (1, 5), (3, 3), (5, 1), $a_5=\frac{1}{2}a_3$, $a_4=a_3+a_2$이죠?

2-2-1) $(a_4,\ a_5)=(1,\ 5)$인 경우

이러면 $a_4=1$, $a_5=5$이므로 $a_3=10$입니다. 그런데 $a_4=a_3+a_2$이므로 $5=10+a_2$라서 a_2가 음수가

나오네요. 모든 항이 자연수가 아니게 되죠?

2-2-2) $(a_4,\ a_5)=(3,\ 3)$인 경우

$a_4=3,\ a_5=3$이므로 $a_3=6$입니다. 이것도 마찬가지로 $a_4=a_3+a_2$이므로 $3=6+a_2$니까 조건 위배네요.

2-2-3) $(a_4,\ a_5)=(5,\ 1)$인 경우

$a_4=5,\ a_5=1$이므로 $a_3=2$입니다. $a_4=a_3+a_2$이므로 $5=2+a_2$이므로 $a_2=3$이네요.

$n=1$을 넣어보면 $a_3=2=\begin{cases} a_1+a_2 & (a_1\text{가 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_1 & (a_1\text{가 짝수인 경우}) \end{cases}$입니다.

만약 a_1이 짝수라면 $a_1=4$이네요. 조건 만족하죠?

a_1이 홀수라면 $a_3=a_1+a_2$이므로 $2=a_1+3$인데 이러면 a_1이 음수가 나오네요.

따라서 가능한 a_1은 2, 4, 6, 10, 14, 18, 22이고 합은 76입니다.

확통

5. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? 〔2025년 7월 확통 28〕

(가) $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq 5$ (나) $n=4,\ 5,\ 6$일 때, $f(f(n))=n$이다.

① 70　　② 75　　③ 80　　④ 85　　⑤ 90

5. 정답 ② 〔2025년 7월 확통 28〕

1) 상황이해 후 기준 잡고 분류

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$가 있는데 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하라네요.

(가)조건에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le 5$라고 합니다. 이건 사실상 같은 공을 뽑고 작거나 같은 순서대로 $f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$라고 하면 되니까 중복조합이 생각나죠?

(나)조건에서 $n=4,\ 5,\ 6$일 때 $f(f(n))=n$라고 합니다. 천천히 넣어볼까요?
$n=4$이면 $f(f(4))=4$입니다. 이러면 $f(4)$의 값이 무엇인지를 기준으로 나눠보면 되겠네요.

만약 $f(4)$의 값이 3이하라고 생각해봅시다. 예를 들어 $f(4)=3$이라면 $f(3)=4$이네요. 그런데 이러면 $f(3)\le f(4)$가 성립하지 않잖아요? 따라서 $f(4)$는 4, 5여야 합니다.

2) 케이스 분류

2-1) $f(4)=4$일 때

이러면 이러면 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le 4$를 만족시키면 됩니다. $n=5$를 넣으면 $f(f(5))=5$인데 만약 $f(5)$가 3 이하라면, 예를 들어 $f(5)=3$이라면 $f(3)=5$이 되는데 이건 (가)조건 위배죠?

$f(5)$의 값이 4라면 $f(5)=4$고 $f(4)=5$인데 이러면 $f(4)=4$라는 우리의 가정을 위배하구요. 따라서 $f(5)$는 5 또는 6입니다. 이건 또 케이스를 나눌 수 있겠네요.

2-1-1) $f(5)=5$일 때

$n=6$을 넣으면 $f(f(6))=6$인데 이것도 전과 마찬가지로 $f(6)$이 3 이하라면 (가)조건 위배, 4, 5라면 $f(4)=4,\ f(5)=5$라는 가정을 위배합니다. 따라서 $f(6)=6$이네요. 이러면 우리는 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le 4$만 고려하면 됩니다. 선택종류는 4가지이고 선택횟수가 3번으로 ${}_4H_3={}_6C_3=20$입니다.

2-1-2) $f(5)=6$일 때

그러면 무조건 $f(6)=5$이네요. 이후는 방금과 같은 상황이므로 경우의 수는 20입니다.

2-2) $f(4)=5$일 때

이러면 무조건 $f(5)=4$입니다. $n=6$을 넣으면 $f(f(6))=6$인데 $f(6)$이 3 이하일땐 (가)조건 위배, 4, 5일 땐

$f(4)=5$, $f(5)=4$라는 가정 위배입니다. 따라서 $f(6)=6$이네요.

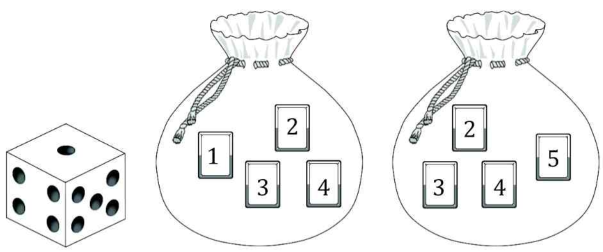
따라서 우리는 $f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq 5$만 고려하면 됩니다. 선택종류 5가지에 선택횟수 3번으로 ${}_5H_3={}_7C_3=35$입니다.

따라서 구하는 경우의 수는 $20+20+35=75$입니다. 답은 ②번이네요.

6. 1부터 4까지의 자연수가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있는 주머니 A와 2부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있는 주머니 B가 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
k가 3의 배수이면
  주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸 후
  주머니 B에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내고,
k가 3의 배수가 아니면
  주머니 A에서 임의로 1장의 카드를 꺼낸 후
  주머니 B에서 임의로 1장의 카드를 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 두 주머니 A, B에서 꺼낸 카드 중 같은 숫자가 적힌 카드가 있을 때, 꺼낸 카드 중 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔2025년 7월 확통 30〕



A B

6. 정답 34 〔2025년 7월 확통 30〕

1) 조건부확률, 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

1부터 4까지 적힌 카드가 있는 주머니 A와 2부터 5까지 적힌 카드가 있는 주머니 B가 있답니다. 이때 주사위를 한 번 던져서 3의 배수가 나오면 A, B에서 각각 2장을 꺼내고 3의 배수가 아니면 A, B에서 각각 1장을 꺼낸다네요.

이때 꺼낸 카드 중 같은 숫자가 있을 때 4가 적힌 카드가 2개일 확률을 구하랍니다. 구하는 확률은 $\frac{4\text{적힌 카드}2\text{개}}{\text{같은 숫자 카드 존재}}$ 이죠?

먼저 분모부터 구해봅시다. 같은 숫자가 적힌 카드가 있어야 하는데 지금 겹치는 숫자는 2, 3, 4입니다. 이때 만약 주사위를 던져서 3의 배수가 나왔다면 각각의 주머니에서 2장을 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$이고, 숫자가 겹치는 경우는 A에서

12를 뽑았을 때 23, 24, 25

13을 뽑았을 때 23, 34, 35

14를 뽑았을 때 24, 34, 45

23을 뽑았을 때 23, 24, 25, 34, 35

24를 뽑았을 때 23, 24, 25, 34, 45

34를 뽑았을 때 23, 24, 34, 35, 45

이렇게 총 24개입니다. 3의 배수일 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3} \times \frac{24}{36} = \frac{2}{9}$ 입니다.

3의 배수가 나오지 않았다면 각각의 주머니에서 1장을 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_4C_1 = 16$이고 숫자가 겹치는 경우는 2일 때 2

3일 때 3

4일 때 4

총 3가지입니다. 3의 배수가 아닐 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{8}$ 입니다. 따라서 숫자가 겹칠 확률은

$\frac{2}{9} + \frac{1}{8} = \frac{25}{72}$ 입니다.

이제 분자를 구해보죠. 3의 배수일 때 4가 적힌 카드가 2개인 경우는

(14, 24), (14, 34), (14, 45), (24, 24), (24, 34), (24, 45), (34, 24), (34, 34), (34, 45)

이렇게 총 9개입니다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{3} \times \frac{9}{36} = \frac{1}{12}$ 이네요.

3의 배수가 아닐 때 4가 2장 나오려면 (4, 4) 하나만 가능합니다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{24}$ 입니다.

분자는 $\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$ 이네요. 따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{25}{72}}=\frac{9}{25}$ 입니다. $p=25$, $q=9$이므로

$p+q=34$이네요.