2026년 7월 교육청 보충 문항

001

함수 $f(x)=x^3+ax$에 대하여, 실수 t에 대해 곡선 $y=f(x)$위의 점 $P(t, f(t))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.
이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $|2t|$의 값을 구하시오. [3점]

(가) 함수 $f(x)$, $g(x)$은 서로 다른 두 점에서 만난다. (나) $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=4$

001 해설

난이도: 하 / times: 1m30s

1.
$g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 좌우 극한과 함숫값이 일치해야 한다.
→ $f(0)=0$, $g(0+)=0$, $g(0-)=0$이므로, 연속성이 성립한다.

2.
$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=4$

→ $\int_{-1}^{0}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{0}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$

→ $\int_{-1}^{0}\{f(x)-f(x)\}dx+\int_{0}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$

→ $\int_{0}^{1}\{(x^3+3x)-(2tx^3+6x)\}dx$

→ $\int_{0}^{1}\{(1-2t)x^3-3x\}dx$ → $(1-2t)\times\int_{0}^{1}x^3dx-3\times\int_{0}^{1}xdx$

→ $(1-2t)\times\frac{1}{4}-3\times\frac{1}{2}=\frac{1-2t}{4}-\frac{3}{2}$

→ $\frac{1-2t}{4}-\frac{3}{2}=4$ → $1-2t-6=16$ → $-2t=21$ → $t=-\frac{21}{2}$

3.
$|2t|=21$

002 - 7월 교육청 변형

함수 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$에 대하여, 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2)+k & (x<0) \\ -f(x-2)-k & (x \geqq 0) \end{cases}$$

실수 t에 대하여, $y=g(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자.
$\left|\lim_{t\to k} h(t)-\lim_{t\to k} h(t)\right|=2$를 만족시키는 서로 다른 실수 k의 개수를 구하시오.

(단, $b\in \mathbb{R}$) [4점]

002 해설

난이도: 중하 / times: 2m30s

핵심 아이디어

교점 개수가 갑자기 바뀌려면, 삼차함수와 $y=t$가 중근을 이루는 지점이 있어야 한다.
우리는 두 구간에서 정의된 삼차함수 각각에 대해, 그런 t가 몇 개인지를 따진다.

1.
첫 번째 구간 함수
$f(x)=x^3-6x^2+9x+(t-2)$
이때 $f(x)=0$ 방정식이 실근 3개 $\Leftrightarrow$ 실근 1개로 바뀌는 구간이 존재한다.

2.
극값 판별 (도함수)
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$ → $x=1,\ 3$
극댓값, 극솟값
$f(1)=1-6+9+(t-2)=2+t$
$f(3)=27-54+27+(t-2)=-2+t$

이 함수는 $t\in(-2,\ 2)$일 때 교점 3개,
$t=-2, 2$에서 중근, 바깥에서는 1개

3.
결론
$t=-2$: 실근 3개 → 2개로 점프 (중근 발생)
$t=2$: 실근 3개 → 1개로 점프
즉, 두 지점에서 개수 2개 점프 발생
→ 이로부터 $k=-2,\ 2$ 두 개 확보

4.
두 번째 구간 함수
마찬가지 구조이며, 연속이지만, 이 구간에서도 한 번 실근 개수가 점프하는 지점 존재
(by. 삼차방정식, 실근 개수 $1\Leftrightarrow3\Leftrightarrow1$ 바뀌는 구간 존재)
$f'(x)=3x^2-6x-3=3(x^2-2x-1)$
반드시 1회 발생 (중근) → 또 하나의 k 존재

5.
총 3개