

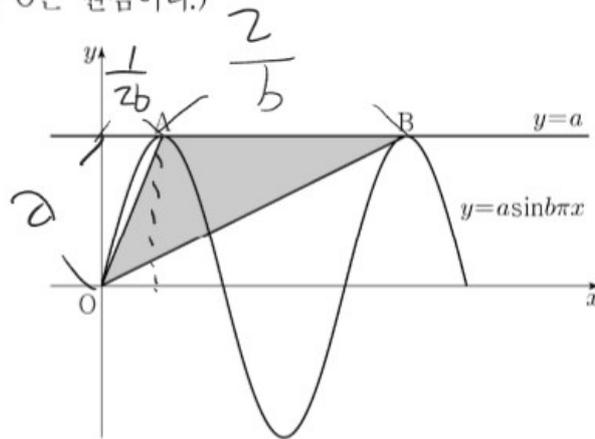
3. 두 양수 a, b 에 대하여 곡선 $y = a \sin b\pi x$ ($0 \leq x \leq \frac{3}{b}$)이

직선 $y = a$ 와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자.

삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선

OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

(단, O는 원점이다.)



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

$$OA \text{ 기울기} = \frac{a}{\frac{1}{2b}} = 2ab$$

$$OB \text{ 기울기} = \frac{a}{\frac{2}{b}} = \frac{2ab}{2}$$

$$\frac{4a^2b^2}{5} = \frac{5}{4} \rightarrow (2ab)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\rightarrow 2ab = \frac{5}{4} \rightarrow a = \frac{5}{4b}$$

$$\frac{a}{b} = 5 \rightarrow \frac{\left(\frac{5}{4b}\right)}{b} = \frac{5}{4b^2} = 5$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}, a = \frac{5}{2}$$

$$a+b = 3$$

삼각형 OAB의 넓이와 기울기 조건 해설

문제 해석

주어진 곡선 $y = a \sin b\pi x$ ($0 \leq x \leq \frac{3}{b}$)와 직선 $y = a$ 가 만나는 두 점을 각각 A 와 B 라 하자. 삼각형 OAB 의 넓이가 5, 직선 OA 와 OB 의 기울기 곱이 $\frac{5}{4}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하는 문제다. (O 는 원점)

1. 교점 구하기

곡선과 직선의 교점은 $y = a \sin b\pi x = a$. 따라서 $\sin b\pi x = 1$.

즉, $b\pi x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n 은 정수)

구간이 $0 \leq x \leq \frac{3}{b}$ 이므로, 최소 $x_1 = \frac{1}{2b}$, 다음은 $x_2 = \frac{5}{2b}$.

따라서

- $A(\frac{1}{2b}, a)$
 - $B(\frac{5}{2b}, a)$
-

2. 삼각형 OAB의 넓이

좌표

- $O(0, 0)$
- $A(\frac{1}{2b}, a)$
- $B(\frac{5}{2b}, a)$

삼각형의 넓이 공식 (두 점이 y 좌표 같을 때) $S = \frac{1}{2} \times (x_2 - x_1) \times y$

$$S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2b} - \frac{1}{2b} \right) \times a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{2b} \times a = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

문제에서 이 넓이가 5라고 했으니,

$$\frac{a}{b} = 5 \implies a = 5b$$

3. 직선 OA, OB의 기울기

• OA: $(0, 0) \sim (\frac{1}{2b}, a)$

$$\text{기울기}_{OA} = \frac{a}{\frac{1}{2b}} = 2ab$$

• OB: $(0, 0) \sim (\frac{5}{2b}, a)$

$$\text{기울기}_{OB} = \frac{a}{\frac{5}{2b}} = \frac{2ab}{5}$$

4. 두 기울기 곱 조건 적용

$$(2ab) \times \left(\frac{2ab}{5}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\frac{4a^2b^2}{5} = \frac{5}{4}$$

$$4a^2b^2 = \frac{25}{4} \implies a^2b^2 = \frac{25}{16} \implies ab = \frac{5}{4}$$

5. 연립해서 a, b 구하기

앞서 $a = 5b, ab = \frac{5}{4}$

$$(5b)b = \frac{5}{4} \implies 5b^2 = \frac{5}{4} \implies b^2 = \frac{1}{4} \implies b = \frac{1}{2}$$

($b > 0$ 이므로)

$$a = 5b = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

6. 답 구하기

$$a + b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

최종 정답

3

사고 흐름 요약

1. 곡선과 직선의 교점을 x_1, x_2 로 찾음
2. 삼각형 넓이를 공식으로 계산, $\frac{a}{b} = 5$ 조건 도출
3. 기울기 두 개를 각각 구해 곱해서 $ab = \frac{5}{4}$ 얻음
4. 두 조건 연립해 a, b 를 결정
5. 정답 $a + b = 3$