2024 고려대 모의 수리논술 풀이

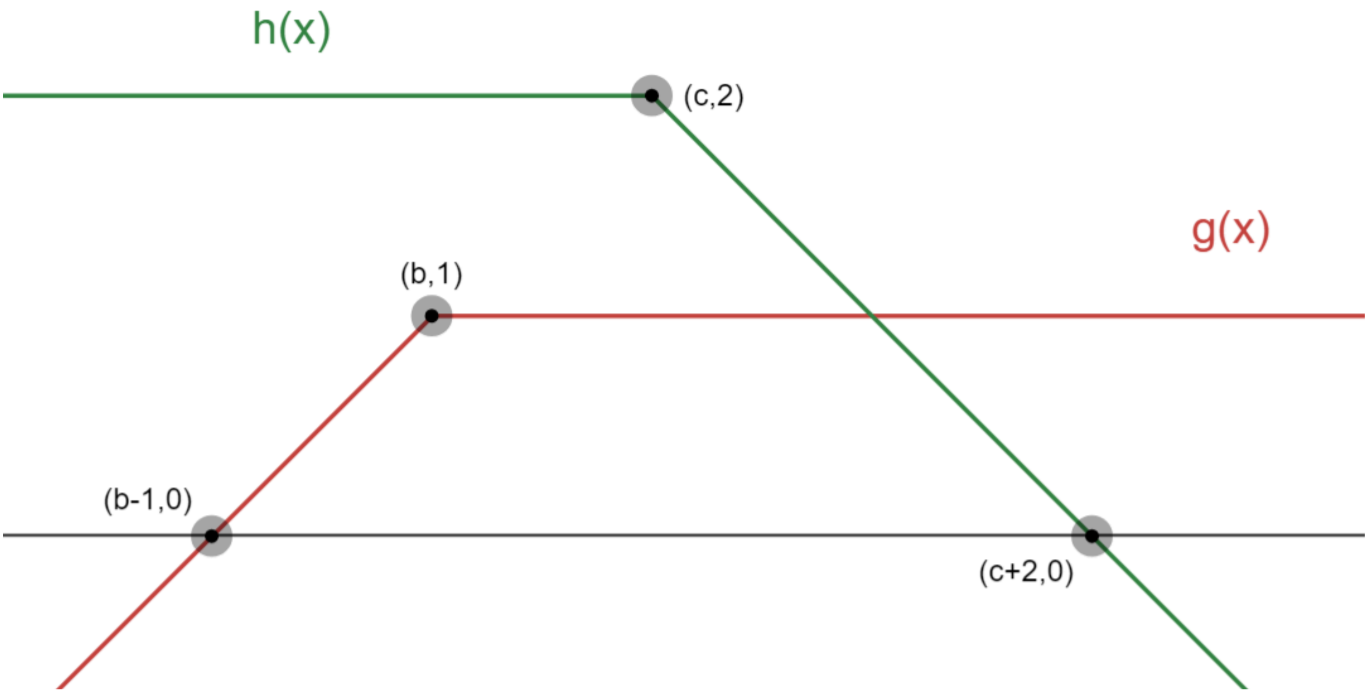
orbi 수학에빠진컴싸

1-1

먼저 $\sigma(x)$의 "의미"를 파악하자.

이 함수는 양수나 0을 넣으면 그대로 내보내고, 음수를 넣으면 0으로 만드는 일종의 "부호 판별기"이다.

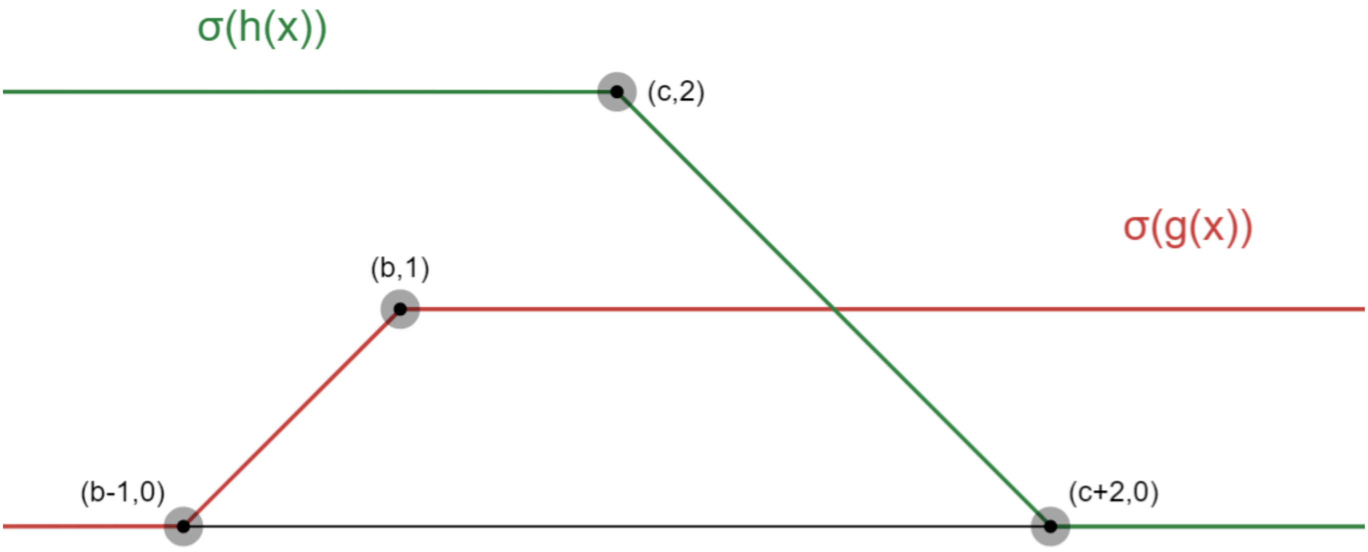
$\sigma(x)$를 평행이동해서 $g(x), h(x)$를 그려보자.



이때 다시 한 번 합성함수의 관점에서 $\sigma(x)$의 "의미"를 생각하자.

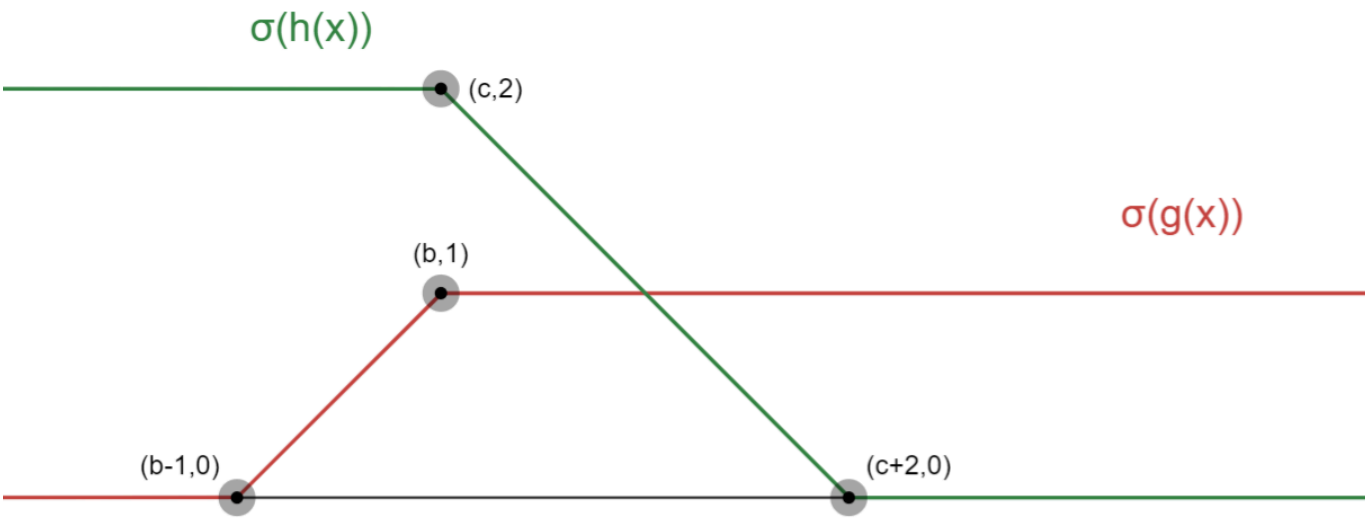
$\sigma(f(x))$가 있으면, $f(x)$가 양수인 부분은 그대로 놔두고, 음수인 부분은 $y=0$으로 바꿔주면 $\sigma(f(x))$가 된다는 걸 알 수 있다.

그렇기에 $\sigma(g(x)), \sigma(h(x))$의 개형도 쉽게 그려진다.



이처럼 $b \neq c$인 경우는 $f(x) = \sigma(g(x)) + \sigma(h(x))$의 미분 불가능점이 4개임을 알 수 있다.

또한 $b = c$인 경우를 보면,



$f(x)$의 미분 불가능점은 3개가 된다.

그러므로 정답은 $b = c$이다.

(#note: 서술할 때는 함수들의 수식을 적어야 한다. 이때는 우리가 한 것처럼, **개형을 먼저** 그리고, 개형에 알맞게 수식을 끼워 맞추는 것이 가장 빠르다. 고1 수학 내신을 성실히 했다면 익숙한 기술이다.)

1-2

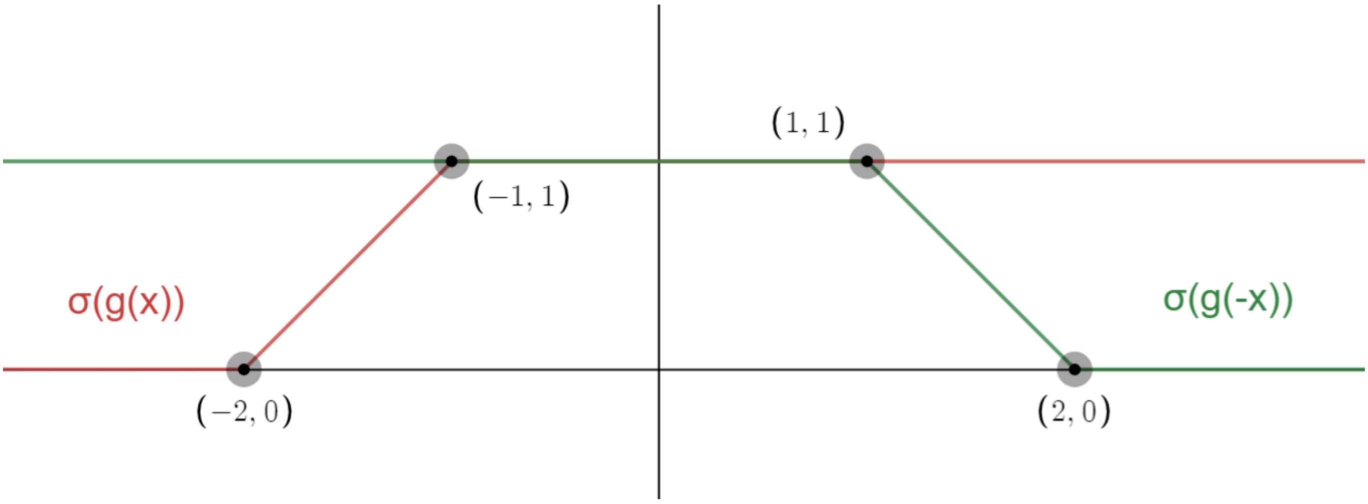
1-1에서 파악한 $g(x)$에서 $b=-1$을 대입하면 1-2의 $g(x)$이다.

이때, $f(0)>0 \iff ab>0$이므로, a, b의 부호가 같아야 한다.

여기서, 연속함수 $\times$ 연속함수의 미분 가능성을 생각해 보자. 연속함수 $i(x), j(x)$에 대해서,

$\frac{d}{dx}i(x)j(x)=i'(x)j(x)+i(x)j'(x)$이므로, $i(x)j(x)$가 $x=a$에서 미분 가능하고, $j'(x)$가 $x=a$에서 불연속이라면, $i(a)=0$이어야 한다.

이때 $i(x)=(x-a)(x-b), j(x)=\sigma(g(x))+\sigma(g(-x))-1$을 대입해 생각해 보자.



위의 그림을 이용하면 $j(x)$는 미분 불가능점이 4개이다.

$f(x)=i(x)j(x)$의 미분 불가능점이 2개이어야 하므로, $i(x)=0$의 근은 $-2,-1,1,2$ 중 두 가지이다.

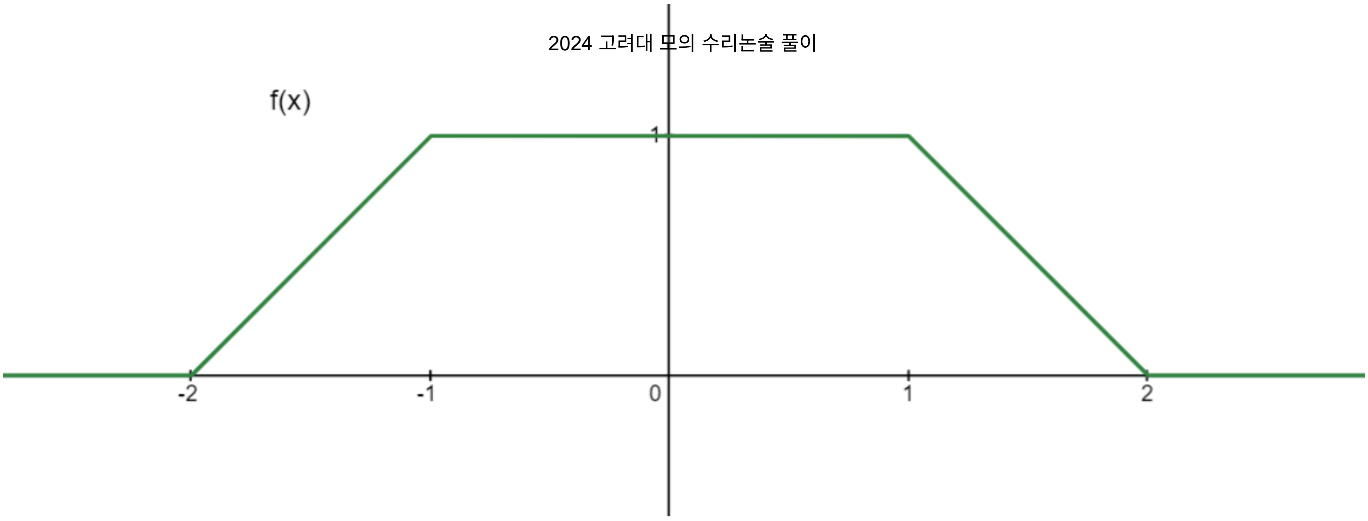
그러므로, 가능한 (a, b) 순서쌍은 $(-1,-2),(-2,-1),(1,2),(2,1)$이다.

1-3

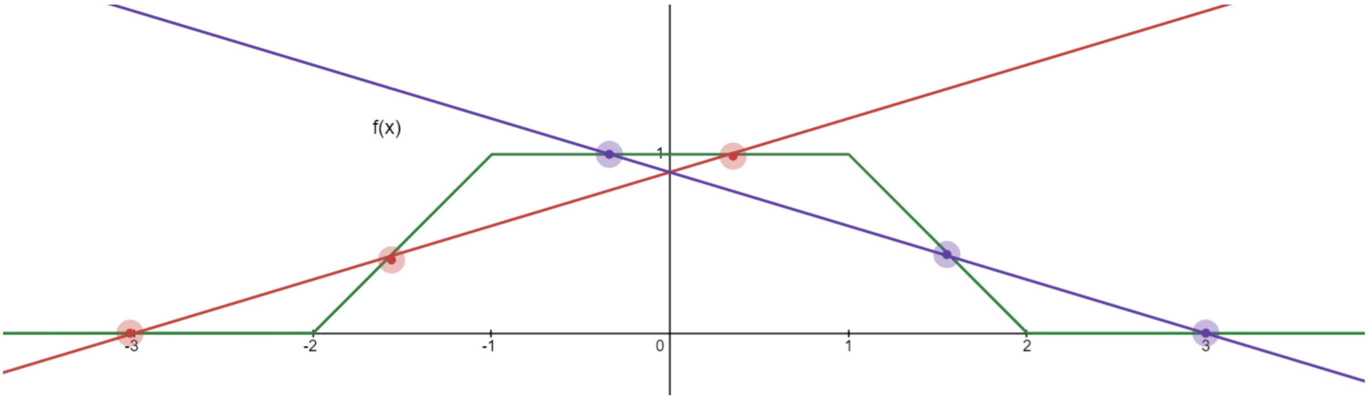
앗! 1-3의 $g(x)$는 1-2의 $g(x)$와 동일하다! 아싸~
(라는 생각이 들어야 한다.)

$f(x)=\sigma(g(x))+\sigma(g(-x))-1$ (1-2에서 사용한 $j(x)$와 동일하다!)

이 합성함수를 그려보면,
(#note: 여기서도 마찬가지로 수식이 먼저가 아닌, 개형을 먼저 그리고 수식을 끼워 맞춘다.)

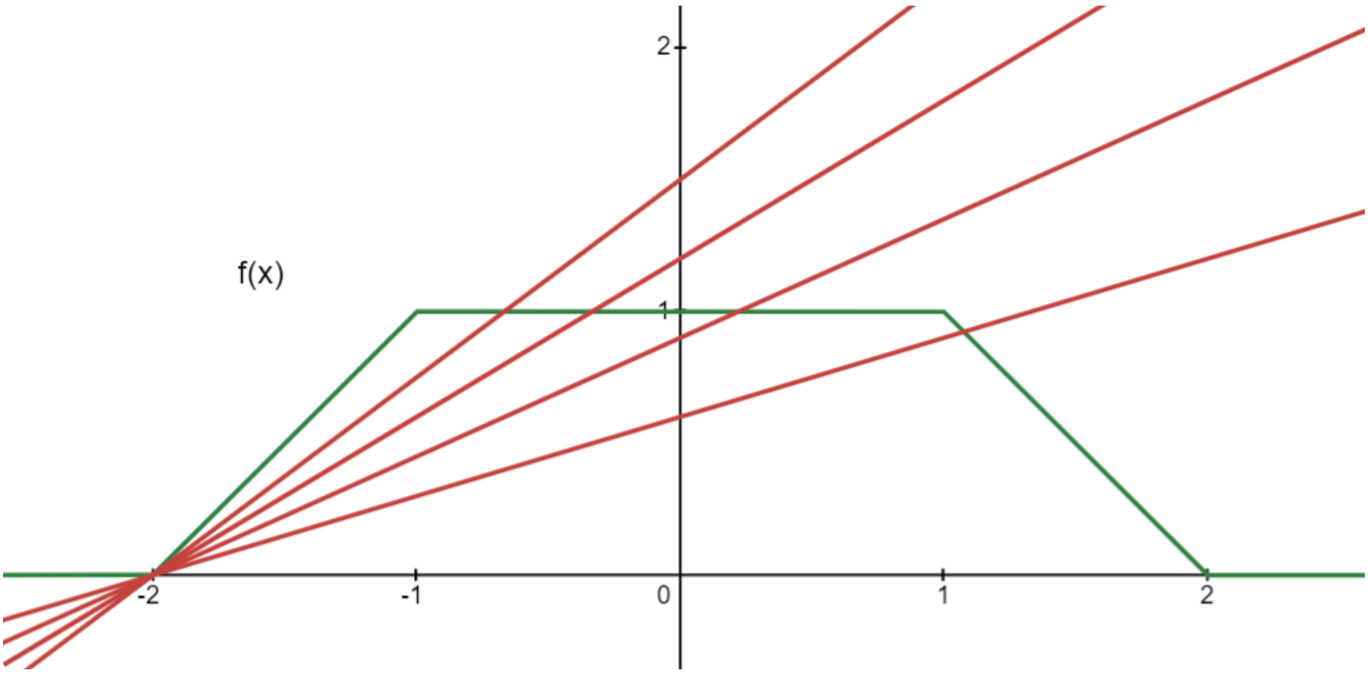


$f(x)$가 y축 대칭이므로, 가능한 직선 $ax+b$의 양상 또한 대칭적이다.



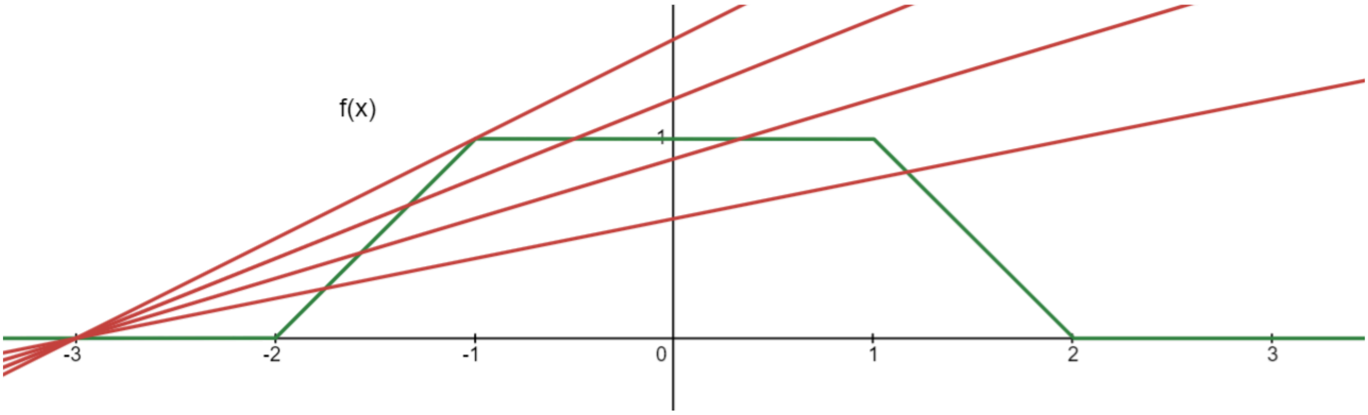
이 그림처럼, 빨간색 직선을 y축 대칭한 보라색 직선도 가능함을 알 수 있다.

우선 직선의 x절편이 음수인 경우를 생각해 보자. a, b의 조건들을 정리해 보면,



우선 해당 그림을 통해, x절편이 -2 미만이어야 한다.

조건 ① : $-\frac{b}{a} < -2$



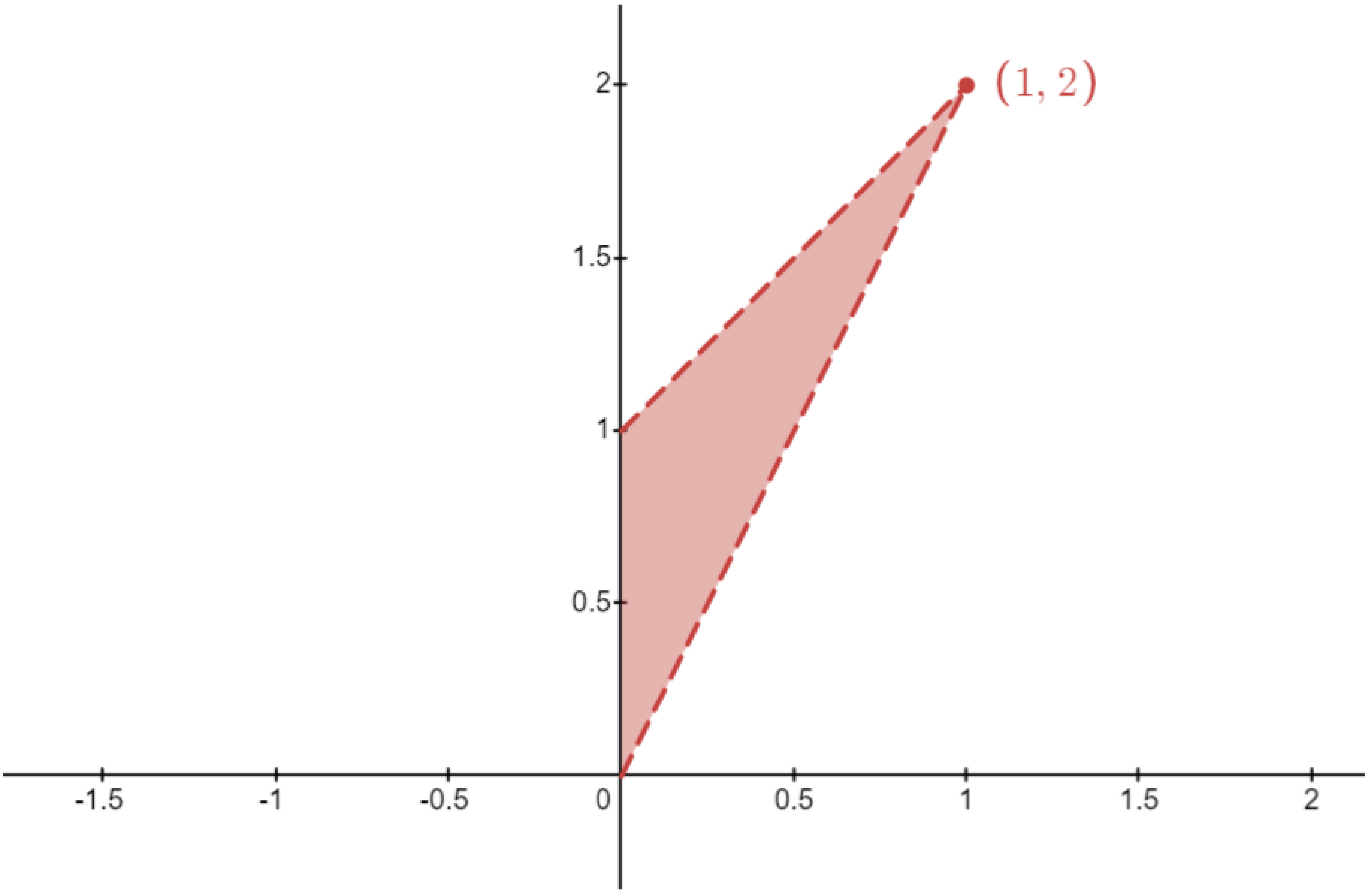
이 그림을 보면 직선은 $(-1, 1)$ 아래를 지나야 한다는 걸 알 수 있다.

조건 ② : $-a + b < 1$

그리고 기울기는 양수여야 함이 자명하므로, 조건 ③ : $a > 0$

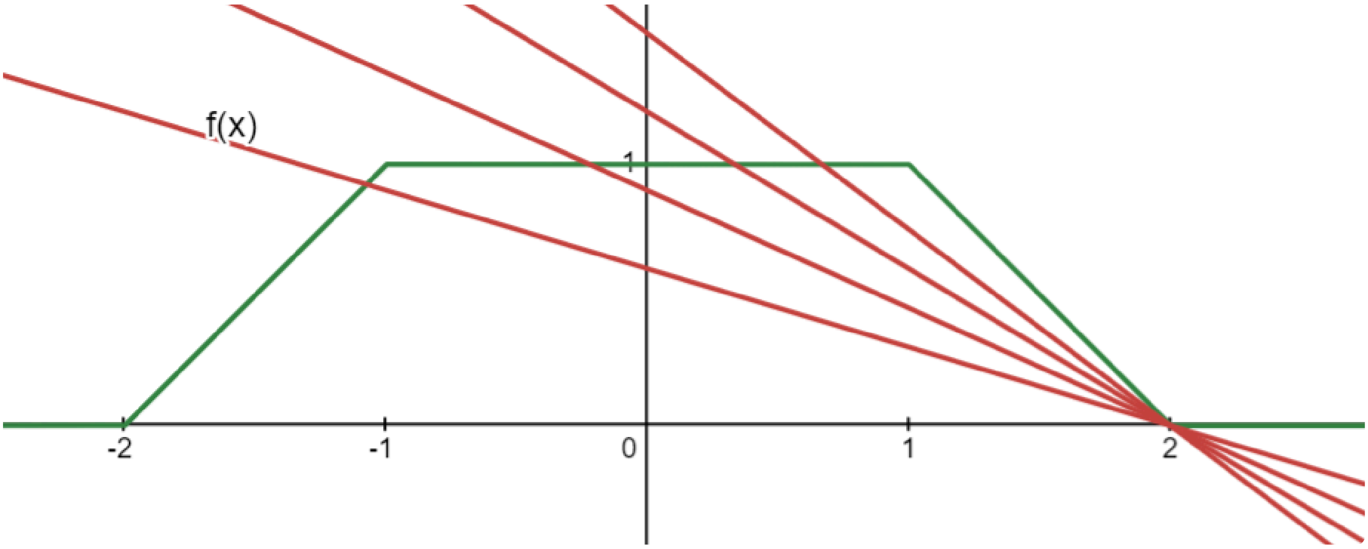
조건 ①, ②, ③을 정리하면, $1 + a > b > 2a$, $(a > 0)$를 얻는다.

이제 a, b를 x, y로 바꿔서 생각해 보면,

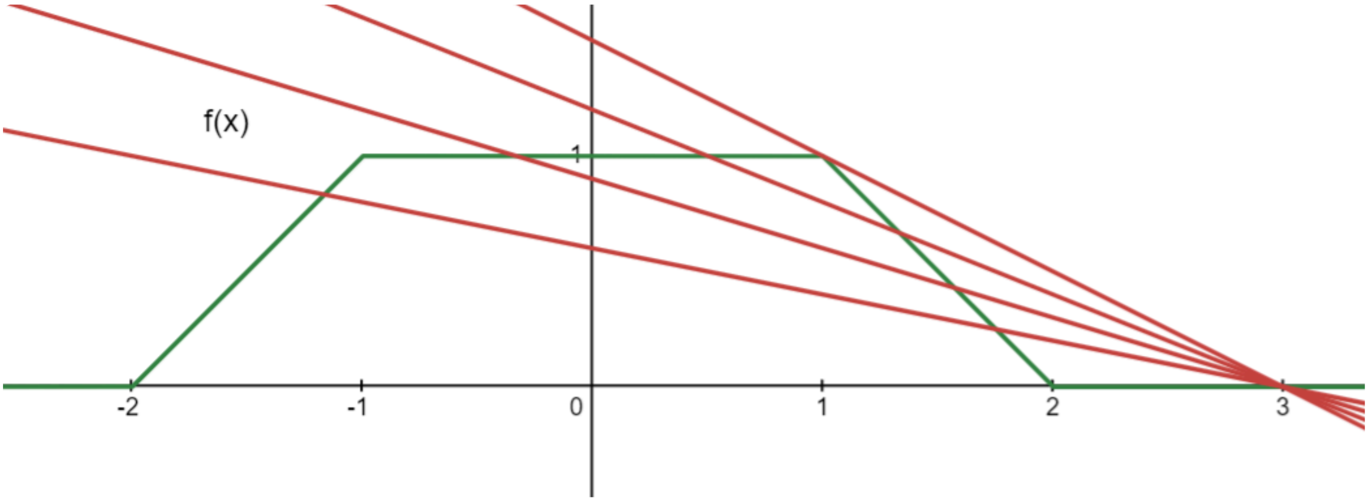


이런 부등식의 범위를 얻는다.

(#note: 여기서 대칭적으로 부등식의 범위가 나오리라 생각하고 정답을 1로 낼 수 있다. 하지만 혹시 모르니 확인해 보자.)



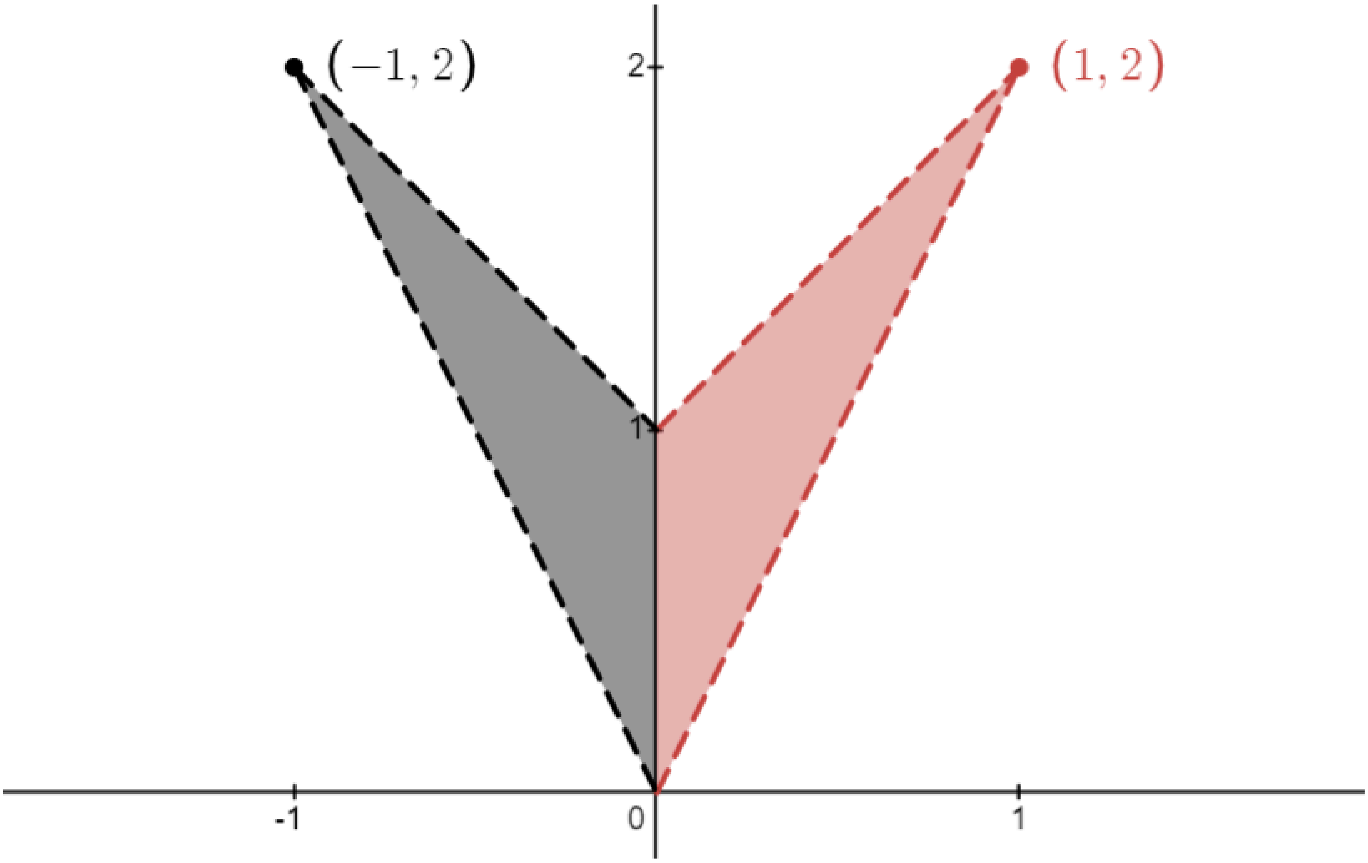
조건 ① : $-\frac{b}{a} > 2$



조건 ② : $a + b < 1$

그리고 기울기는 음수여야 함이 자명하므로, 조건 ③ : $a < 0$

조건 ①, ②, ③을 정리하면, $1-a>b>-2a,\ (a<0)$를 얻는다.



그러므로 순서쌍 (a,b)가 차지하는 면적은 1이다.

(#note: $a=0$인 경우는 불가능해서, 해당 그림에서 $x=0$ 부분이 뚫려 있어야 한다. 하지만 넓이는 그대로다!)

(#note: 부등식의 영역은 고1 수학에서 수직선을 이용해 대소를 비교하는 논리를 2차원으로 확장한 것으로 받아들이자.)

2-1

$f(x)=x^3+px^2+qx+r$의 변곡점의 x좌표는 $-\frac{p}{3}$이다. 즉,
$f\left(-\frac{p}{3}\right)=-1, f'\left(-\frac{p}{3}\right)=\frac{p}{3}$을 만족해야만 한다.

$f'(x)=3x^2+2px+q, f'\left(-\frac{p}{3}\right)=-\frac{p^2}{3}+q=-1$

이때! $-\frac{p^2}{3}+q=-1$을 보자. $-\frac{p^2}{3}+\text{정수}=\text{정수}$

이므로, $-\frac{p^2}{3}$ 또한 정수여야만 한다. 따라서 $p=3k$ (k는 정수)이어야 한다.

(#note: 자주 하는 실수가, 아무 생각 없이 양변에 3을 곱해서, $-p^2+3q=-3$만 뚫어져라 보는 것이다. 정수의 관계를 나타내는 식은 원래의 형태를 유지하면서 봐야 한다.)

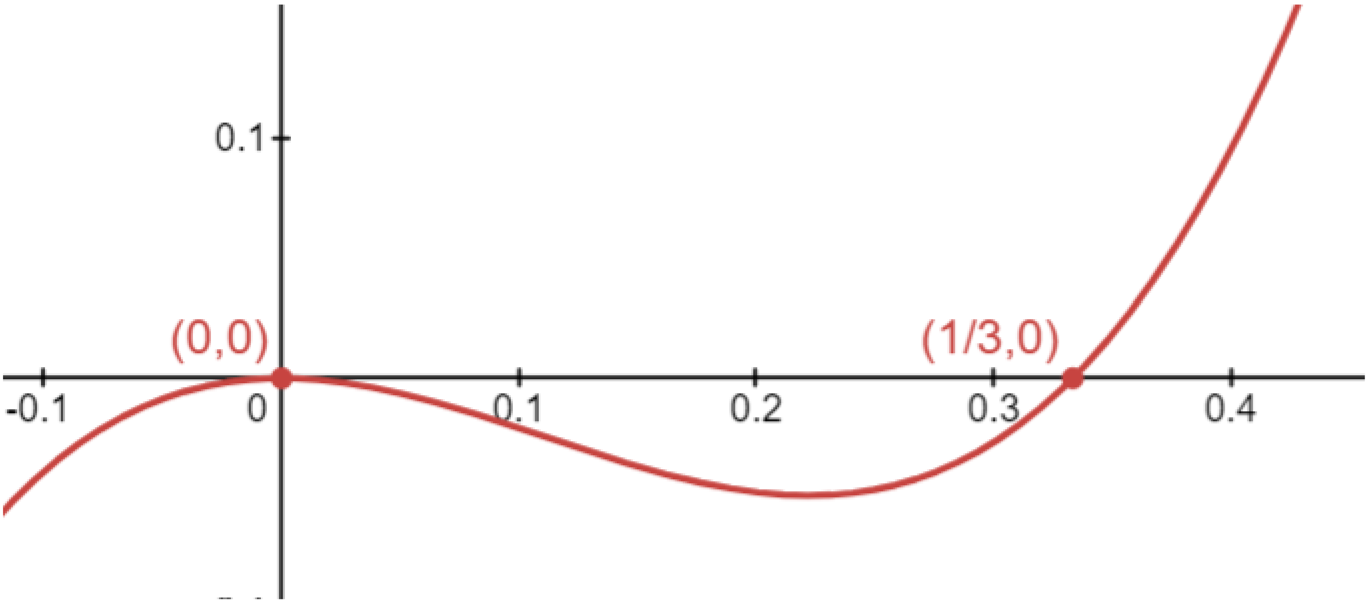
그러므로, $q = -1 + 3k^2$이다.

여기서 $f(-k) = k$이므로, $-k^3 + 3k^3 + k - 3k^3 + r = k \ \therefore r = k^3$

그러므로, $pqr = 3k^4(3k^2 - 1)$

이때, $\alpha = k^2$ $(\alpha > 0)$이라고 하자,
$pqr = 3\alpha^2(3\alpha - 1)$

해당 삼차함수를 그려보면,



α는 0 초과의 제곱수만 가능하고, 해당 삼차함수는 가능한 α 범위에서 늘 증가하므로, pqr이 최소인 순간은 $\alpha = 1$ ($\iff$ $k = \pm 1$)이다.

① : $k = 1$이면, $p = 3,\ q = 2,\ r = 1$이므로, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
② : $k = -1$이면, $p = -3,\ q = 2,\ r = -1$이므로, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

2-2

$p \to \infty$이므로, $k \to \infty$이다.
즉, $\lim_{p \to \infty} \frac{pq}{r} = \lim_{k \to \infty} \frac{pq}{r}$
그리고 2-1에서 p, q, r을 k로 표현했으므로,
답 = $\lim_{k \to \infty} \frac{(3k)(3k^2 - 1)}{k^3} = 9$이다.

3-1

먼저, 점 A를 점 B_0라고 부르자.

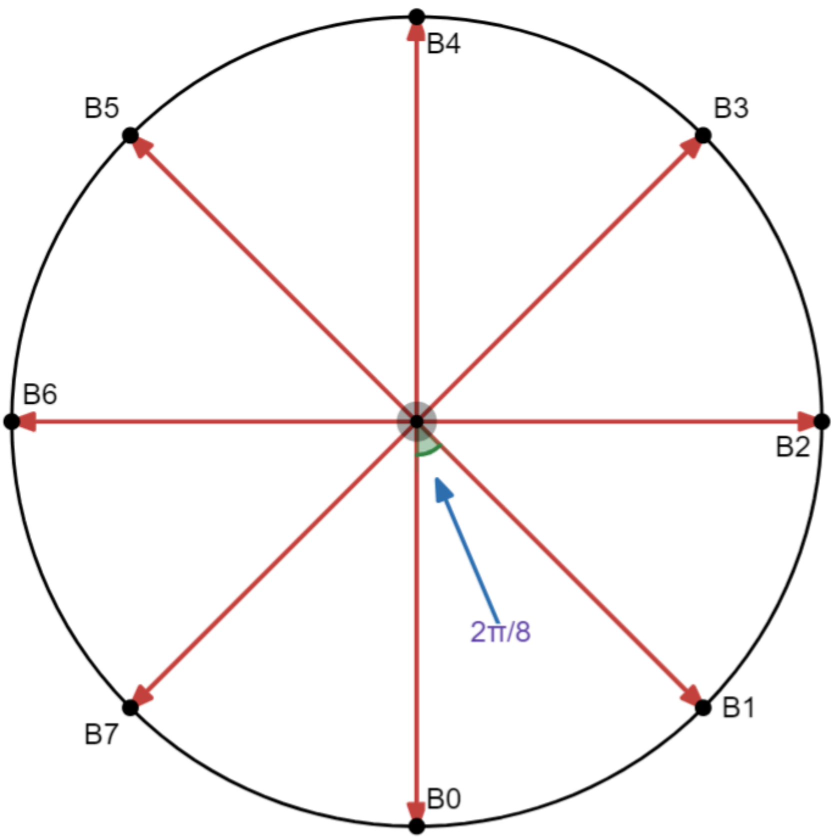
그렇다면, $\vec{b_i} = \overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OB_0}$

(내적을 해야 하므로 사이각을 본다 $\implies$ 사이각을 보기 쉽도록 시점을 통일시킨다!)

또한 해당 원의 중심을 점 O라고 부르자. 점이 B_n까지 있다면, 해당 원은 $n+1$ 등분이 된다.

따라서, $\angle B_0OB_k = \frac{2\pi}{n+1}k$이다. (그러므로, $\angle B_iOB_j = \frac{2\pi}{n+1}(i-j)$)

여기서는 $n=7$이다.



우리가 구해야 하는 건 $\vec{b_2} \cdot \vec{b_5} = (\overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_0}) \cdot (\overrightarrow{OB_5} - \overrightarrow{OB_0})$
$= \overrightarrow{OB_2} \cdot \overrightarrow{OB_5} - \overrightarrow{OB_0} \cdot \overrightarrow{OB_5} - \overrightarrow{OB_0} \cdot \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_0} \cdot \overrightarrow{OB_0}$이다!

$\overrightarrow{OB_2} \cdot \overrightarrow{OB_5} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
$\overrightarrow{OB_0} \cdot \overrightarrow{OB_5} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
$\overrightarrow{OB_0} \cdot \overrightarrow{OB_2} = \cos\left(\frac{1\pi}{2}\right)$
$\overrightarrow{OB_0} \cdot \overrightarrow{OB_0} = 1$

이므로, 계산하면, 정답 = 1

3-2

3-1에서 사용한 아이디어를 그대로 사용한다 (유기적이다!)
먼저, 점 A를 점 B_0라고 부르자.

그렇다면, $\overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OB_0}$

또한 해당 원의 중심을 점 O라고 부르자. 점이 B_n까지 있다면, 해당 원은 $n+1$ 등분이 된다.
따라서, $\angle B_0OB_k = \frac{2\pi}{n+1}k$이다. (그러므로, $\angle B_iOB_j = \frac{2\pi}{n+1}(i-j)$)

구해야 하는 값은,
$\lim_{n\to\infty} \overrightarrow{b_1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{b_i} = \lim_{n\to\infty} (\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB_0}) \cdot \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OB_0})$이다.
내적의 분배법칙과 시그마의 성질에 의하여,

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OB_i}) - \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OB_0}) - \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OB_0} \cdot \overrightarrow{OB_i}) + \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OB_0} \cdot \overrightarrow{OB_0}) \right)$$

$\angle B_iOB_j = \frac{2\pi}{n+1}(i-j)$, $|\overrightarrow{OB_i}| = 1$을 이용해 정리하면,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n+1}(i-1)\right) - \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) - \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n+1}(i)\right) + \sum_{i=1}^{n} 1 \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n+1}(i-1)\right) - \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n+1}(i)\right) - n\cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) + n \right)$$

$\sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n+1}(i-1)\right) - \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n+1}(i)\right)$을 해석하면

(텔레스코핑!)

$\cos(0) - \cos\left(\frac{2\pi n}{n+1}\right)$이다.

그러므로, 구해야 하는 극한은,

$$\lim_{n\to\infty} \cos(0) - \cos\left(\frac{2\pi n}{n+1}\right) + n - n\cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos(0) - \cos\left(\frac{2\pi n}{n+1}\right) = 1 - 1 = 0$$

그리고,

$$\lim_{n\to\infty} n - n\cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}(n+1)\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)}{\frac{2\pi}{n+1}} \times 2\pi \times \frac{}{n}$$

$u = \frac{2\pi}{n+1}$, $u \to 0^+$이라고 할 수 있다.

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{1-\cos(u)}{u^2} \times u \times 2\pi \times 1 = \frac{1}{2} \times 0 \times 2\pi \times 1 = 0$$

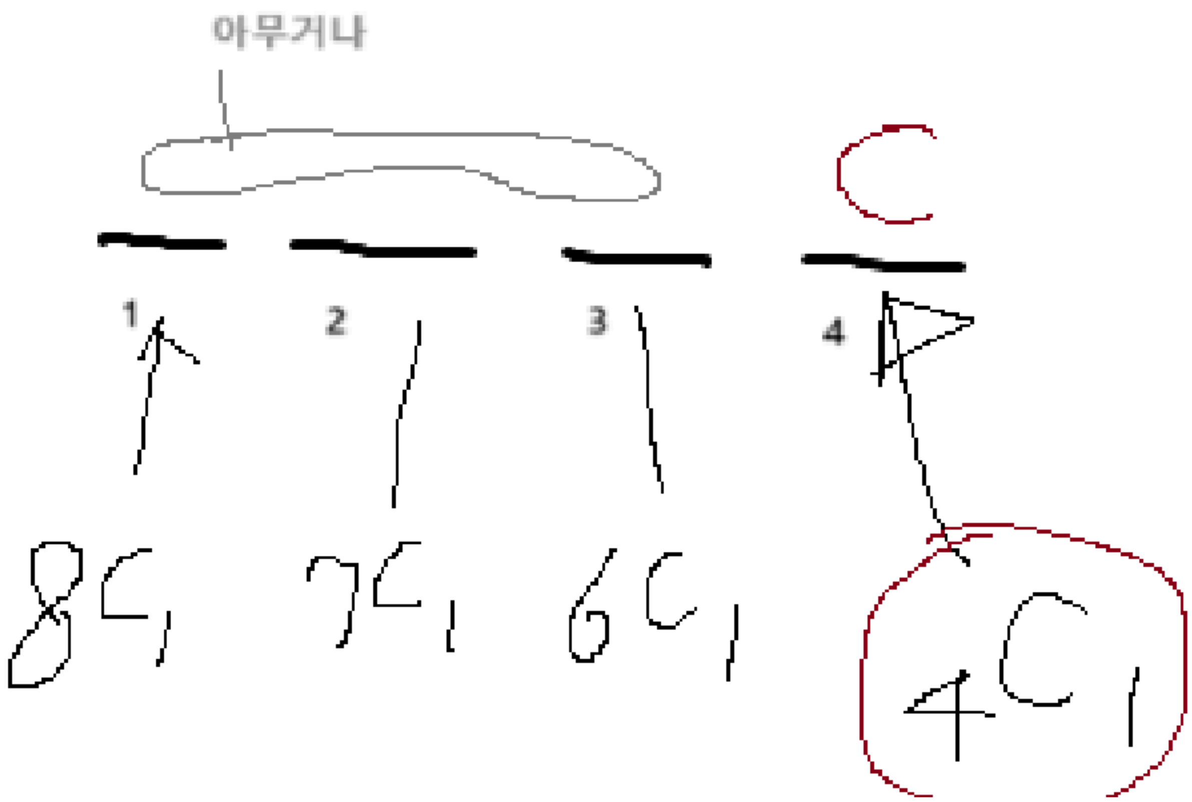
이므로, $0+0=0$, 정답은 0이다.

(#note: 예시 답안과 풀이 방법이 다르니까 둘 다 해보자.)

4-1

고정할 건 먼저 고정한다! 가 핵심이다.

여기서는 4번째에서 진홍색이 나오는 걸 **먼저** 고정하고 가는 것이다. (안 그러면... OTL)
확률을 봐야 하므로 모든 공을 서로 다르게 구분하고 가야 한다.



그리고 전체는 당연히 ${}_9C_1 \times {}_8C_1 \times {}_7C_1 \times {}_6C_1$이다.

그러므로 정답은 $\frac{8\times7\times6\times4}{9\times8\times7\times6} = \frac{4}{9}$

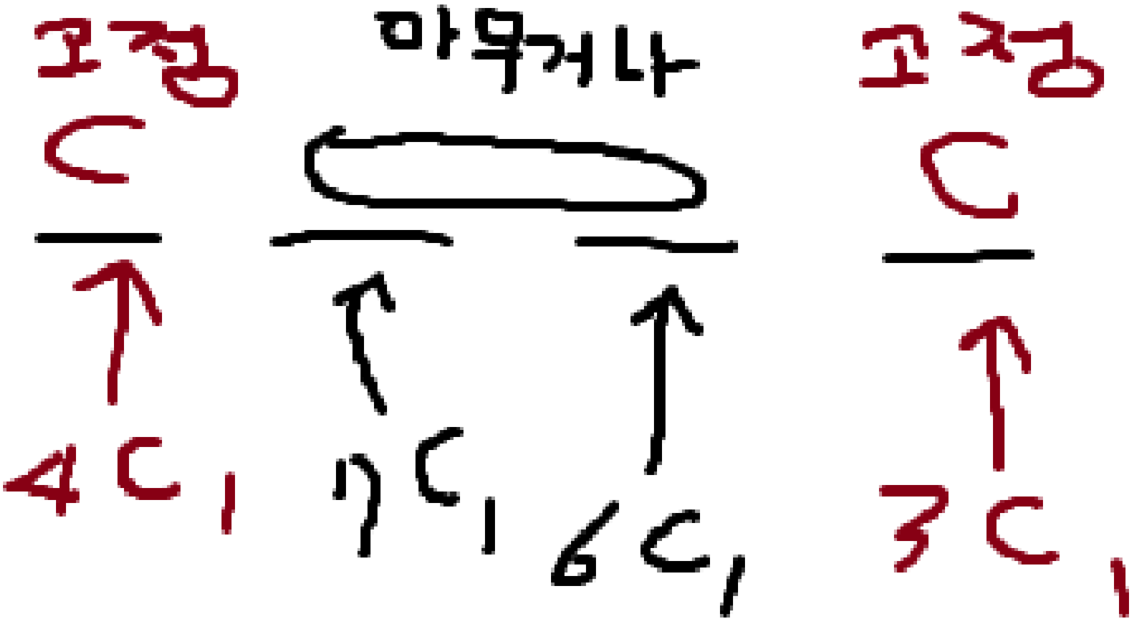
(#note: 고려대를 상징하는 색인 크림슨색의 한글 이름은 진홍색이다.)

4-2

$E[X] = 100P(X=100) + 200P(X=200) + 300P(X=300)$이다.

여기서 $P(X=200) + P(X=300) = \frac{4}{9}$이다. (4-1에서 구했다!)

$P(X=300)$을 구해보자.



마찬가지로, 고정할 건 먼저 고정한다.

4-1에서 전체의 경우의 수는 $9 \times 8 \times 7 \times 6$임을 구했으므로,

$P(X=300) = \frac{4 \times 7 \times 6 \times 3}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{1}{6}$이다.

그러므로, $P(X=200) = \frac{5}{18}$이다.

여기서, 1번째에서 파란색이 나오고, 4번째에서 진홍색이 나올 확률과 1번째에서 진홍색이 나오고, 4번째에서 파란색이 나올 확률이 동일함을 알 수 있다. (대칭성!!)

$\therefore P(X=100) = \frac{5}{18}$

그러므로 정답은 $E[X] = 100 \times \frac{5}{18} + 200 \times \frac{5}{18} + 300 \times \frac{1}{6} = \frac{400}{3}$이다.