# 김O수 미적분 모의고사
# 3회 해설지

| 1번 | 2번 | 3번 | 4번 | 5번 |
|---|---|---|---|---|
| ① | ① | ⑤ | ③ | ⑤ |
| **6번** | **7번** | **8번** | **9번** | **10번** |
| ① | ④ | ② | ⑤ | ④ |
| **11번** | **12번** | **13번** | **14번** | **15번** |
| ③ | ② | ① | ⑤ | ③ |
| **16번** | **17번** | **18번** | **19번** | **20번** |
| 2 | 4 | 5 | 55 | 41 |
| **21번** | **22번** | | | |
| 48 | 86 | | | |

| 23번 | 24번 | 25번 | 26번 | 27번 |
|---|---|---|---|---|
| ④ | ⑤ | ④ | ② | ② |
| **28번** | **29번** | **30번** | | |
| ⑤ | 50 | 16 | | |

제 2 교시

# 수학 영역

홀수형

**5지선다형**

**1.** 곡선 $y=x^2-6x$와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [2점]

① 36 ② 30 ③ 24 ④ 18 ⑤ 12

$x^2-6x=0$을 만족하는 $x$의 값은 0과 6이다.

$$\int_0^6 |x^2-6x|dx=\int_0^6(-x^2+6x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^6=36$$

**2.** $\tan\theta+\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=6$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$$\tan\theta+\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=6$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{6}$

**3.** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{6}(2a_k+3)=30$일 때, $\sum_{k=1}^{6}(a_k+k)$의 값은? [3점]

① 35 ② 33 ③ 31 ④ 29 ⑤ 27

$$\sum_{k=1}^{6}(2a_k+3)=30,\ 2\sum_{k=1}^{6}a_k+\sum_{k=1}^{6}3=30,\ \sum_{k=1}^{6}a_k=6$$

$$\sum_{k=1}^{6}(a_k+k)=6+\sum_{k=1}^{6}k=6+21=27$$

**4.** 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^3-2x}{x-2} & (x\neq 2)\\ b & (x=2)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ $\frac{13}{2}$

$x=2$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\lim_{x\to 2}\frac{ax^3-2x}{x-2}=b$에서 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다. $\therefore\ a=\frac{1}{2}$

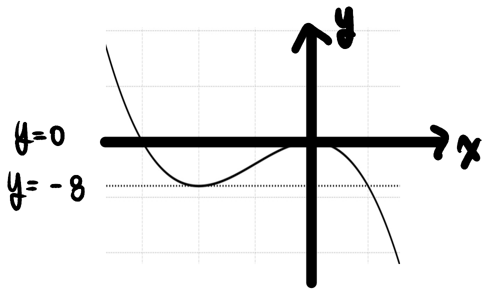
$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2}x^3-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2}(x)(x+2)(x-2)}{x-2}=4=b$이므로

$a+b=\frac{9}{2}$이다.

5. 방정식 $2x^3+6x^2+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 $k$의 개수는? [3점]

① 15 ② 13 ③ 11 ④ 9 ⑤ 7

방정식 $-2x^3-6x^2=k$에서 $f(x)=-2x^3-6x^2$이라 하자.
$f(x)$의 개형은 다음과 같다.




$k$의 값이 $-8$보다 크고 0보다 작아야 하므로
$-7$부터 $-1$까지 7개다.

6. 수직선 위를 움직이는 점 $P$의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=t^3-3t^2+4$$

이다. 점 $P$가 출발 후 속도가 0이 되는 순간 점 $P$의 가속도는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

시간에 따른 속도는 $x(t)$를 시간에 대해 미분한 식 $v(t)=3t^2-6t$이다. 따라서 $t=2$일 때 $P$의 가속도를 구하면 된다.

시간에 따른 가속도는 $v(t)$를 시간에 대해 미분한 식 $a(t)=6t-6$이다.

$a(2)=6$

7. 2 이상의 자연수 $n$에 대하여 $\dfrac{4}{\log_3 n}+\log_n 9$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 $n$의 값의 합은? [3점]

① 765 ② 766 ③ 767 ④ 768 ⑤ 769

$$\frac{4}{\log_3 n}+\log_n 9=4\log_n 3+\log_n 9=\log_n 3^4+\log_n 3^2=\log_n 3^6$$

$\log_n 3^6=k$($k$는 자연수)라 하면 $n=3^{\frac{6}{k}}$이다.
가능한 $k$는 1, 2, 3, 6이므로
모든 $n$의 값의 합은 $3^6+3^3+3^2+3^1=768$이다.

# 홀수형

**8.** 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = xf(x) - \frac{x^3}{3} + \frac{k}{2}x^2 + k - 2$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 극값 0을 가질 때, $f(3k)$의 값은? (단, $k$는 상수이다.) [3점]

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

$\int_0^x f(t)dt = xf(x) - \frac{x^3}{3} + \frac{k}{2}x^2 + k - 2$에 $x=0$을 대입하면
$0 = k-2$이므로 $k=2$이다.

양변을 $x$에 대하여 미분하면 $f(x) = f(x) + xf'(x) - x^2 + kx$에서
$f'(x) = x - 2$이다.

$f'(2) = 0$이고, $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 변하므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가진다.

$f'(x) = x-2$에서 $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + C$라 하면 $f(2)=0$이므로
$C=2$이다. $f(3k) = f(6) = 8$

**9.** 두 상수 $a$, $b\left(1 < b < \frac{3}{2}\right)$에 대하여 닫힌구간 $[1, 2]$에서 정의된 함수

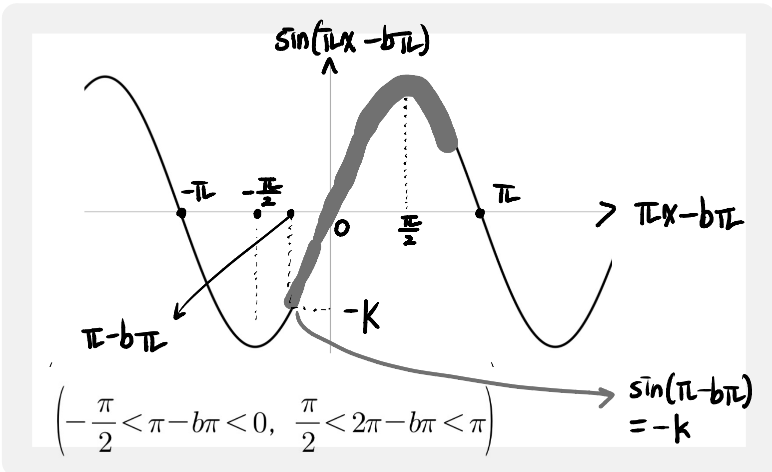
$$y = a\sin(\pi x - b\pi)$$

의 최댓값이 3, 최솟값이 $-6$일 때, $ab$의 값은? [4점]

① 7 ② 4 ③ $-1$ ④ $-4$ ⑤ $-7$

$[1, 2]$에서 $\pi x - b\pi$의 범위는 $\pi - b\pi \le \pi x - b\pi \le \pi - 2b\pi$이다.

따라서 주어진 범위에 맞게
$\pi x - b\pi$에 따른 $\sin(\pi x - b\pi)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.




만약 $a>0$이면 $[1, 2]$에서 $y = a\sin(\pi x - b\pi)$의
최댓값은 $a$, 최솟값은 $-ka$이므로 모순이다.
($a=3$, $-ka=-6$일 수 없다.)

따라서 $a<0$이 되어
최댓값은 $-ka=3$, 최솟값은 $a=-6$이 되어야 한다. $k=\frac{1}{2}$
이므로 $\sin(\pi - b\pi) = -k = -\frac{1}{2}$에서 $\pi - b\pi = -\frac{\pi}{6}$이므로 $b = \frac{7}{6}$이다.

따라서 $ab = (-6)\times\frac{7}{6} = -7$이다.

**10.** 모든 항이 양수인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = \sum_{k=3}^{5} b_k = 13, \quad a_3 = b_3, \quad 2a_1 = b_4 - 3b_6$$

일 때, $b_1$의 값은? [4점]

① 3　② 9　③ 27　④ 81　⑤ 243

$\{a_n\}$의 공비를 $r_a$, $\{b_n\}$의 공비를 $r_b$라 하면

$\sum_{k=1}^{3} a_k = \sum_{k=3}^{5} b_k = 13$이므로

$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 = a_3\left(\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_a} + 1\right) = 13,$

$\sum_{k=3}^{5} b_k = b_3 + b_4 + b_5 = b_3(1 + r_b + r_b^2) = 13$이다.

$a_3 = b_3$이므로 $\frac{1}{r_a} = r_b$이다. $r_a = r$, $r_b = \frac{1}{r}$, $a_1 = a$라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{a_1 & a_2 & a_3} & a_4 & a_5 \\ \| & \| & \| & \| & \| \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ \| & \| & \| & \| & \| \\ a & ar & ar^2 & ar^3 & ar^4 \end{array}$$

$=$

$13$

$2a_1 = b_4 - 3b_6$에서

$a_1 = a$, $b_4 = ar$, $b_6 = \frac{a}{r}$이므로

$2a = ar - \frac{3a}{r}$에서 $a \neq 0$, $r > 0$이므로

$r^2 - 2r - 3 = (r-3)(r+1) = 0$이다. $\therefore r = 3$이다.

$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 = a(1 + r + r^2) = 13$에서 $a = 1$임을 알 수 있다.

$b_1 = ar^4 = 81$

**11.** 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선이 점 $(1,\ 0)$에서 만난다. $f(-1)=f(0)$일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{128}{3}$ ② $43$ ③ $\frac{130}{3}$ ④ $\frac{131}{3}$ ⑤ $44$

$f(-1)=f(0)$이므로 $f(x)=x(x+1)(x-\alpha)+k$라 하자.

점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=\alpha+1$이다.
(곱의 미분법으로 구해도 되고 아니면 미분계수의 정의를 이용하여 $f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)(x-\alpha)}{x+1}$로 구해도 된다.)

접선이 점 $(-1,\ k)$와 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$\alpha+1=-\frac{k}{2}$이다.

마찬가지로 $(0,\ f(0))$에서의 접선을 이용하면
$-\alpha=-k$이다.
둘을 연립하면 $\alpha=-\frac{2}{3},\ k=-\frac{2}{3}$이다.

$f(x)=x(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$이므로 $f(3)=\frac{130}{3}$이다.

**12.** 첫째항이 6이고 $a_2\times a_4<0$인 등차수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $|a_n|\geq 1$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 최댓값은? [4점]

① $-42$ ② $-45$ ③ $-48$
④ $-51$ ⑤ $-54$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면 $a_2\times a_4<0$에서
$(6+d)(6+3d)<0$이므로 $-6<d<-2$이다.

모든 자연수 $n$에 대하여 $|a_n|\geq 1$이므로
모든 항이 $-1$이하거나 $1$이상이어야 한다.
구간 $(-1,\ 1)$에 항이 존재하면 안된다.

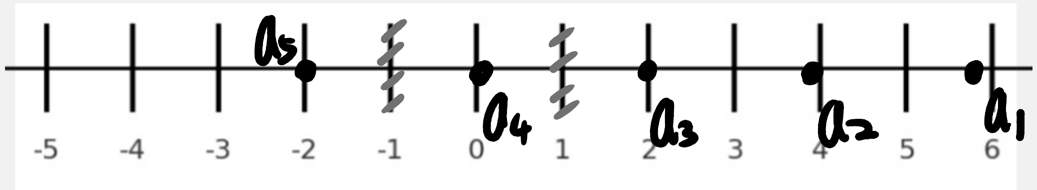
따라서 어떤 자연수 $m$에 대하여 $a_m\geq 1,\ a_{m+1}\leq -1$이다.
$a_2\times a_4<0$이므로 $m=2$ 또는 $m=3$이다.

1) $m=2$일 때 $6+d\geq 1,\ 6+2d\leq -1$이므로 $d$의 범위는
$-5\leq d\leq -\frac{7}{2}$이다.

2) $m=3$일 때 $6+2d\geq 1,\ 6+3d\leq -1$이므로 $d$의 범위는
$-\frac{5}{2}\leq d\leq -\frac{7}{3}$이다.

$a_1=6$으로 고정되어 있으므로 $\sum_{n=1}^{10}a_n$이 최대가 되기 위해서는
공차가 커야 한다. 따라서 $d=-\frac{7}{3}$일 때 $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값이 최대이다.

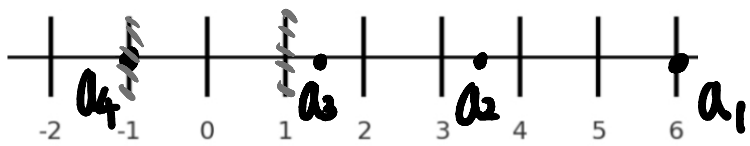
최댓값은 $\sum_{n=1}^{10}a_n=5(a_1+a_{10})=5(6+6+9d)=-45$이다.




공차가 약 -2일 때

↓

공차를 점점 작게 만들다가 처음으로 조건 만족하는 순간이 최대!



**13.** 이차함수 $f(x)$와 두 상수 $a$, $b\,(-4<b<2)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(a)$의 값은? [4점]

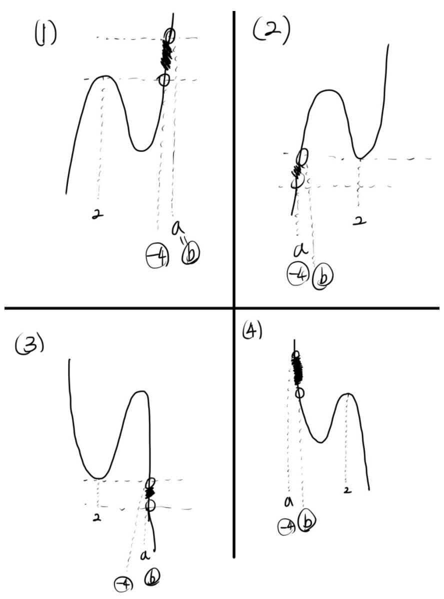
| |
|---|
| (가) : $\left\{x \,\middle|\, \int_a^x f(t)dt \times \int_2^x f(t)dt<0\right\}=\{x\mid -4<x<b\}$ |
| (나) : $\int_a^b f(t)dt=126$, $f(0)=2$ |

① 78 ② 81 ③ 84 ④ 87 ⑤ 90

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F(x)$는 하나의 삼차함수이다.
$a=2$이면 부등식의 해가 존재하지 않으므로 $a\neq 2$이다.
(가)에서 $\{F(x)-F(a)\}\times\{F(x)-F(2)\}<0$의 해가 $-4<x<b$이다.
$F(x)$가 단조 증가 또는 단조 감소하면
부등식의 해가 $a<x<2$ 또는 $2<x<a$가 되어야 하므로 모순이다.
따라서 $F(x)$는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

만약 $F(2)$가 극값이 아니라면 부등식의 해가 $-4<x<b$로 표현되지 않는다. ($\because$ $b<2$)
$F(2)$가 극값이 아니라면 어떤 $\alpha$와 $\beta$에 대해서
$\alpha<x<2$ 또는 $2<x<\beta$를 만족하는 $x$가 부등식의 해에 포함되어야 한다. 따라서 $F(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.

$F(x)$의 개형이 다음 네 가지 중 하나여야 부등식의 해가 (가)와 같이 나온다.




$-4<2$이므로 (1), (3)은 모순이고 (나)에서
$F(b)-F(a)=126>0$이므로
(4)는 모순이다. 따라서 (2)만 가능하다.

$F(x)=k(x-b)(x-2)^2+C$ $(k>0)$이고, (나)의 조건을 대입해보면
$F(b)-F(a)=36k(4+b)=126$,
$f(0)=F'(0)=k(4b+4)=2$이므로 $k=1$, $b=-\dfrac{1}{2}$이다.

$F(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-2)^2+C$,
$f(x)=3x^2-7x+2$
따라서 구하는 답은 $f(-4)=78$이다.

**14.** 상수 $k$에 대하여 함수 $f(x)$는

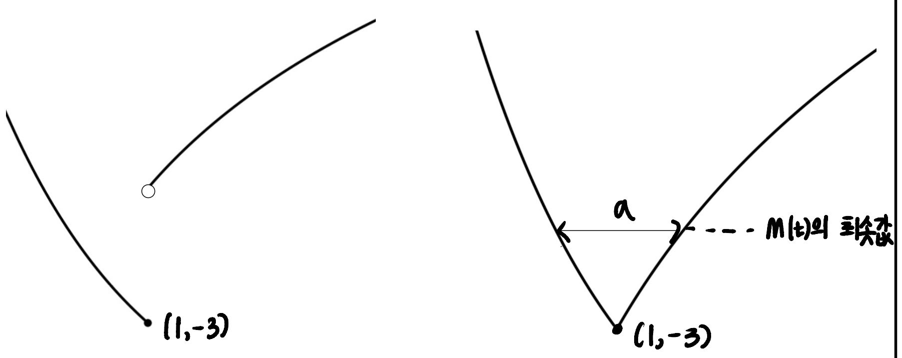
$$f(x)=\begin{cases} k+\log_2 x & (x>1) \\ 3^{-x+1}-4 & (x\le 1) \end{cases}$$

이다. 상수 $a(a>0)$와 실수 $t$에 대하여 닫힌 구간 $[t-a,\ t]$에서 $f(x)$의 최댓값을 $M(t)$라 할 때, 함수 $M(t)$는 $t=\frac{4}{3}a$에서 최솟값 $-3$을 가진다. $a-k$의 값은? [4점]

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

다음의 경우로 나누어 보자

(1) $k\ge-3$일 때

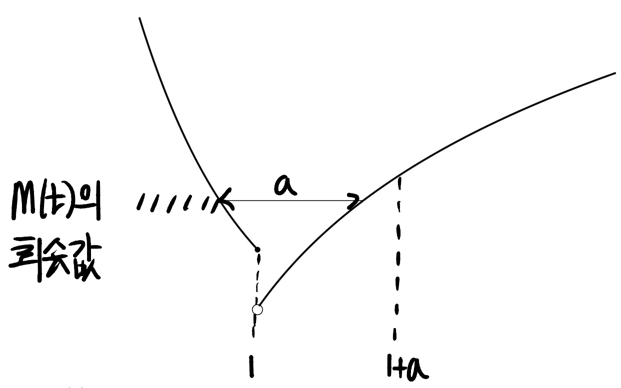



$f(x)$의 최솟값이 $f(1)=-3$이므로 어떤 닫힌구간에서의 $f(x)$의 최댓값이 $-3$일 수가 없다.

(2) $k<-3$일 때

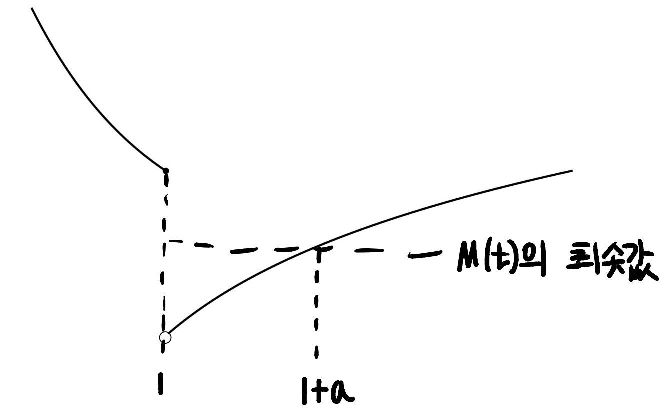
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 세가지 그림과 같다.

-1) $f(1+a)>-3$일 때



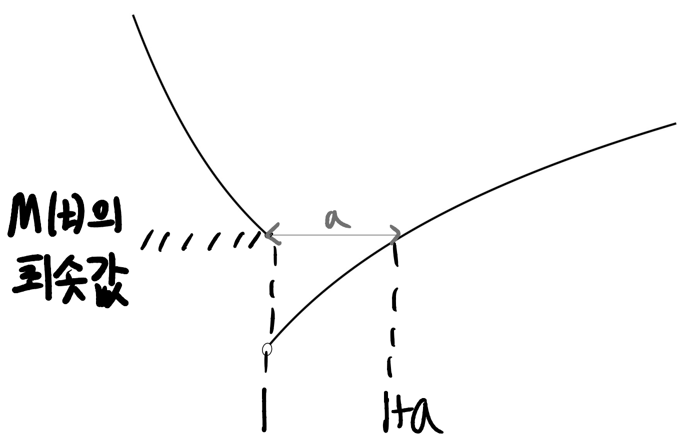

$M(t)$의 최솟값이 $-3$보다 커지므로 모순이다.

-2) $f(1+a)<-3$일 때




$M(t)$의 최솟값이 $-3$보다 작아지므로 모순이다.

-3) $f(1+a)=-3$일 때




3번째 경우일 때에만 $t=a+1$에서 $M(t)$가 최솟값 $-3$을 가진다.

$a+1=\frac{4}{3}a$이므로 $a=3$이다.

그리고 3번째 경우이기 위해서는 $f(a+1)=-3$이어야 하므로 $k=-5$이다. 따라서 구하는 답은 $3-(-5)=8$이다.

**15.** 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$|x|g(x-a)=f(x)f(x+3)$$

을 만족시킨다. 함수

$$h(x)=\lim_{t\to x+}\frac{g(2t-x)+g(2x-t)-2g(x)}{t-x}$$

에 대하여 $\lim_{x\to 3-}\{h(x)-h(3)-4\}=0$일 때, 상수 $a$에 대하여 $f'(a)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$h(x)=\lim_{t\to x+}\frac{g(2t-x)+g(2x-t)-2g(x)}{t-x}$를 정리하면

$h(x)=2\times\lim_{t\to x+}\frac{g(2t-x)-g(x)}{(2t-x)-(x)}-\lim_{t\to x+}\frac{g(2x-t)-g(x)}{(2x-t)-(x)}$이다.

$\therefore$ $h(x)=2g'(x+)-g'(x-)$라고 표현할 수 있다.

(편의상 우미분계수를 $g'(x+)$, 좌미분계수를 $g'(x-)$라 하자.)

$g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하면

$\lim_{x\to 3-}\{h(x)-h(3)\}=0$이므로 모순이다. 따라서 $g(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

$|x|g(x-a)=f(x)f(x+3)$를 변형하면

$|x+a|g(x)=f(x+a)f(x+a+3)$이고 $x=-a$를 대입하면

$f(0)f(3)=0$임을 알 수 있다.

(1) $f(x)=-kx^2$꼴일 때 $(k>0)$

$|x+a|g(x)=k^2(x+a)^2(x+a+3)^2$이고, $g(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 $-a=3$이다.

$$g(x)=\begin{cases} k^2(x-3)(x)^2 & (x\ge 3) \\ -k^2(x-3)(x)^2 & (x<3) \end{cases}$$

에서 $g'(3+)=9k^2$, $g'(3-)=-9k^2$이므로 $h(3)=27k^2$이고

$x<3$일 때 $h(x)=2g'(x+)-g'(x-)=g'(x)$이므로

$\lim_{x\to 3-}h(x)=\lim_{x\to 3-}g'(x)=-9k^2$이다.

$\lim_{x\to 3-}\{h(x)-h(3)-4\}=0$에 의해

$-36k^2-4=0$이 나오므로 모순이다.

(2) $f(x)=-k(x-3)^2$꼴일 때 $(k>0)$

(1)과 마찬가지로 모순이다.

(3) $f(x)=-kx(x-3)$꼴이다. $(k>0)$

$|x+a|g(x)=k^2(x+a-3)(x+a+3)(x+a)^2$이고 $-a=3$이므로

$$g(x)=\begin{cases} k^2x(x-3)(x-6) & (x\ge 3) \\ -k^2x(x-3)(x-6) & (x<3) \end{cases}$$

이다. $g'(3+)=-9k^2$, $g'(3-)=9k^2$이므로 $h(3)=-27k^2$이고

$x<3$일 때 $h(x)=2g'(x+)-g'(x-)=g'(x)$이므로

$\lim_{x\to 3-}h(x)=\lim_{x\to 3-}g'(x)=9k^2$이다.

$\lim_{x\to 3-}\{h(x)-h(3)-4\}=0$에 의해 $36k^2-4=0$, $\therefore$ $k=\frac{1}{3}$

$f(x)=-\frac{1}{3}x(x-3)$에서 $f'(a)=f'(-3)=3$이다.

# 홀수형

**단답형**

16. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-5)f(x)$$

라 하자. $g(1)=-4$, $g'(1)=-6$일 때, $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

1. $g(x) = (x^2-5)f(x)$
   양변을 $x=1$에서 대입하면,
   $$g(1) = (1^2-5)f(1) = (-4)f(1) = -4.$$
   따라서
   $$-4f(1) = -4 \implies f(1) = 1.$$
2. $g'(x)$를 구하면,
   $$g'(x) = \frac{d}{dx}\left((x^2-5)f(x)\right) = 2x\,f(x) + (x^2-5)f'(x).$$
   이를 $x=1$에서 대입하면
   $$g'(1) = 2\cdot 1\cdot f(1) + (1^2-5)f'(1) = 2f(1) - 4f'(1).$$
   주어진 조건 $g'(1)=-6$와 $f(1)=1$을 이용하면,
   $$-6 = 2(1) - 4f'(1) \implies -6 = 2 - 4f'(1) \implies -4f'(1) = -8 \implies f'(1) = 2.$$

따라서 답은 $f'(1)=2$이다.

17. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+1)dx$의 값을 구하시오. [3점]

1. 적분을 항별로 분리한다.
   $$\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+1)\,dx = \int_{-1}^{1}x^3\,dx + \int_{-1}^{1}3x^2\,dx + \int_{-1}^{1}1\,dx.$$
2. 각 항을 계산한다.

- $x^3$ 항:
  $$\int_{-1}^{1}x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$
- $3x^2$ 항:
  $$\int_{-1}^{1}3x^2\,dx = 3\int_{-1}^{1}x^2\,dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left[x^3\right]_{-1}^{1} = 1^3-(-1)^3 = 1-(-1) = 2.$$
- 상수항 1:
  $$\int_{-1}^{1}1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2.$$

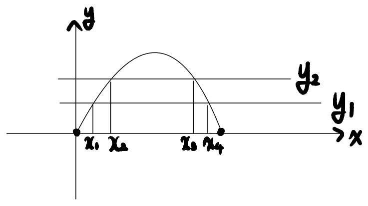
3. 세 결과를 합하면,
   $$\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+1)\,dx = 0+2+2 = 4.$$

**18.** 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 $x$에 대한 방정식

$$6\sin^2 x - a\sin x + 1 = 0$$

이 서로 다른 네 실근 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$를 갖는다. $x_3 - x_2 = \frac{2}{3}\pi$일 때, 상수 $a$에 대하여 $6a(\sin x_3 - \sin x_4)$의 값을 구하시오. [3점]

$[0,\ \pi]$에서 $\sin x$의 그래프는 다음과 같다.




따라서 $\sin x = y$로 치환하면 $y$에 대한 이차방정식
$6y^2 - ay + 1 = 0$은 0이상이고 1보다 작은 서로 다른 두 실근을 갖는다. $\sin x_2 = \sin x_3 = y_2$이므로 $x_3 - x_2 = \frac{2}{3}\pi$이기 위해서는 $x_2 = \frac{\pi}{6},\ x_3 = \frac{5\pi}{6}$이다.

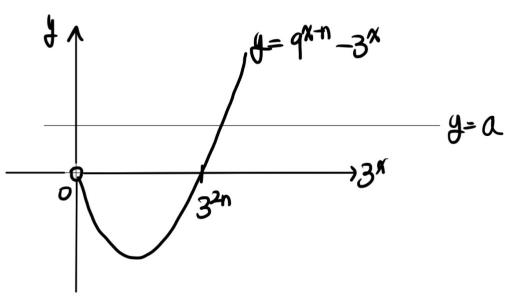
$y_2 = \frac{1}{2}$이고 근과 계수의 관계에 의해 $y_1 = \frac{1}{3}$이다.
$\frac{a}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$에서 $a = 5$이고 $\sin x_3 - \sin x_4 = y_2 - y_1 = \frac{1}{6}$이므로
구하는 답은 $6 \times 5 \times \frac{1}{6} = 5$이다.

**19.** 상수 $a$와 자연수 $n$에 대하여 $x$에 대한 부등식

$$9^{x-n} - 3^x \leq a$$

의 해가 $x \leq 3$일 때, $a+n$의 값을 구하시오. [3점]

$3^x$를 가로축, $9^{x-n} - 3^x$를 세로축에 두고
두 변수의 관계를 나타내는 그래프를 그리면



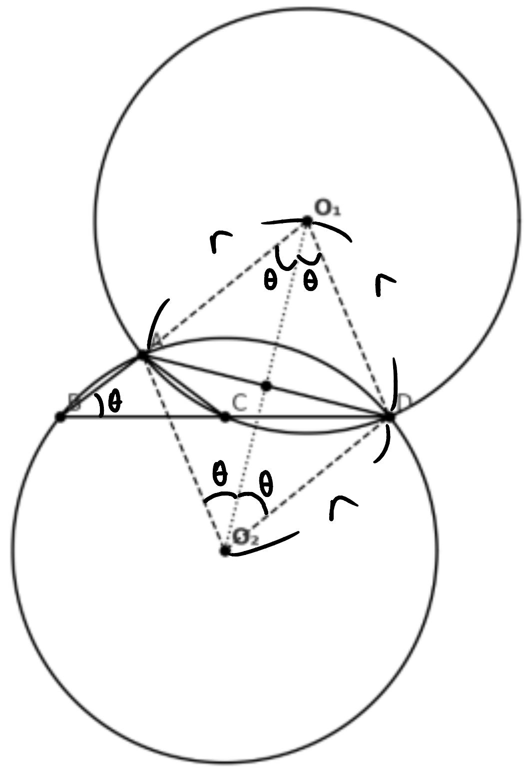

위와 같다. $(\because\ 3^x > 0)$ $a \geq 0$이어야 부등식의 해가 $x \leq \alpha$꼴로 나온다. $9^{3-n} - 3^3 = a$이고 $2n \leq 3$이므로
$n = 1$이고 $a = 54$이다. 따라서 구하는 답은 $1 + 54 = 55$이다.

**20.** 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$이고 $\cos(\angle BAC) = -\frac{7}{25}$인 삼각형 $ABC$가 있다. 점 $B$와 점 $C$를 $2:1$로 외분하는 점을 $D$라 할 때, 두 삼각형 $ABD$와 $ACD$의 외심 사이의 거리가 4이다. 삼각형 $ABD$의 넓이는 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$의 외접원은 선분 $AD$를 공통현으로 갖는다.

각각의 외접원의 반지름의 길이를 $r_1,\ r_2$라 하면
$\overline{AD} = 2r_1\sin(\angle ABD) = 2r_2\sin(\angle ACD)$이고,
$\sin(\angle ABD) = \sin(\angle ACD)$이므로 $r_1 = r_2$이다.

그리고 $\angle ABD + \angle ACD = \pi$이므로 두 외접원은 현 $AD$에 대하여 대칭이다.




$r_1 = r_2 = r$이라 하고, $\angle ABD = \theta$라 하면 위의 그림처럼 표현할 수 있다(원주각). $\therefore\ 2r\cos\theta = 4$
$\cos(\angle BAC) = -\frac{7}{25}$에서 코사인법칙과 사인법칙을 이용하면
$\sin\theta = \frac{3}{5},\ \cos\theta = \frac{4}{5},\ 2r = 5$이다.
$\overline{AB} = \overline{AC} = 5k,\ \overline{BC} = 8k$라 하면, $\overline{AD} = 3\sqrt{17}k$이므로(코사인법칙) $\overline{AD} = 3\sqrt{17}k = 2r\sin\theta$에서 $k = \frac{1}{\sqrt{17}}$이다.

삼각형 $ABD$의 넓이는
$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin\theta = \frac{1}{2} \times 5k \times 16k \times \frac{3}{5} = 24k^2 = \frac{24}{17}$이다.

**21.** 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

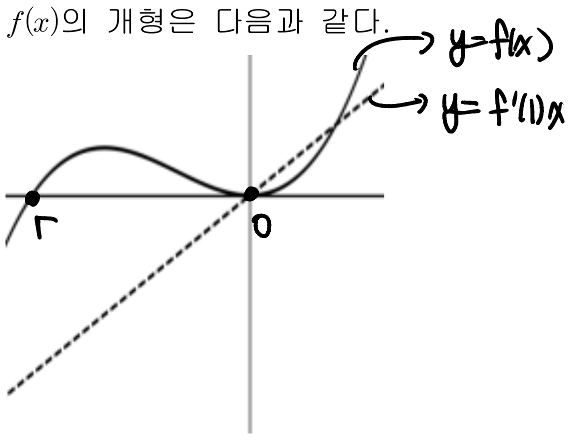
$$g(x)=f(f(|x|)-f'(1)|x|)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 최솟값을 갖도록 하는 모든 $\alpha$를 작은 수부터 차례대로 나열한 것은 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\cdots$, $\alpha_5$이고, $f(0)=0$, $f(1)-f'(1)<0$이다. $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

함수 $g(x)$는 $y$축 대칭 함수이므로
함수 $h(x)=f(f(x)-f'(1)x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서
$x=\alpha_3=0$, $x=\alpha_4$, $x=\alpha_5$에서만 최솟값을 가진다.

$f(x)-f'(1)x$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로
$x\geq 0$에서 $f(x)-f'(1)x\geq\beta$라 할 수 있다.
$x=1$을 대입해보면 $f(1)-f'(1)<0$이므로 $\beta<0$이고,
$x=0$을 대입해보면 $f(0)-f'(1)\times 0=0$이다.

$f(x)$가 구간 $[\beta,\ \infty)$ $(\beta<0)$에서 최솟값 $f(0)=0$을 가지므로
$f(x)$의 개형은 다음과 같다.

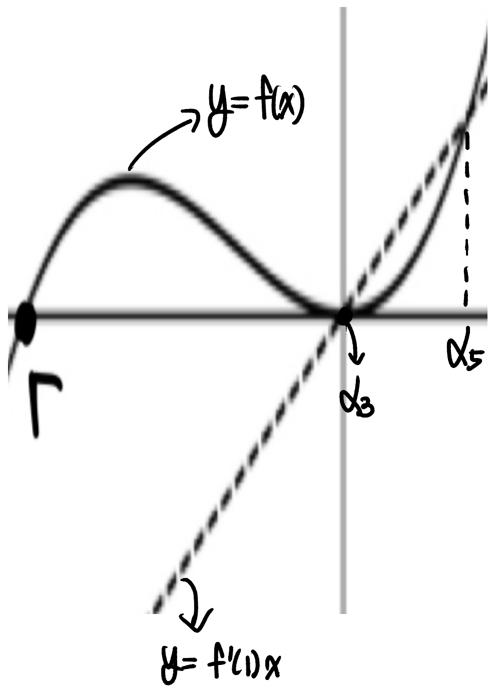


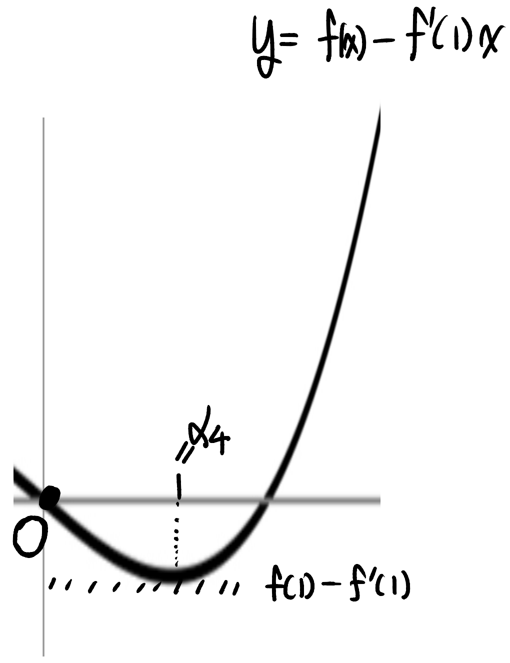

$f(x)=\frac{1}{2}(x-\gamma)x^2$ $(\gamma<0)$이라 하자.

(1) $\beta<\gamma$인 경우 구간 $[\beta,\ \infty)$에서 $f(x)$가 최솟값 $f(\beta)<0$를 가지므로 모순이다.

(2) $\beta>\gamma$인 경우 $h(x)=f(f(x)-f'(1)x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 최솟값을 가지려면 $f(x)-f'(1)x=0$이어야 한다.
$[0,\ \infty)$에서 $f(x)-f'(1)x=0$를 만족하는 $x$의 값은 두 개이므로 모순이다.

(3) 따라서 $\beta=\gamma$이다.




따라서 위 그림처럼 $\alpha_4=1$, $f(\alpha_5)-f'(1)\alpha_5=0$이다.

$f(x)=\frac{1}{2}(x-\gamma)x^2$에서 $\gamma=f(1)-f'(1)$이므로

$\gamma=\frac{1-\gamma}{2}-\frac{3-2\gamma}{2}$이므로 $\gamma=-2$이다.

따라서 $f(4)=\frac{1}{2}\times\{4-(-2)\}\times 4^2=48$이다.

**22.** $a_1=96$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3k & (a_n \geq 3k) \\ k\times a_n & (a_n < 3k) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 \leq a_4 \leq a_6$이 되도록 하는 모든 자연수 $k$의 값의 합을 구하시오. [4점]

첫째항이 자연수이므로 모든 항은 음이 아닌 정수이다.

<$a_5 \leq a_4 \leq a_6$이기 위한 경우>

- $a_4=0$이면 그 뒤로 모든 항이 0이 되어 성립한다.
- $0<a_4<3k$인 경우 $a_5=ka_4$이므로 $k\neq 1$이면 성립하지 못한다.
- $3k \leq a_4 < 6k$인 경우 $a_5=a_4-3k$, $a_6=ka_5=k(a_4-3k)$이다.
  이때 $a_4 \leq k(a_4-3k)$이기만 하면 성립한다.
- $a_4 \geq 6k$인 경우 $a_5=a_4-3k$, $a_6=a_5-3k$이므로 성립하지 못한다.

(1) $96<3k$ $(k \geq 33)$인 경우
$a_1=96$, $a_2=96k$, $a_3=93k$, $a_4=90k$, $a_5=87k$, $a_6=84k$, $\cdots$
가 되고, $a_4>a_6$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(2) $17 \leq k \leq 32$인 경우 $(a_2<3k)$
$a_1=96$, $a_2=96-3k$, $a_3=(96-3k)k$이다.

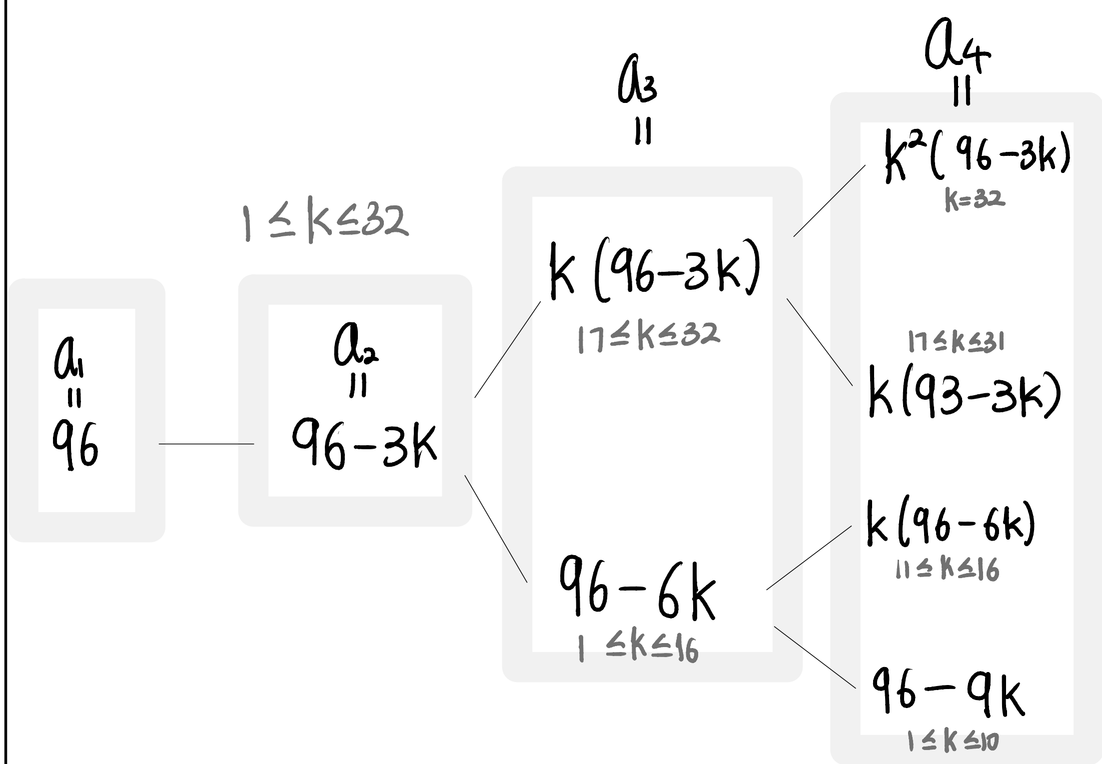
(2)-(1) 여기서 $k=32$인 경우 $a_3=a_4=a_5=a_6=0$이 되어 조건을 만족시킨다.
(2)-(2) $17 \leq k \leq 31$인 경우 $a_4=(93-3k)k$가 된다.
이 경우에는 $k=31$일 때만 가능하다.
(2)-(3) $k=30$이면 $a_3=6k$, $a_4=3k$, $a_5=a_6=0$이 되어 조건을 만족시키지 못한다.
(2)-(4) $17 \leq k \leq 29$일 때 $a_5=a_4-3k$, $a_6=a_5-3k$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 (2)일 때 가능한 $k$의 값은 $k=31$, $k=32$이다.

(3) $1 \leq k \leq 16$인 경우 $(a_2 \geq 3k)$
$a_1=96$, $a_2=96-3k$, $a_3=96-6k$이다.

(3)-(1) $11 \leq k \leq 16$인 경우 $a_4=(96-6k)k$가 된다. (2)일 때와 마찬가지로 해보면 $k=16$일 때만 가능하다.
(3)-(2) $9 \leq k \leq 10$인 경우 $a_4=96-9k$, $a_5=(96-9k)k$가 된다.
$a_4<a_5$이므로 조건을 만족시키지 못한다.
(3)-(3) $1 \leq k \leq 8$인 경우 $a_4=96-9k$, $a_5=96-12k$가 된다.
<$a_5 \leq a_4 \leq a_6$이기 위한 경우>에서 $a_4<6k$이어야 하므로 $k$의 값은 7이상이어야 한다. 조건을 만족시키려면 $a_5<3k$가 되어 $a_6=(96-12k)k$가 되어야 한다.
($a_5 \geq 3k$이면 $a_6=a_5-3k$가 되어 조건을 만족시키지 못한다.)
$a_4=96-9k \leq a_6=(96-12k)k$가 되어야 한다. 7, 8중 주어진 부등식을 만족하는 $k$의 값은 7뿐이다.

따라서 구하는 답은 $32+31+16+7=86$이다.



제 2 교시

# 수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

**23.** $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-\sqrt{n^2-2n}}$의 값은? [2점]

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-\sqrt{n^2-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1-\frac{2}{n}}}$$

$$=\frac{2}{2-1}=2$$

**24.** 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x=t^2+2\ln t,\quad y=t^2+\ln t+1$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{4}$

$\frac{dx}{dt}=2t+\frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2t+\frac{1}{t}$ 이므로 구하는 답은 $\frac{2+\frac{1}{1}}{2+\frac{2}{1}}=\frac{3}{4}$ 이다.

**25.** 함수 $f(x)=\sin\pi x+1$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k+3n}{2n}\right)$의 값은? [3점]

① $2\pi-1$ ② $2\pi-2$ ③ $\pi$
④ $\pi-2$ ⑤ $\pi-1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k+3n}{2n}\right)=\pi\int_0^1 f\left(\frac{x+3}{2}\right)dx=\pi\int_0^1\left(1-\cos\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$=\left[\pi x-2\sin\frac{\pi x}{2}\right]_0^1=\pi-2$$

**26.** 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

(가) $f'(x)=xe^x$

(나) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{\int_1^{x^2}f(\sqrt{t})dt}=\frac{1}{2}$

① $e^2+6$ ② $e^2+3$ ③ $e^2$
④ $e^2-3$ ⑤ $e^2-6$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{\int_1^{x^2}f(\sqrt{t})dt}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\int_1^{x^2}f(\sqrt{t})dt}$$

$$=\frac{3}{2}\times\lim_{X\to1}\frac{X-1}{\int_1^{X}f(\sqrt{t})dt}=\frac{3}{2f(1)}=\frac{1}{2},\quad\therefore f(1)=3$$

$f'(x)=xe^x$에서 $f(x)=(x-1)e^x+C$ ($C$는 적분상수)
$f(1)=3$이므로 $f(x)=(x-1)e^x+3$이고

구하는 답은 $f(2)=e^2+3$이다.

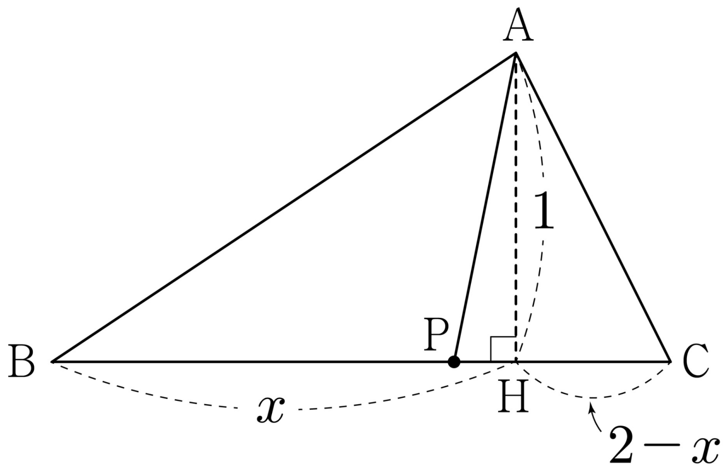
**27.** $\overline{AB}>\overline{AC}$이고 넓이가 1인 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC위에 점 P를 $\angle BAP=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡는다. $\overline{BC}=2$, $\tan(\angle PAC)=\frac{7}{9}$일 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① $\frac{\sqrt{14}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ⑤ 2

점 A에서 내린 수선의 발을 H라 하면,

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=1$에서 $\overline{AH}=1$이다.

$\overline{BH}=x$, $\overline{CH}=2-x$라 하면 $x>1$이다. ($\overline{AB}>\overline{AC}$)




$\angle BAH+\angle CAH=\angle BAP+\angle PAC$,

$\tan(\angle BAH+\angle CAH)=\tan(\angle BAP+\angle PAC)$

$\tan(\angle BAP+\angle PAC)=\dfrac{1+\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}}=8$이므로

$\tan(\angle BAH+\angle CAH)=\dfrac{(x)+(2-x)}{1-(x)\times(2-x)}=8$이다.

계산하면 $x=\frac{3}{2}$ $(x>1)$이다.

따라서 구하는 답은 $\overline{AB}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{BH}^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$이다.

**28.** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x>0$일 때 $f(x)=xe^x$이다. 모든 양의 실수 $t$에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 실근 중 작은 값을 $g(t)$라 하자. 모든 양의 실수 $s$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=s$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $s^2+2s$일 때, $g'(f(1))+g(f(1))$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2e}-3e+2$ ② $\frac{1}{2e}-3e+3$ ③ $\frac{1}{3e}-2e$ ④ $\frac{1}{3e}-2e-2$ ⑤ $\frac{1}{2e}-2e-3$

$f(x)$는 $x\geq 0$에서 증가하고

방정식 $f(x)=t$의 실근 중 음근을 $g(t)$, 양근을 $h(t)$라 하면

$f(g(t))=f(h(t))=t$이고 $h(t)e^{h(t)}=t$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $t^2+2t$이므로

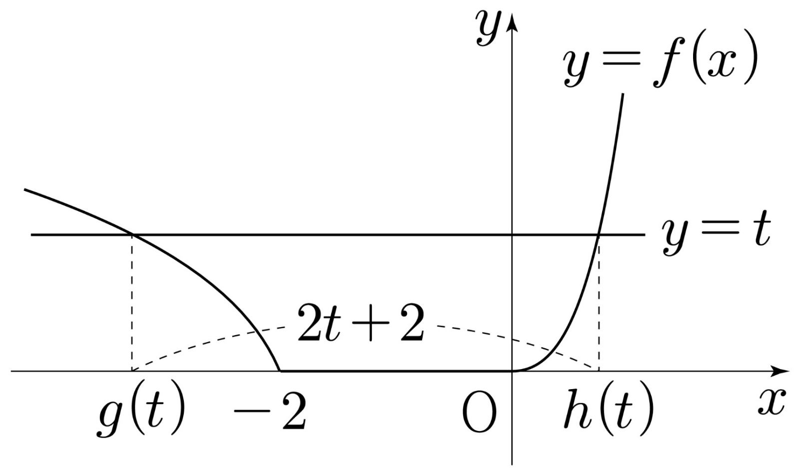
$$t\{h(t)-g(t)\}-\int_{g(t)}^{h(t)}f(x)dx=t^2+2t$$

이고, 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$$\{h(t)-g(t)\}+t\{h'(t)-g'(t)\}-\{h'(t)f(h(t))-g'(t)f(g(t))\}=2t+2$$

이다. $f(g(t))=f(h(t))=t$이므로

$h(t)-g(t)=2t+2$이다.




$h(t)=g(t)+2t+2$이므로

$f(1)=e$, $h(e)=1$, $g(f(1))=g(e)=1-(2e+2)=-2e-1$

$(g(t)+2t+2)e^{g(t)+2t+2}=t$에서 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$$(g'(t)+2)\times(g(t)+2t+3)\times e^{g(t)+2t+2}=1$$

이고 $t=f(1)=e$를 대입하면

$$(g'(e)+2)\times\{h(e)+1\}e^{h(e)}=1$$

계산하면 $g'(f(1))=g'(e)=\frac{1}{2e}-2$이다.

따라서 구하는 답은 $\frac{1}{2e}-2e-3$이다.

**단답형**

**29.** 두 함수

$$f(x)=\frac{2\times 4^x-1}{\ln 4},\quad g(x)=\ln(x-a)+b$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직이는 점 P와 곡선 $y=g(x)$ 위를 움직이는 점 Q에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H}_1$, $\mathrm{H}_2$이라 하자. $\overline{\mathrm{PH}_1}$의 최솟값과 $\overline{\mathrm{QH}_2}$의 최솟값이 같고, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $100\times a\times b$의 값을 구하시오.
(단, 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 만나지 않는다.) [4점]

$\overline{\mathrm{PH}_1}$이 최소일 때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $(x)'=1$이다.
이때 점 P의 $x$좌표를 $p$라 하면

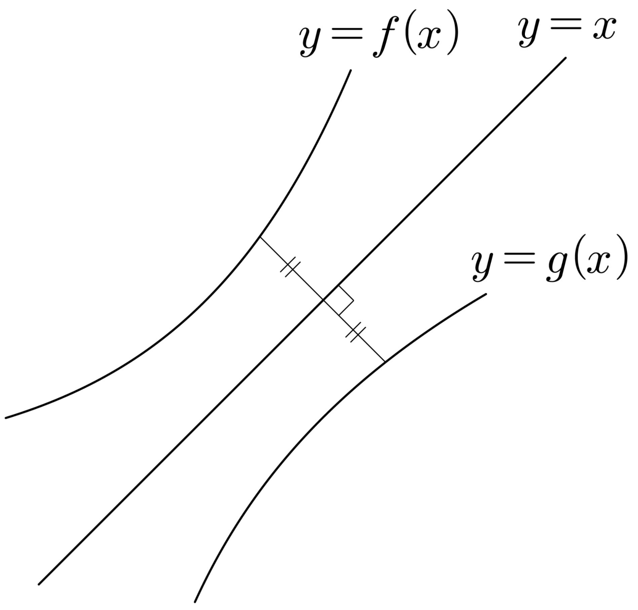
$$f'(p)=2\times 4^p=1,\ p=-\frac{1}{2}$$

이고, 이때 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$이다.
$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$과 직선 $x-y=0$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{PH}_1}$의 최솟값이고, 계산하면

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

이다.

$\overline{\mathrm{PH}_1}$의 최솟값과 $\overline{\mathrm{QH}_2}$의 최솟값이 같고,
$\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{PH}_1}$의 최솟값의 2배이므로
곡선 $y=f(x)$, 곡선 $y=g(x)$ 및 직선 $y=x$의 위치 관계는 다음과 같다.




$\overline{\mathrm{QH}_2}$가 최소일 때 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기는 $(x)'=1$이다.
이때 점 Q의 $x$좌표를 $q$라 하면

$$g'(q)=\frac{1}{q-a}=1,\ q=a+1$$

이고, 이때 점 P의 좌표는 $(a+1,\ b)$이다.
$(a+1,\ b)$와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{QH}_2}$의 최솟값이고, 계산하면

$$\frac{|a+1-b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4},\ a=b-\frac{1}{2}$$

이다. ($(a+1,\ b)$은 직선 $y=x$ 아래에 위치하므로 $a+1-b>0$)

두 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, $(a+1,\ b)$을 이은 직선의 기울기가 $-1$이 되어야 하므로

$$\frac{b}{a+\frac{3}{2}}=-1$$

이고, 계산하면

$$a=-1,\ b=-\frac{1}{2}$$

이다.

따라서 구하는 답은 $100\times(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=50$이다.

**30.** 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 $n$에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (a_n < -2) \\ -a_n & (a_n \geq -2) \end{cases}$$

이라 하자. $a_2 \times (a_4)^2 = -8$, $\sum_{n=4}^{\infty} b_n = b_3 - b_1 - b_2$일 때, $(a_4)^6$의 값을 구하시오. [4점]

첫째항을 $a$, 공비를 $r$이라 하면 $a_2 \times (a_4)^2 = -8$에서

$a_2 < 0$, $a^3r^7 = -8$

이고, $\sum_{n=4}^{\infty} b_n = b_3 - b_1 - b_2$에서 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이므로

$-1 < r < 0$ 또는 $0 < r < 1$

임을 알 수 있다.

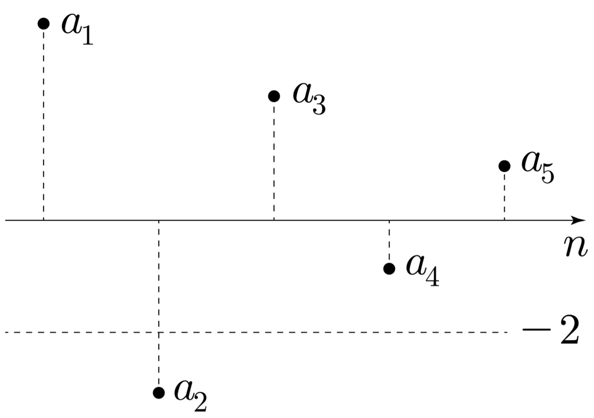
$a^3r^7 = -8$에서

$|a_3| = |ar^2| > 2$, $|a_4| = |ar^3| < 2$

$\sum_{n=4}^{\infty} b_n = b_3 - b_1 - b_2$를 정리하면

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2b_3$

(i) $-1 < r < 0$인 경우

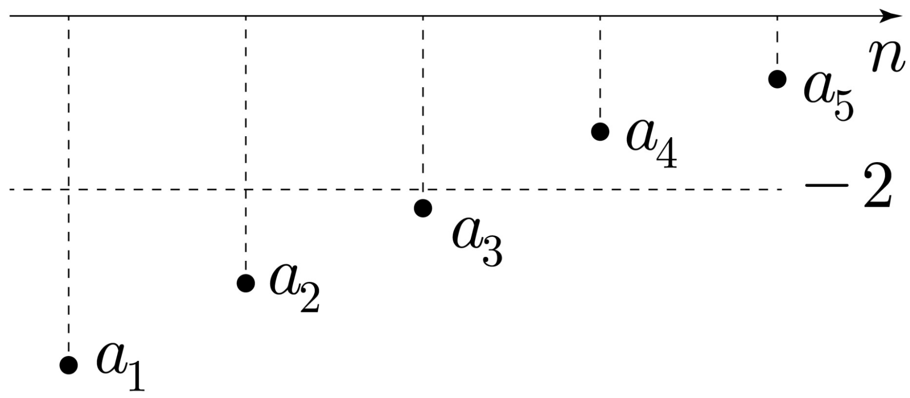



$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2b_3$에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2a_2 = 2a_3$, $\frac{a}{1-r} = 2ar + 2ar^2$

$-1 = r(r+1)(r-1)$

이고, $-1 < r < 0$이므로 모순이다. (우변은 양수)

(ii) $0 < r < 1$인 경우




$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2b_3$에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2(a_1 + a_2 + a_3) = -2a_3$, $\frac{a}{1-r} = 2a + 2ar$

$1 = 2 - 2r^2$, $\therefore r = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$a^3r^7 = -8$와 연립하면 구하는 답은

$(a_4)^6 = a^6r^{18} = (-8)^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = 16$

이다.