

김 O 수 미적분 모의고사

2회 해설지

1번	2번	3번	4번	5번
③	①	①	④	①
6번	7번	8번	9번	10번
③	②	⑤	④	①
11번	12번	13번	14번	15번
②	⑤	⑤	③	③
16번	17번	18번	19번	20번
7	16	15	17	172
21번	22번			
59	640			

23번	24번	25번	26번	27번
③	④	⑤	②	③
28번	29번	30번		
④	4	324		

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\log_6 6 \times \frac{\log_6 4}{\log_3 8}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$$\log_6 6 \times \frac{\log_6 4}{\log_3 8} = \log_6 6 \times \log_6 4 \times \log_8 3$$

$$= \log_6 3 \times \log_6 6 \times \log_8 4 = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

2. $\int_{-2}^2 \left(\frac{5}{16}x^4 - x^3 + |x| \right) dx$ 의 값은? [2점]

- ① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

$$\int_{-2}^2 \left(\frac{5}{16}x^4 - x^3 + |x| \right) dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{5}{16}x^4 + |x| \right) dx = 2 \times \int_0^2 \left(\frac{5}{16}x^4 + |x| \right) dx$$

$$= 2 \times \left[\frac{1}{16}x^5 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 = 8$$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 + a_5 = \frac{5}{4}$, $a_6 + a_8 = 10$ 일 때,

a_1 의 값은? [3점]

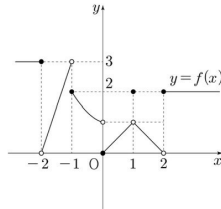
- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

$$\text{공비를 } r \text{이라 한다면 } r^3 = \frac{a_6 + a_8}{a_3 + a_5} = 8, r = 2$$

$$a_3 + a_5 = a_1 \times (r^2 + r^4) = a_1 \times (4 + 16) = 20a_1 = \frac{5}{4} \text{ 이므로}$$

$$a_1 = \frac{1}{16}$$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(-2x)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(-2x) = 1 + \lim_{t \rightarrow -2-} f(t) = 1 + 3 = 4$$

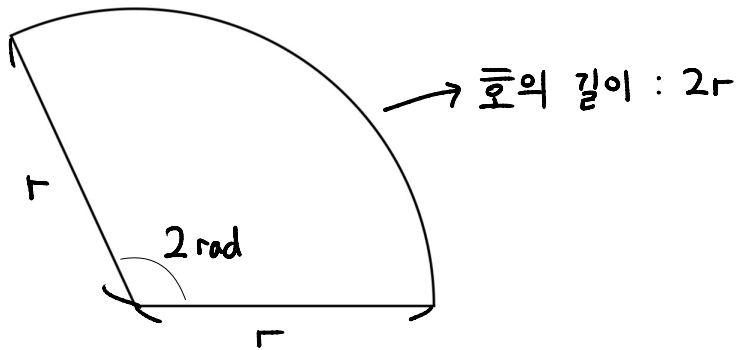
5. 중심각의 크기가 2라디안이고 넓이가 64인 부채꼴의 둘레의 길이는? [3점]

- ① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

반지름의 길이를 r 이라 하면

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \theta = r^2 = 64 \text{ 이므로 } r = 8 \text{ 이다.}$$

둘레의 길이는 $r + r + r\theta = 8 + 8 + 16 = 32$



6. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x (t-1)f'(t)dt = x^3 - 3x^2 + 3x + k$$

를 만족시킨다. $f(1)=0$ 일 때, $k+f(3)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$$\int_1^x (t-1)f'(t)dt = x^3 - 3x^2 + 3x + k \text{ 에서 양변에 } x=1 \text{ 대입하면}$$

$0 = 1 + k$ 에서 $k = -1$ 이고, 양변을 x 에 대하여 미분하면

$(x-1)f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ 이므로 $f'(x) = 3(x-1)$ 이다.

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + C \text{ 에서 } f(1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2} \text{ 이고, } k + f(3) = -1 + \frac{27}{2} - 9 + \frac{3}{2} = 5 \text{ 이다.}$$

7. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + k$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & (x < a) \\ -|f(x)| & (x \geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, k 에 대하여 $a+k$ 의 값은? [3점]

- ① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

$g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \text{ 이다.}$$

$(a+1)^2 = -|f(a)|$ 에서 좌변은 0이상, 우변은 0이하이므로 모두 0이다.

$\therefore a = -1$ 이고, $f(-1) = 0$ 이므로 $k = -5$ 이다.

$$\therefore a + k = -1 - 5 = -6$$

8. 두 상수 a, b 에 대하여 $3^{a+b} = 3^a - 1 = 3^{a-2} - 3^b$ 일 때, 3^{a+b} 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3\sqrt{2}+4}{4}$ ② $\frac{3+\sqrt{2}}{3}$ ③ 1
④ $\frac{3-\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}-4}{4}$

$3^a = A, 3^b = B$ 라 하자.

$$AB = A - 1 = \frac{A}{9} - B \text{이므로}$$

$$A - 1 = \frac{A}{9} - B \text{에서 } B = 1 - \frac{8}{9}A \text{이고}$$

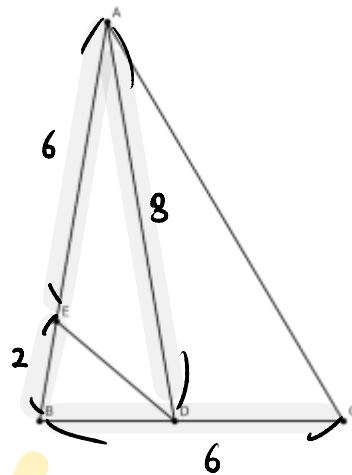
이를 $AB = A - 1$ 에 대입하면 $A = \frac{3\sqrt{2}}{4} (\because A > 0)$ 이다.

$$\therefore AB = A - 1 = \frac{3\sqrt{2}-4}{4} \text{이다.}$$

9. 그림과 같이 삼각형 ABC 에 대하여 선분 BC 위에 점 D , 점 A 와 점 B 를 3:1로 내분하는 점 E 가 있다.

$\angle BAC = \angle BDE$ 이고, $\overline{AB} = \overline{AD} = 8, \overline{BC} = 6$ 일 때,

$\overline{AC}$ 의 길이는? [4점]



- ① $6\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{19}$ ③ $4\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{21}$ ⑤ $2\sqrt{22}$

$\angle BAC = \angle BDE$ 이고 $\angle B$ 는 공통이므로

$\triangle BAC$ 와 $\triangle BDE$ 는 닮음이다. 따라서 $\overline{BD} = \frac{8}{3}$ 이고,

점 A 에서 선분 BD 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

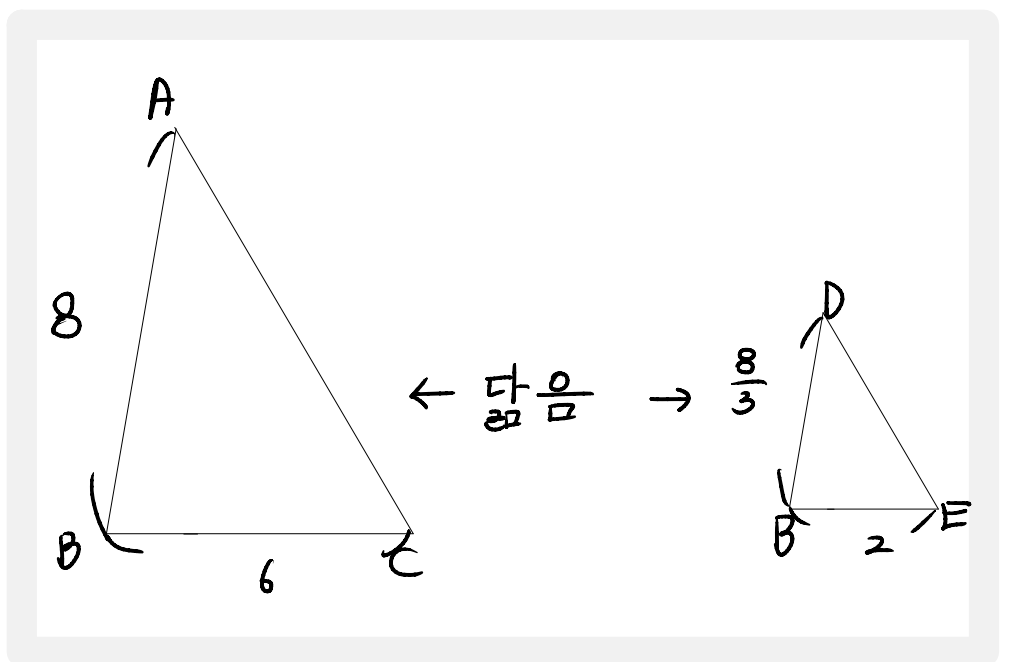
$\triangle ABD$ 는 이등변 삼각형이므로 $\overline{BH} = \frac{4}{3}$ 이다.

$$\cos(\angle ABC) = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{1}{6} \text{이고, 코사인 법칙에 의해}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \cos(\angle ABC) \times \overline{BA} \times \overline{BC}$$

이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2 - 2 \times \frac{1}{6} \times 8 \times 6} = 2\sqrt{21} \text{이다.}$$



10. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $(n-a)(n-b)$ 의 n 제곱근 중
 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하면,

$$\left\{\sum_{n=3}^9 f(n)\right\} \times \left\{\sum_{n=10}^{16} f(n)\right\} = 72$$

이다. 두 홀수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? [4점]

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

함수 $g(x)$ 를 $g(x)=(x-a)(x-b)$ 라 하면 a 와 b 는 홀수이기
 때문에 $g(2m)(m$ 은 정수)은 0이 될 수 없다.

$g(4), g(6), g(8)$ 중 양수의 개수를 X 라 하고
 $g(10), g(12), g(14), g(16)$ 중 양수의 개수를 Y 라 한다면
 $f(2m-1)=1$ (m 은 정수)이므로 $(4+2X)(3+2Y)=72$ 이다.

X 는 3이하의 음이 아닌 정수이고
 Y 는 4이하의 음이 아닌 정수이므로
 가능한 (X,Y) 는 $(2,3)$ 뿐이다.

따라서 $g(4), g(6), g(8)$ 중 양수의 개수는 2이고,
 $g(10), g(12), g(14), g(16)$ 중 양수의 개수는 3이다.
 $g(7)=g(11)=0$ 이어야 위의 조건을 만족한다.

따라서 구하는 답은 $a+b=7+11=18$ 이다.

11. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = |xf(x)| - 2|f(x)|$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $f(2)=8$ 일 때, 가능한 $f(4)$ 의 값의 합은? [4점]

- ① 108 ② 112 ③ 116 ④ 120 ⑤ 124

$x \neq 0$ 일 때와 $f(x) \neq 0$ 일 때는 미분 가능하다.

따라서 $x=0$ 일 때와 $f(x)=0$ 일 때 미분 가능하면 실수 전체의 집합에서 미분 가능하다.

$$x=0 \text{에서 미분 가능하므로 } \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \text{이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(-x-2)|f(x)|+2|f(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x|f(x)|}{x} + \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-2(|f(x)|-|f(0)|)}{x}$$

$$= -|f(0)| - 2 \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x-2)|f(x)|+2|f(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x|f(x)|}{x} + \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2(|f(x)|-|f(0)|)}{x}$$

$$= |f(0)| - 2 \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$$

$f(0) \neq 0$ 이면 위의 두 극한값이 서로 다르다.

$$f(0) > 0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -f(0) - 2f'(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = f(0) - 2f'(0) \text{이고 } f(0) < 0 \text{일 때도 마찬가지로 다르다.}$$

$$\text{따라서 } f(0)=0 \text{이고, } f(0)=0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|f(x)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|f(x)|}{x} \text{이}$$

$$\text{되어야 } \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \text{이므로 } f'(0)=0 \text{이다.}$$

따라서 $f(x) = kx^2(x-\alpha) (k \neq 0)$ 이다.

$x=\alpha$ 에서도 미분 가능해야하므로

$$\lim_{x \rightarrow \alpha-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow \alpha+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \text{이다.}$$

마찬가지로 정리하면 $(|\alpha|-2)\alpha^2=0$ 이 되어야 한다.

$f(2)=8$ 이므로 가능한 (k, α) 는 $(1, 0)$ 과 $(\frac{1}{2}, -2)$ 이다.

$f(4)=64k-16k\alpha$ 이므로 $f(4)$ 는 64와 48이 가능하다.

구하는 답은 $64+48=112$ 이다.

12. 함수 $f(x)=x^2-ax$ 에 대하여 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 는

$$v(t) = f(|t-6|) \times f'(t) \quad (t \geq 0)$$

이다. 점 P 는 $t=k(k>0)$ 에서만 운동 방향을 바꿀 때, $t=4$ 에서 점 P 의 위치는? (단, a 와 k 는 상수이다.) [4점]

- ① $-\frac{116}{3}$ ② $-\frac{119}{3}$ ③ $-\frac{122}{3}$
④ $-\frac{125}{3}$ ⑤ $-\frac{128}{3}$

$a \leq 0$ 이면 $t \geq 0$ 일 때 $v(t) \geq 0$ 이므로 운동 방향을 바꾸지 않는다. 따라서 $a > 0$ 이다.

$$f(|t-6|) = |t-6|(t-6-a)$$

$a \geq 6$ 이면 $f(|t-6|)$ 의 부호는 $t=6+a$ 에서만 변하고

$f'(t)$ 의 부호는 $t=\frac{1}{2}a$ 에서만 변한다.

$\frac{1}{2}a \neq 6+a$ 이므로 운동 방향을 두 번 바꾸므로 모순이다.

따라서 $0 < a < 6$ 이다.

이때 $f(|t-6|)$ 의 부호는 $t=6-a$ 와 $t=6+a$ 에서 변하고

$f'(t)$ 의 부호는 $t=\frac{1}{2}a$ 에서 변한다.

$f(|t-6|) \times f'(t)$ 의 부호 변화가 한번만 있어야 하므로

$$6-a = \frac{1}{2}a, \quad a=4 \text{이다. } (k=6+a=10)$$

$$\text{구하는 답은 } \int_0^4 f(|t-6|) \times f'(t) dt$$

$$= \int_0^4 (t-2)(t-6)(2t-4) dt$$

$$= \int_0^4 (t-2)(t-2)(2t-4) dt - 8 \int_0^4 (t-2)(t-2) dt$$

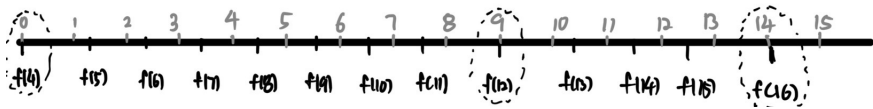
$$= 0 - \frac{8}{3} [(t-2)^3]_0^4 = -\frac{128}{3}$$

13. 자연수 n 에 대하여 부등식 $x - \log_2(20-x) \leq n$ 을 만족시키는 n 이상의 정수 x 의 개수를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{19} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 47 ② 50 ③ 53 ④ 56 ⑤ 59

$f(x) = x - \log_2(20-x)$ 라 하면 $f(x)$ 는 증가함수다.

$f(4)=0, f(12)=9, f(16)=14, f(18)=17, f(19)=19$ 이고,
 $1 \leq x \leq 3, x-5 < f(x) < x-4$, 즉 $f(x) = x-4$ ××
 $4 \leq x \leq 11, x-4 \leq f(x) < x-3$
 $12 \leq x \leq 15, x-3 \leq f(x) < x-2$
 $16 \leq x \leq 17, x-2 \leq f(x) < x-1$ 이다.



따라서

$1 \leq n \leq 9$ 일 때, $f(n+3) \leq n < f(n+4)$ 이므로 $a_n = 4$

($x=n$ 부터 $x=n+3$)

$10 \leq n \leq 14$ 일 때, $f(n+2) \leq n < f(n+3)$ 이므로 $a_n = 3$

($x=n$ 부터 $x=n+2$)

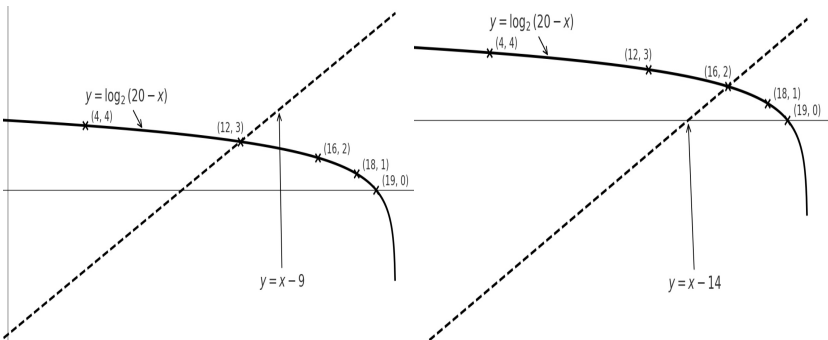
$15 \leq n \leq 17$ 일 때, $f(n+1) \leq n < f(n+2)$ 이므로 $a_n = 2$

($x=n$ 부터 $x=n+1$)

$a_{18} = a_{19} = 1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{19} a_n = 9 \times 4 + 5 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 1 = 59$$

별해 (부등식을 먼저 변형한 뒤 함수 2개로 보기)



$x-n \leq \log_2(20-x)$ 에서

$n \leq 9$ 일 때 $x=n+3$ 까지 가능하고

$10 \leq n \leq 14$ 이면 $x=n+2$ 까지 가능함을 알 수 있다.

14. $f'(3)=0$ 이고 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_1^x f(x)f(t)dt - \int_1^x f(x-k)f(t)dt$$

가 있다. 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 0이고 $g(3)=3$ 일 때, 상수 k 에 대하여 $k \times f(7)$ 의 값은? [4점]

- ① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$g(1)=0$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$g(x) = \{f(x) - f(x-k)\} \times \int_1^x f(t)dt \geq 0$$
이 성립한다.

만약 $k=0$ 이면 항상 $g(x)=0$ 이므로 $g(3)=3$ 에 모순이다.

만약 $k < 0$ 이면 x 가 한없이 커질 때

$f(x) - f(x-k)$ 의 값은 음의 무한대로 발산하고

$\int_1^x f(t)dt$ 의 값은 양의 무한대로 발산하므로 모순이다.

$\therefore k > 0$

$f'(3)=0$ 에서 $x < 3 + \frac{k}{2}$ 일 때 $f(x) - f(x-k) < 0$,

$x > 3 + \frac{k}{2}$ 일 때 $f(x) - f(x-k) < 0$ 이므로

$\int_1^x f(t)dt$ 의 부호는 $x=1$ 에서 변하지 않고, $x=3 + \frac{k}{2}$ 에서 변해

야 한다. ($\because 1 < 3 + \frac{k}{2}$)

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = \frac{a(x-1)^2 \left(x - 3 - \frac{k}{2} \right)}{3}, f'(3)=0 \text{이므로 } k=8 \text{이고}$$

$f(x) = a(x-1)(x-5)$ 이다.

$g(3)=3$ 에서

$$f(3) - f(3-k) = f(3) - f(-5) = -64a,$$

$$\int_1^3 f(t)dt = \frac{a(3-1)^2 \left(3 - 3 - \frac{k}{2} \right)}{3} = \frac{-16a}{3} \text{이므로 } a = \frac{3}{32} \text{이다.}$$

$$\therefore k \times f(7) = 8 \times \frac{3}{32} \times 6 \times 2 = 9$$

15. 모든 항이 정수이고 첫째항이 22인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

함수 $f(x)$ 는 모든 자연수 n 에 대하여

$$\text{구간 } [n-1, n) \text{에서 } f(x) = a_n \sin(\pi x)$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $f(x) = m$ ($x \geq 0$)의 실근을 작은 수부터 차례대로 나열한 것을 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 이라 할 때, 어떤 자연수 k 에 대하여 $x_{k+1} - x_k = 5$ 이다.

$m + \sum_{n=1}^{k+1} (a_n + x_n)$ 의 값은? (단, m 은 상수이다.) [4점]

- ① 59 ② 64 ③ 69 ④ 74 ⑤ 79

박스 조건에 의해 $f(x_k) = f(x_{k+1}) = m$ 이고

$x_{k+1} - x_k = 5$ 이므로 어떤 두 자연수 b, c 에 대하여

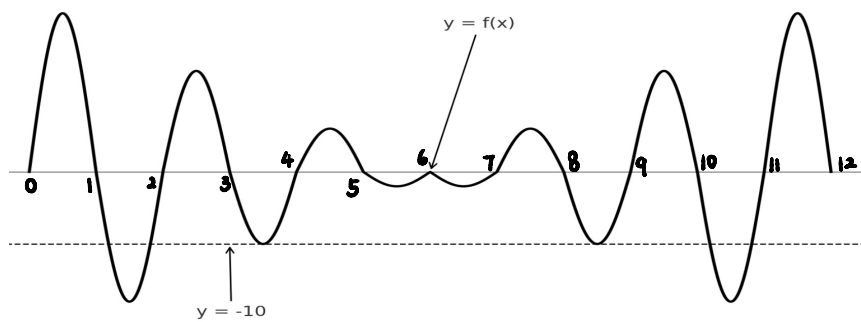
$$a_b \sin(\pi x_k) = a_c \sin(\pi x_{k+1}) = -a_c \sin(\pi x_k) \text{이다.}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_b = -a_c$ 이고, $x_{k+1} - x_k = 5$ 가 되기 위해서는 수열

$\{a_n\}$ 을 나열했을 때

22, 18, 14, 10, 6, 2, -2, -6, ...이런식으로 되어

함수 $f(x)$ 가 다음과 같이 그려져야 한다.



$$m = -10, k = 3 \text{이고 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 22 + 18 + 14 + 10 = 64$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{3}{2} \times 2 + \frac{7}{2} + \frac{17}{2} = 15$$

따라서 구하는 답은 69이다.

단답형

16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a}-4}{x-2} = b$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $4ab$ 의 값을

구하시오. [3점]

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a}-4}{x-2}$ 에서 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\therefore a = 14$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a}-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+14}-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+14}+4)} = \frac{1}{8} = b$$

따라서 구하는 답은 $4ab = 4 \times 14 \times \frac{1}{8} = 7$ 이다.

17. $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ 일 때, $20 \times \tan^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\cos \theta = -\frac{2}{3}, \cos^2 \theta = \frac{4}{9}, \sin^2 \theta = \frac{5}{9}$$

$$20 \times \tan^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 20 \times \frac{1}{\tan^2 \theta} = 20 \times \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 16$$

18. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^5 (a_n)^2 = 30, \quad \sum_{n=1}^5 (a_n - n)^2 = 55$$

일 때, $\sum_{n=1}^5 na_n$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{n=1}^5 (a_n - n)^2 = 55, \quad \sum_{n=1}^5 a_n^2 - 2 \sum_{n=1}^5 na_n + \sum_{n=1}^5 n^2 = 55 \text{ 이고}$$

$$\sum_{n=1}^5 (a_n)^2 = 30, \quad \sum_{n=1}^5 n^2 = \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 55 \text{ 이므로}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^5 na_n = 15$$

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하자.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(1+h)+g(-1)} = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$f'(0)=10 \text{ 이고, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)+g(-1)}{h} = 10 \text{ 이므로}$$

$$f(1)+g(-1)=0, \quad f'(1)=10 \text{ 이다.}$$

$$f'(0)=1, \quad f'(1)=10 \text{ 이므로}$$

$$f'(x)=3x(x-1)+1, \quad f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C \text{ 이다.}$$

$$g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)=(x-1)+\frac{1}{2}+C, \quad g(-1)=C-\frac{3}{2} \text{ 이고}$$

$$f(1)=C+\frac{1}{2} \text{ 이므로 } f(1)+g(-1)=0 \text{ 에서 } C=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(3)=17$$

20. 최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{2}, \quad g(1)=0$$

$$(나) : \text{방정식 } \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t)}{f(-t)} = 0 \text{의 실근은 오직 } x=0 \text{ 뿐이다.}$$

$f(5)+g(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$(가) \text{에서 } \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{f(X)}{g(X) - X^3} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\left(X = \frac{1}{x}\right)$$

$\rightarrow X \rightarrow -\infty$ 일 때
마찬가지

$$f(x)=x^2+ax+b, g(x)=x^3+2x^2+cx+d=(x-1)(x^2+3x-d)$$

$$(g(1)=0) \text{ 이다.}$$

$$(나) \text{에서 } \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t)}{f(-t)} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t-1)(t^2+3t-d)}{t^2-at+b} = 0 \text{의 실근이 오직}$$

$$x=0 \text{ 이므로 } d=0 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t)}{f(-t)} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t-1)(t)(t+3)}{t^2-at+b} = 0 \text{의 실근이 오직 } x=0 \text{ 뿐이므}$$

$$\text{로 } t^2-at+b=(t-1)(t+3) \text{임을 알 수 있다.}$$

$$\therefore f(x)=(x+1)(x-3), \quad g(x)=x(x-1)(x+3) \text{ 이므로}$$

$$f(5)+g(5)=12+160=172 \text{ 이다.}$$

21. 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 함수

$$g(x) = f(x) - t|x| - t^2x$$

가 있다. 함수 $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 갖도록 하는 실수 a 의 개수를 $h(t)$ 라 할 때,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \{h(1+t) - h(1-t) - 3\} > 0$$

이다. $f(-2)=0$, $f(0)=\frac{4}{3}$ 일 때, $f(2)$ 의 최댓값은 $\frac{q}{p}$ 이다.

$p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) - t - t^2 & (x > 0) \\ f'(x) + t - t^2 & (x < 0) \end{cases}$$

$h(t)$ 가 최댓값은 4, 최솟값은 0이므로
 $h(1+)=4$, $h(1-)=0$ 이다.

$t \rightarrow 1+$ 일 때 $t^2+t \rightarrow 2+$, $t^2-t \rightarrow 0+$ 이고

$t \rightarrow 1-$ 일 때 $t^2+t \rightarrow 2-$, $t^2-t \rightarrow 0-$ 이다.

$f'(x)$ 는 x 축과 접하는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수

이고, $f'(0)=2$ 여야 하므로 $f'(x) = \frac{2(x+\alpha)^2}{\alpha^2}$ 이다. ($\alpha > 0$)

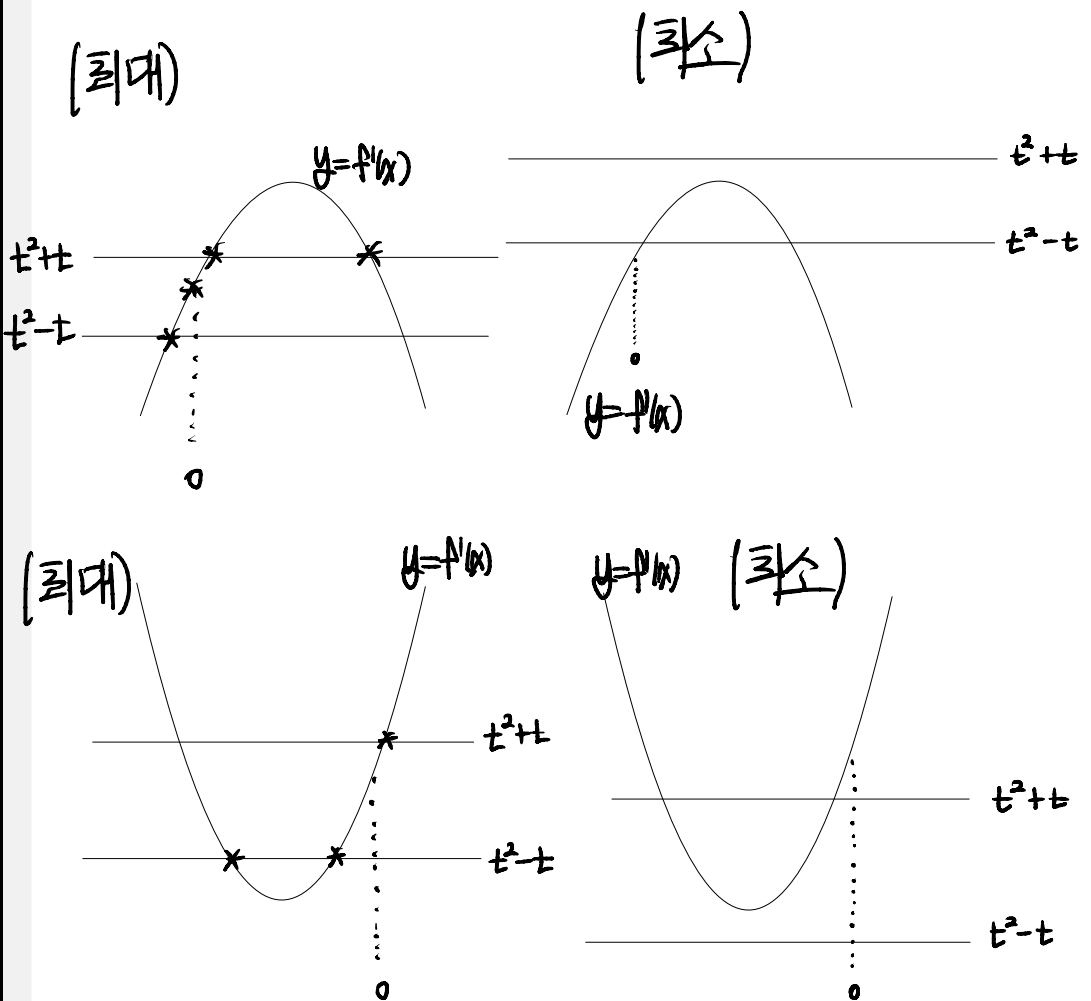
$f(x) = \frac{2(x+\alpha)^3}{3\alpha^2} + C$ 라 하면 $f(-2)=0$, $f(0)=\frac{4}{3}$ 이므로

$$\frac{2(\alpha-2)^3}{3\alpha^2} + C = 0, \quad \frac{2\alpha}{3} + C = \frac{4}{3} \text{ 에서}$$

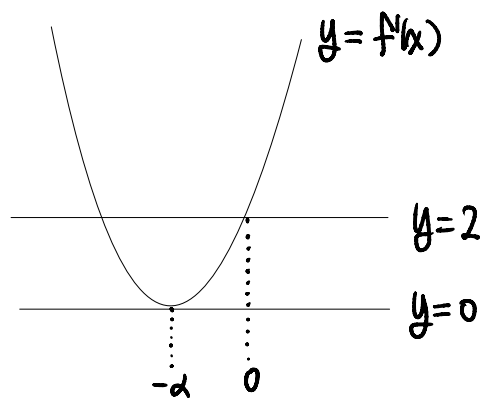
가능한 (α, C) 는 $(1, \frac{2}{3})$ 와 $(2, 0)$ 이고

$f(2)$ 의 최댓값은 $(1, \frac{2}{3})$ 일 때 $\frac{56}{3}$ 이다.

최대.최소의 예시 (아래 그림 외에도 많다.)



따라서 $y=f'(x)$ 는 $y=2$ 또는 $y=0$ 에 접해야 한다.



$$f(x) = \frac{(x+2)^3}{6}$$

$$f(x) = \frac{2(x+1)^3 + 2}{3}$$

22. 첫째항이 1000이하의 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{a_n} & (a_n \text{이 자연수인 경우}) \\ 4a_n & (\text{그 이외의 경우}) \end{cases}$$

이다. 상수 a 에 대하여 집합 $\left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - a) \mid n \text{은 자연수} \right\}$ 의 원소의 개수가 6일 때, $a \times a_1$ 의 값을 구하시오. [4점]

첫째항을 소인수분해 하였을 때, 2이외의 소인수가 있다면

$$a_2 = \frac{1}{a_1} \text{ 이고, } a_{n+1} = 4a_n \text{ (} n \geq 2 \text{)이다.}$$

따라서 수열 $\sum_{k=1}^n (a_k - a) = S_n$ 는 어느 순간부터 계속 증가하므로 원소의 개수가 6이 될 수 없다.

1) $a_1 = 2^{2k}$ (k 는 0이상의 정수)

$$a_1 = 2^{2k}, a_2 = 2^{-2k}, \dots, a_{k+2} = 1, a_{k+3} = 1, a_{k+4} = 1, \dots$$

이때 상수 a 의 값은 1이다.

$a_1 = 1$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n = 0$ 이다.

k 가 자연수여야 함을 알 수 있고,

$$a_1 - a > 0 \text{ 이고, } a_n - a < 0 \text{ (} 2 \leq n \leq k+1 \text{)이다.}$$

이때 S_n 으로 가능한 값들의 개수는 $k+1$ 이므로 $k=5$ 가 되어야 한다. 그러나 $a_1 < 1000$ 이므로 $k=5$ 일 수 없다.

2) $a_1 = 2^{2k+1}$ (k 는 0이상의 정수)

$$a_1 = 2^{2k+1}, a_2 = 2^{-2k+1}, \dots, a_{k+1} = \frac{1}{2}, a_{k+2} = 2, a_{k+3} = \frac{1}{2},$$

$$a_{k+4} = 2, \dots$$

$$a = \frac{\frac{1}{2} + 2}{2} = \frac{5}{4} \text{ 가 되어야 } S_n \text{으로 가능한 값들의 개수가 유한하다.}$$

$$S_1 = 2^{2k+1} - \frac{5}{4}$$

$$S_2 = 2^{2k+1} + 2^{-2k+1} - \frac{5}{2}$$

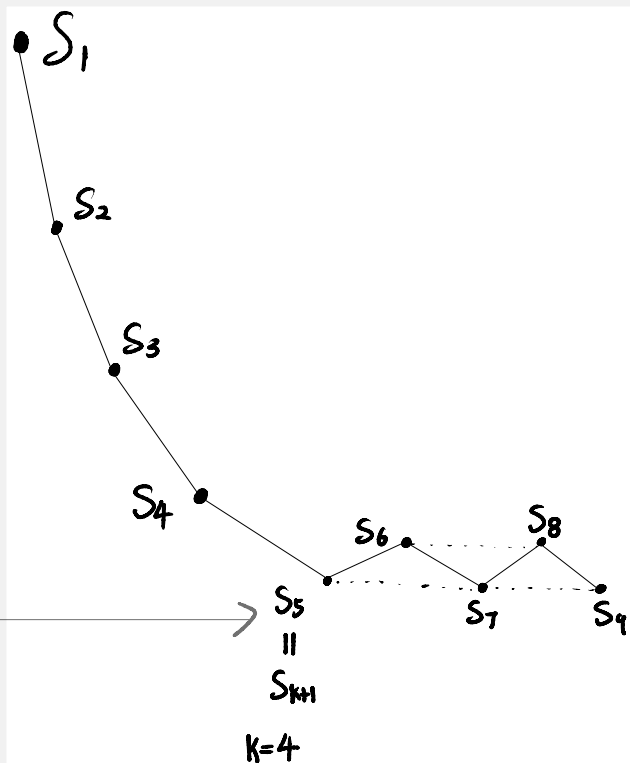
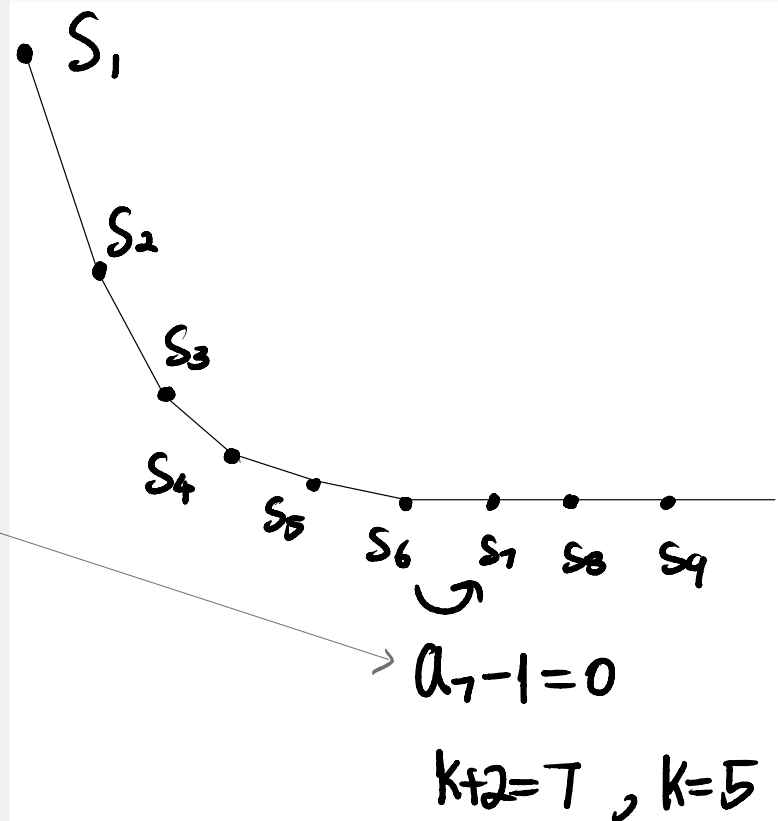
...

$$S_{k+1} = S_{k+3} = S_{k+5} = \dots$$

$$S_{k+2} = S_{k+4} = S_{k+6} = \dots$$

따라서 S_n 으로 가능한 값들의 개수는 $k+2$ 이므로 $k=4$ 이다.

$$\therefore a_1 = 512 \text{ 이므로 구하는 답은 } 512 \times \frac{5}{4} = 640 \text{ 이다.}$$



제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{3n} \right)$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{27}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{3n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \cos \frac{1}{3n} \right)}{\left(\frac{1}{3n} \right)^2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

24. $\tan \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $\tan \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$ 의 값은? [3점]

- ① $3\sqrt{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 0
④ $-3\sqrt{3}$ ⑤ $-\sqrt{3}$

$$\tan \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = \tan \left(\theta - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}} = -3\sqrt{3}$$

25. 곡선 $x^3 - y^2 = e^{xy}$ 위의 점 $(a, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 b 일 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

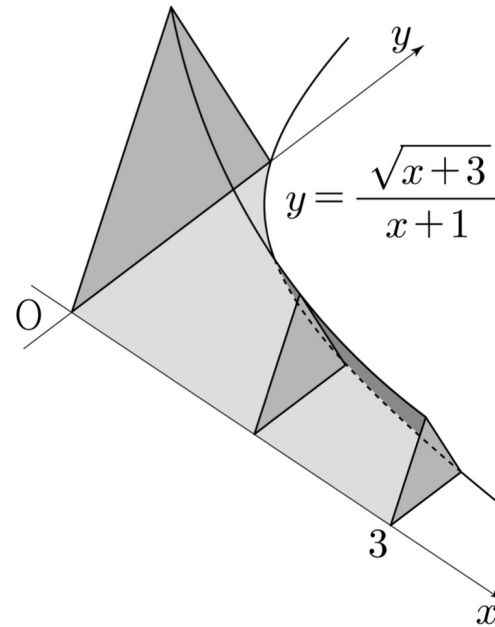
점 $(a, 0)$ 이 곡선 $x^3 - y^2 = e^{xy}$ 위의 점이므로
 $a^3 = 1, \therefore a = 1$

$x^3 - y^2 = e^{xy}$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $3x^2 - 2y \times \frac{dy}{dx} = e^{xy} \left(y + x \times \frac{dy}{dx} \right)$ 이고, $x=a, y=0$ 을 대입하면
 $3 = \frac{dy}{dx}$

따라서 구하는 답은 4이다.

26. 그림과 같이 곡선 $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x+1} (x > -1)$ 과 x 축, y 축 및 직선

$x=3$ 으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인
 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피는?
 [3점]



- ① $\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{\sqrt{3}\ln 2}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}\ln 2}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}\ln 2}{2}$
 ④ $\frac{3\sqrt{3}}{16} + \sqrt{3}\ln 2$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{8} + \sqrt{3}\ln 2$

구하는 답은 $\int_0^3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{\sqrt{x+3}}{x+1} \right\}^2 dx$ 이다.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left\{ \frac{\sqrt{x+3}}{x+1} \right\}^2 dx &= \int_0^3 \frac{x+1+2}{(x+1)^2} dx = \int_0^3 \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} dx \\ &= \left[\ln(x+1) - \frac{2}{(x+1)} \right]_0^3 = \ln 4 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 답은 $\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}\ln 2}{2}$ 이다.

27. 함수 $f(x) = \frac{x}{x^2+16}$ 와 일차함수 $g(x)$ 가 있다. 양의 실수 t 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 $g(x)$ 중에서 $g(0)$ 의 최댓값을 $h(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ 의 값은? [3점]

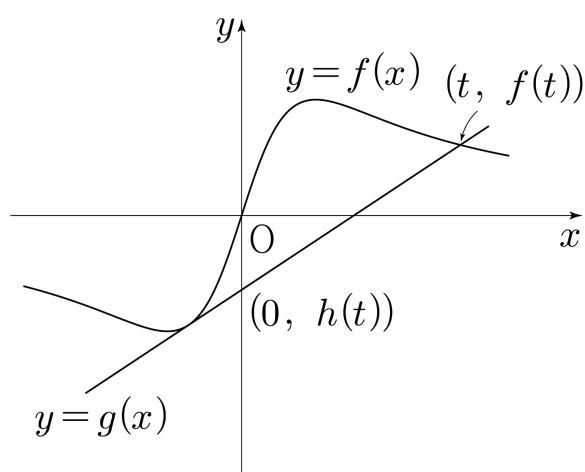
모든 실수 x 에 대하여 $f(x-t)g(x) \geq f(x)f(x-t)$ 이다.

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

주어진 부등식을 변형하면 $f(x-t)\{f(x)-g(x)\} \leq 0$ 이다.

$x > t$ 에서 $f(x-t) > 0$, $x < t$ 에서 $f(x-t) < 0$ 이므로
 $x > t$ 에서 $f(x) \leq g(x)$, $x < t$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 이다.

$f'(x) = -\frac{16-x^2}{(x^2+16)^2}$ 에서 $f(x)$ 는 $x = \pm 4$ 에서 극값을 갖는다.



$g(x)$ 의 y 절편이 최대이기 위해서는
 직선 $y=g(x)$ 가 $(t, f(t))$ 를 지나고 곡선 $y=f(x)$ 와
 제 3사분면에서 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(s, f(s))$ 라 하면
 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $s \rightarrow -4$ 임을 알 수 있다.

$g(0)$ 이 최대일 때 $g(x) = \frac{16-s^2}{(s^2+16)^2}(x-s) + \frac{s}{s^2+16}$,

$h(t) = \frac{16-s^2}{(s^2+16)^2}(0-s) + \frac{s}{s^2+16}$,

$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow -4+} \left\{ -\frac{16-s^2}{(s^2+16)^2}(0-s) + \frac{s}{s^2+16} \right\} = -\frac{1}{8}$ 이다.

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x)e^x dx$ 의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+1)+f(x) = \int_0^2 f(t)(e^{1-x}-e^t)dt \text{이다.}$$

(나) $f(0)+f(1)=2$

- ① $\frac{e^3+4e^2-3e+2}{1-e}$ ② $\frac{e^3+4e^2+3e+2}{1-e}$ ③ $\frac{e^3+4e^2+3e-2}{1-e}$
 ④ $\frac{e^3-4e^2+3e-2}{1-e}$ ⑤ $\frac{e^3-4e^2-3e-2}{1-e}$

$\int_0^2 f(t)dt = A$, $\int_0^2 f(t)e^t dt = B$ 라 하자.

$f(x+1)+f(x) = Ae^{1-x} - B$ 에서 양변을 0부터 1까지 x 에 대하여 적분하자.

$\int_0^2 f(x)dx = A(e-1) - B$ 에서 $A(e-2) = B$ 이다.

$f(0)+f(1)=2$ 에서 $Ae - B = 2$ 이고 연립하면
 $A=1, B=e-2$ 이다.

$$f(x+1)+f(x) = Ae^{1-x} - B,$$

$f(x+1)e^x + f(x)e^x = e - (e-2) \times e^x$ 에서
 양변을 0부터 1까지 x 에 대하여 적분하자.

$$\frac{1}{e} \times \int_1^2 f(x)e^x dx + \int_0^1 f(x)e^x dx = -e^2 + 4e - 2$$

$$B_1 = \int_0^1 f(x)e^x dx, \quad B_2 = \int_1^2 f(x)e^x dx \text{라 하면}$$

$$B_1 + B_2 = B = e - 2,$$

$$\frac{B_2}{e} + B_1 = -e^2 + 4e - 2 \text{에서}$$

$$B_1(1-e) = e^3 - 4e^2 + 3e - 2,$$

$$B_1 = \frac{e^3 - 4e^2 + 3e - 2}{1-e} \text{임을 알 수 있다.}$$

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+2} = 3, \quad 6 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} + 7 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 18 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

일 때, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+2} = 3$ 에서 공비를 r 이라 하면

$-1 < r < 0$ 또는 $0 < r < 1$ 임을 알 수 있다.

(i) 모든 항이 양수이면

$$6 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} + 7 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 18 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{에서 } \frac{6ar}{1-r} = \frac{11a}{1-r} \text{이므로}$$

$$r = \frac{11}{6} \text{이 되어 모순이다.}$$

모든 항이 음수이면

$$6 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} - 7 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 18 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{에서 } \frac{6ar}{1-r} = \frac{25a}{1-r} \text{이므로}$$

$$r = \frac{25}{6} (a \neq 0) \text{이 되어 모순이다.}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 항이 $(-), (+), (-), \dots$ 꼴일 때

$$\frac{6ar}{1-r} - \frac{7a}{1+r} = \frac{18a}{1-r} \text{에서}$$

$$6r^2 - 5r - 25 = (2r-5)(3r+5) = 0 \text{이 되어 모순이다. } (\because -1 < r < 0)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 $(+), (-), (+), \dots$ 꼴이며

$$\frac{6ar}{1-r} + \frac{7a}{1+r} = \frac{18a}{1-r} \text{에서}$$

$$6r^2 - 19r - 22 = (3r-11)(2r+1) = 0, \quad \therefore r = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+2} = 3 \text{에서 } \frac{a^2 r^2}{1-r^2} = 3, \quad a = 3$$

$$\text{따라서 구하는 답은 } \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 = \left(\frac{a}{1-r}\right)^2 = \left(\frac{3}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^2 = 4$$

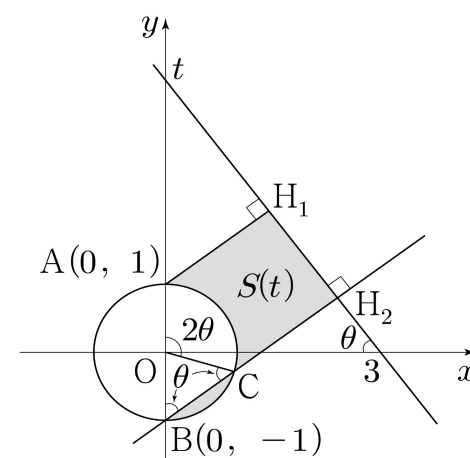
30. 두 점 $A(0, 1), B(0, -1)$ 을 지름으로 하는 원 O 와 실수

$t \left(t > \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ 에 대하여 두 점 $(0, t), (3, 0)$ 을 지나는 직선

l 이 있다. 두 점 A, B 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하고, 선분 BH_2 가 원 O 와 만나는 점 중 B 가 아닌 점을 C 라 하자. 선분 AH_1, H_1H_2, H_2C 및 점 B 를 포함하지 호 AC 로 둘러싸인 부분의 넓이와 선분 BC 및 점 A 를 포함하지 않는 호 BC 로 둘러싸인 부분의 넓이의 합을 $S(t)$ 라 할 때, $625 \times S'(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

직선 AB 와 x 축의 음의 방향이 이루는 각을 θ 라 하자.

$$(\tan \theta = \frac{t}{3})$$



원점을 O 라 할 때 S_1 의 넓이는

(사각형 ACH_2H_1 의 넓이)+(삼각형 OAC 의 넓이)

-(부채꼴 OAC 의 넓이)이다.

$$(\text{사각형 } ACH_2H_1 \text{의 넓이}) = \overline{AH_1} \times \overline{AC} = (t-1)\cos\theta \times 2\sin\theta$$

$$(\text{삼각형 } OAC \text{의 넓이}) = \frac{\sin 2\theta}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OC} = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$(\text{부채꼴 } OAC \text{의 넓이}) = \frac{2\theta}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OC} = \theta$$

S_2 의 넓이는 (부채꼴 OBC 의 넓이)-(삼각형 OBC 의 넓이)이다.

$$\text{계산하면 } \frac{\pi-2\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{2} \text{이다.}$$

$$\therefore S(t) = (S_1 \text{의 넓이}) + (S_2 \text{의 넓이}) = 6\sin^2\theta - \sin 2\theta - 2\theta + \frac{\pi}{2}$$

$$S(3\tan\theta) = 6\sin^2\theta - \sin 2\theta - 2\theta + \frac{\pi}{2}, \text{ 양변을 } \theta \text{에 대하여 미분하면}$$

$$3\sec^2\theta \times S'(3\tan\theta) = 12\sin\theta\cos\theta - 2\cos 2\theta - 2 \text{이고}$$

$$t=4 \text{일 때 } \theta = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right), \tan\alpha = \frac{4}{3} \text{이다. } \theta = \alpha \text{를 대입하면}$$

$$3 \times \frac{25}{9} \times S'(4) = \frac{144}{25} + \frac{14}{25} - 2, \quad 625 \times S'(4) = 324$$