

제 2 교시

수학 영역

홀수형

예상 등급컷 : (선택과목 점수 기준) 70(공통과목 점수) + 14(선택과목 점수) = 84점

총평 : 안녕하세요! 이ㅎㅎ의 최종장 ALM 모의평가 확률과 통계 버전 하프 모의고사로 찾아뵙게 되었습니다.

총 2회로 구성된 확통 하프 모의고사 중 그 첫 번째 회차는 다소 어려운 회차로 구성해 보았습니다. 평가원이 확통을 무조건 쉽게 출제한다는 보장이 없기에, 이에 대비하면 어떨까 싶어 이렇게 구성했습니다.

24번까지는 할만한데, 그치만 다음 쪽에서 부터는 갑자기 벤치프레스 100kg처럼 느껴졌을 겁니다ㅎㅎ. 27번까지 하나도 그냥 주는 문제가 없어서 다양한 경험을 해보셨을 수도...? 28번에 약간 정수론의 개념을 섞은 문항을 출제해 보았습니다. 29번은 쉽지만 약간의 함정이, 30번은 조건부 확률에 살짝 무게를 실은 문항입니다.

다음장부터 나오는 문항 해설로 출제자와 소통을 해보시고, 그럼 다음 회차(마지막 회차....)에서 뵙도록 합시다!

23. 다섯 개의 문자 x, y, y, z, z 를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

- ① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

출제 의도

같은 것이 있는 순열

<해설>

y, z 가 각각 2개씩 중복되므로

$$\frac{5!}{2!2!} = 30 \text{ .}$$

24. 두 사건 A, B 는 서로 독립이고

$$P(A|B) = \frac{1}{4}, \quad P(B|A) = \frac{2}{3}$$

일 때, $P(A \cap B)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

출제 의도

확률의 정의

<해설>

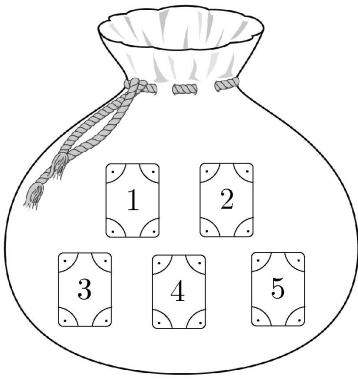
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

이고 두 사건 A, B 가 독립이므로

$$P(A|B) \times P(A|B) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

25. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 3회 반복한 후 확인한 세 개의 수의 평균을 $\overline{X}$ 라 할 때, $P(\overline{X} = 4)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{2}{25}$ ② $\frac{13}{125}$ ③ $\frac{16}{125}$ ④ $\frac{19}{125}$ ⑤ $\frac{22}{125}$



답 : ②

출제 의도

표본 평균

<해설>

각각의 복원 추출에서 나오는 카드에 적힌 수를 확률변수 X_n ($n=1, 2, 3$)이라 하자.

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

이므로 $X_1 + X_2 + X_3 = 12$ 일 확률을 구하면 된다.

각각의 수를 x_n 이라 하면 $x_n \geq 1$ 이므로

$x_1 + x_2 + x_3 = 12$ 를 만족하는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는 ${}_3H_9$ 에서 $x_n = 6, 7, 8, 9, 10$ 인 경우의 수를 빼면 되므로

$${}_3H_9 - {}_3C_1 \times ({}_2H_4 + {}_2H_3 + {}_2H_2 + {}_2H_1 + {}_2H_0)$$

이다. ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_{n-1}$ 이므로

$({}_2H_4 + {}_2H_3 + {}_2H_2 + {}_2H_1 + {}_2H_0) = {}_5C_1 + {}_4C_1 + {}_3C_1 + {}_2C_1 + 1 = 15$ 임을 알 수 있다.

$$\therefore (\text{구하는 확률}) = \frac{55-45}{125} = \frac{2}{25}$$

26. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는? [3점]

(가) $|f(1)| \times |f(5)|$ 는 짝수이다.

(나) $2|f(2)| \leq f(3) \leq 2|f(4)|$

- ① 84 ② 88 ③ 92 ④ 96 ⑤ 100

답 : ④

출제 의도

함수의 개수

<해설>

우선 $|f(1)| \times |f(5)|$ 가 짝수이려면 둘 중 적어도 하나는 짝수이어야 하므로 $-2, -1, 1, 2$ 에서

$$4 \times 4 - 2 \times 2 = 12$$

가지이다. 또한 $2|f(2)| \leq f(3) \leq 2|f(4)|$ 에서 $f(3)$ 은 짝수인 양수이어야 하므로 $f(3) = 2$ 로 확정된다.

이때 $|f(2)| \leq 1 \leq |f(4)|$ 이므로 $2 \times 4 = 8$ 가지이다.

$$\therefore (\text{구하는 함수의 개수}) = 12 \times 8 = 96$$

27. 어느 공장에서 생산하는 에어컨의 1개의 중량은 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 에어컨 중에서 49개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \leq m \leq a+5.6$ 이다.

이 공장에서 생산하는 에어컨 중에서 36개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m 에 대한 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간이 $b \leq m \leq c$ 이다.

$c-b=6.2$ 가 되도록 하는 α 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 중량의 단위는 g이다.) [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.62	0.4000
1.86	0.4300
1.96	0.4750
2.58	0.4945

- ① 99 ② 95 ③ 90 ④ 86 ⑤ 80

답 : ④

출제 의도	통계적 추정
-------	--------

<해설>

어느 공장에서 생산하는 에어컨의 1개의 중량을 확률변수 X 라 하자.

49의 크기의 표본을 추출하여 구한 표본평균은 정규분포

$N\left(m, \left(\frac{\sigma}{7}\right)^2\right)$ 을 따른다. 이때 m 에 대한 신뢰도 95%의

신뢰구간의 길이가 5.6이고, 표준정규분포표를 참고하면

$P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 이므로

$$5.6 = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{7} \Rightarrow \sigma = 10 \text{ 임을 얻는다.}$$

이 공장에서 생산하는 에어컨 중에서 36개를 임의 추출하여

구한 표본평균은 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{\sigma}{6}\right)^2\right)$ 을 따른다. 이때 m 에

대한 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰 구간의 길이는 $2 \times k \times \frac{10}{6} = 6.2$ 이므로

$k = 1.86$ 이다.

표준정규분포표를 참고하면 $P(|Z| \leq k) = 0.86$ 이므로

$\therefore \alpha = 86$

28. 다음 조건을 만족시키도록 하는 자연수 n 의 값을 확률변수 X 라 하자.

주사위 1개를 두 번 던져 나온 눈의 수의 곱을 M 이라 할 때,
 $M = k \times 3^{n-1}$ (k 는 3의 배수가 아닌 자연수)
 이다.

$V(18X+10)$ 의 값은? [4점]

- ① 183 ② 180 ③ 177 ④ 174 ⑤ 171

답 : ②

출제 의도	정수론적인 측면
-------	----------

<해설>

주사위 1개를 두 번 던져 나온 눈의 수의 곱의 종류는

- ① M 이 3의 배수가 아닌 경우
 ② M 이 9의 배수가 3의 배수인 경우
 ③ M 이 9의 배수인 경우

이다. 두 번 던져 각각 나온 수를 x_1, x_2 라 하자.

이때 $P(X=n) = \frac{(k \text{의 개수})}{18}$ 이고 $k = \frac{x_1 x_2}{3^{n-1}}$ 이다.

① 일 때 $n=1$ 이고 $x_1 \times x_2$ 는 모두 3의 배수가 아니므로
 $(k \text{의 개수}) = (x_1 \times x_2 \text{의 개수})$ 는 9개다.

② 일 때 $n=2$ 이고 x_1, x_2 중 하나는 9의 배수가 아닌 3의 배수이고 하나는 3과 서로소(1 포함)이므로
 $(k \text{의 개수}) = 6$ 이다.

③ 일 때 $n=3$ 이고 x_1, x_2 가 모두 3의 배수이면 되므로
 $(k \text{의 개수}) = 3$ 이다.

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{9}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{3}{18}$	1

$$E(X) = \frac{30}{18}, \quad E(X^2) = \frac{60}{18} \text{ 이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{180}{18^2} \text{ 이다.}$$

$$\therefore V(18X+10) = 18^2 \times V(X) = 180$$

29. 각 학생이 받는 초콜릿의 개수를 x_i (i 는 자연수)라 하자.
세 학생 A, B, C에게 다음 조건을 만족시키도록 초콜릿을 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 초콜릿의 개수는 30개 이상이다.) [4점]

- (가) $1 \leq x_i \leq 10 \quad (i = 1, 2, 3)$
- (나) $x_2 - x_1 \geq 2, \quad x_3 - x_2 \geq 3$

답 : 210

출제 의도	중복 조합
-------	-------

<해설>

$1 \leq x_i \leq 10$ 이므로

$1 \leftrightarrow x_1 \leftrightarrow x_2 \leftrightarrow x_3 \leftrightarrow 10$ 에서 각각의 간격을 y_j ($j = 1, 2, 3, 4$)라 하면

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 2, \quad y_3 \geq 3, \quad y_4 \geq 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9$$

를 만족시키는 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수를 구하면 된다.

중복조합을 적용하면 $y_1 + y_2' + y_3' + y_4 = 4$ 에서 ${}_4H_4 = {}_7C_3 = 35$ 에 x_1, x_2, x_3 를 A, B, C에 배정하는 경우의 수를 곱하면 된다.

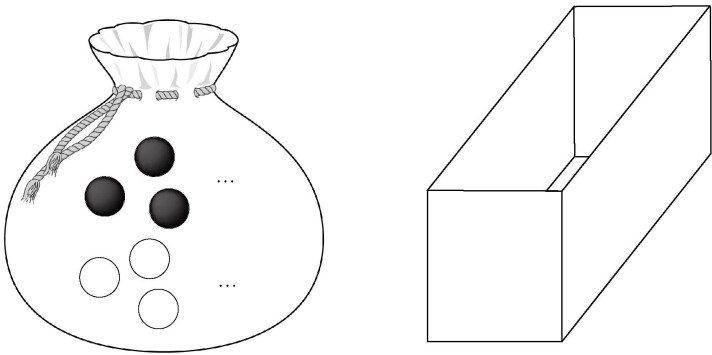
$$\therefore (\text{구하는 경우의 수}) = 3! \times 35 = 210$$

☆ 다음 쪽에 계속

30. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 주머니와 비어 있는 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져
나온 눈의 수가 6의 약수이면
주머니에 있는 흰 공 1개를 상자에 넣고,
나온 눈의 수가 6의 약수가 아니면
주머니에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자에 넣는다.

이 시행을 5번 반복한 후 상자에 들어 있는 흰 공의 개수와 검은 공의 개수를 각각 a, b 라 하자. $a+b$ 의 값이 홀수일 때, $a \times b$ 의 값이 3의 배수일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



답 : 293

출제 의도

조건부 확률

<해설>

조건부 확률 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 라 하면 각 사건 A, B 는

A : $a+b$ 의 값이 홀수인 사건

B : $a \times b$ 의 값이 3의 배수인 사건

이다.

① 나온 눈의 수가 6의 약수인 경우

② 나온 눈의 수가 6의 약수가 아닌 경우

라 하자.

$$P(①) = \frac{2}{3}, P(②) = \frac{1}{3}$$

이고 $a+b$ 의 값이 홀수 이려면 a 가 홀수이거나 b 가 홀수이면 된다.

a 가 홀수인 경우

i) ① $\times 1$, ② $\times 4$ 일 때와

ii) ① $\times 3$, ② $\times 2$ 일 때이다.

iii) ① $\times 5$, ② $\times 0$ 일 때이다.

i) 일 확률은 ${}_5C_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^4$ 이고 이때 $a=9, b=4$ 이다.

ii) 일 확률은 ${}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$ 이고 이때 $a=7, b=2$ 이다.

iii) 일 확률은 ${}_5C_5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0$ 이고 이때 $a=5, b=0$ 이다.

b 가 홀수인 경우

i) ① $\times 4$, ② $\times 1$ 일 때와

ii) ① $\times 2$, ② $\times 3$ 일 때,

iii) ① $\times 0$, ② $\times 5$ 일 때이다.

i) 일 확률은 ${}_5C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)$ 이고 이때 $a=6, b=1$ 이다.

ii) 일 확률은 ${}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3$ 이고 이때 $a=8, b=3$ 이다.

iii) 일 확률은 ${}_5C_5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^5$ 이고 이때 $a=10, b=5$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{이때 } P(A \cap B) &= {}_5C_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_5C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right) + {}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= \frac{110}{3^5} \text{이므로} \end{aligned}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{110}{183} \text{이다.}$$

$$\therefore p+q = 293$$