

2025학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열(수학)

모집단위		수험번호		성명	
------	--	------	--	----	--

[문제 1] 1부터 30까지의 자연수가 하나씩 적힌 30장의 카드가 들어 있는 주머니가 하나 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후, 꺼낸 카드를 넣지 않고 주머니에서 다시 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한다. 첫 번째로 꺼낸 카드에 적힌 수를 m , 두 번째로 꺼낸 카드에 적힌 수를 n 이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] 확률변수 $X = \int_1^e \{m - n(\ln x)^2\} dx$ 에 대하여 $E(X)$ 의 값을 구하시오. [10점]

[문제 1-2] 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 확률변수 Y 라 할 때, $E\left(\frac{2Y+1}{3^7}\right)$ 의 값을 구하시오. [20점]

(I) $xyz = \frac{30!}{mn}$
(II) $x > y > z$
(III) x 와 y , y 와 z , z 와 x 는 각각 서로소이다.

[문제 2] 아래의 [문제 2-1], [문제 2-2]에서 주어진 함수 $f(x)$ 는 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하고 $f'(x) \neq 0$ 이다. 이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 를 만족시키는 점 Q의 x 좌표, y 좌표를 각각 X, Y 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, O는 원점이다.)

[문제 2-1] 두 양수 a, b 에 대하여 $f(x) = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ ($0 < x < a$)일 때, XY 의 최댓값을 구하시오. [15점]

[문제 2-2] 구간 $(0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다. (단, 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f(x) > 0$ 이다.)

(I) $f(1) = 3$
(II) 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 P에 대하여 $XY=c$ (c 는 상수)이다.

함수 $\{f(x)\}^2 + \frac{1}{f(x)}$ 이 $x=k$ 에서 최솟값을 가질 때, 실수 k 의 값을 구하시오. [15점]

[문제 3] 아래의 [문제 3-1], [문제 3-2], [문제 3-3]에서 주어진 함수 $f(t), g(t)$ 는 각각 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수이다. 실수 t 에 대하여 점 P를 $P(f(t), g(t))$, 점 P'을 $P'(f'(t), g'(t))$ 라 할 때, 세 점 Q, R, S가 다음 조건을 만족시킨다. (단, O는 원점이다.)

(I) $\overrightarrow{OP} \nparallel \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} < 0, a \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ} $ (단, a 는 1보다 큰 실수이다.)
(II) $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{OP'} = 0, \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} > 0, \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} $
(III) $\overrightarrow{PR} \nparallel \overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} < 0, b \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} $ (단, b 는 양의 실수이다.)

다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] $a=2, b=5$ 이고 $f(t)=t, g(t)=4-2t$ 일 때, $\int_0^2 (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PS})^2 dt$ 의 값을 구하시오. [10점]

[문제 3-2] $a=5$ 이고 $f(t)=2\cos t, g(t)=\sin t$ 일 때, 점 T(0,1)에 대하여 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $(\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{PR})^2$ 의 최댓값을 구하시오. [15점]

[문제 3-3] $a > 2$ 이고 모든 실수 t 에 대하여 $f(t)g(t)=1, f(t) > a, f'(t) > 0$ 일 때, 모든 실수 t 에 대하여 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} > 0$ 임을 보이시오. [15점]