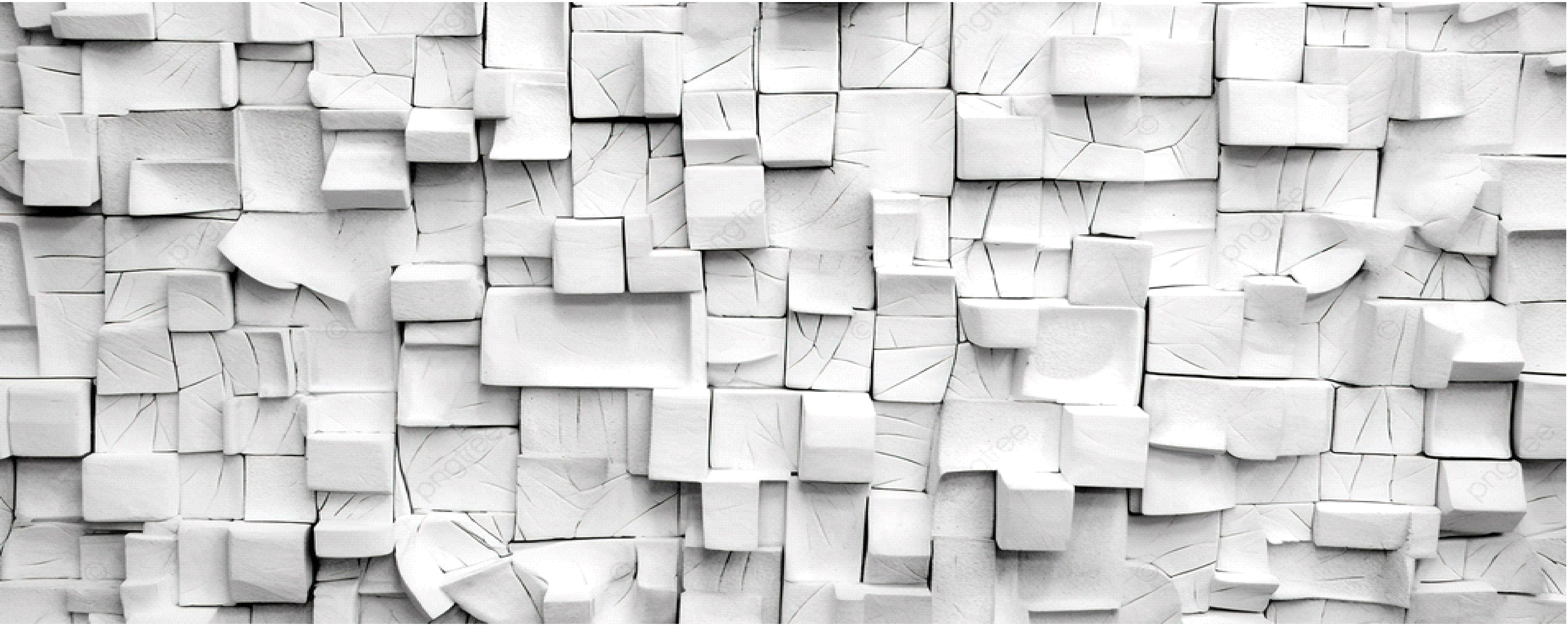
“유일하게 부족한 것은 노력뿐!”

2025년 7모 보충프린트

ver.미적분



유성민T

대치명인학원

7월 모의고사 보충프린트 ver. 미적분

■ 실시일: 2025년 7월 13일 (일)

001 2025년 고3 7월 교육청 미적분

26. 양수 t에 대하여 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$ 위의 한 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{\ln t}{t}\right)$와 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기를 $f(t)$라 할 때, $\int_1^e f(t)dt$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{e}$　② $-\frac{2}{e}$　③ $-\frac{3}{e}$　④ $-\frac{4}{e}$　⑤ $-\frac{5}{e}$

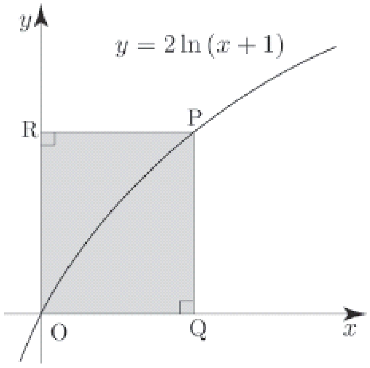
[정답률 : 61.9%]

Comment : 접선의 기울기로 봤다면 때찌때찌이다.
수능이 아님에 감사하자.

002

078 2024년 고3 7월 교육청 미적분

양수 t에 대하여 곡선 $y=2\ln(x+1)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2\ln(t+1))$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이를 $f(t)$라 하자. $\int_1^3 f(t)dt$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① $-2+12\ln 2$　② $-1+12\ln 2$　③ $-2+16\ln 2$

④ $-1+16\ln 2$　⑤ $-2+20\ln 2$

003

047 2020학년도 수능 가형

$\int_e^{e^2} \frac{\ln x-1}{x^2}dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e+2}{e^2}$　② $\frac{e+1}{e^2}$　③ $\frac{1}{e}$

④ $\frac{e-1}{e^2}$　⑤ $\frac{e-2}{e^2}$

004 2025년 고3 7월 교육청 미적분

27. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 실수 $k\ (k \neq 0)$에 대하여 $f(3-2k)=f(3)$을 만족시킨다. 함수

$$g(x)=\frac{f(x)+k}{e^{f(x)}}$$

가 $x=3$에서 극대이고 $g(3)=e$일 때, $g(k)$의 값은? [3점]

① $-2e^6$ ② $-3e^5$ ③ $-2e^5$ ④ $-3e^4$ ⑤ $-2e^4$

[정답률 : 60.1%]

Comment : 분모가 지수일 때는 분자로 바꾸는 것이 유리하다.

$g(x)=\{f(x)+k\}e^{-f(x)}$

미분가능한 함수이고 $x=3$에서 극대이므로

$g'(3)=0$임이 자명하다.

005

104 2022학년도 고3 9월 평가원 미적분

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.

(나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

006 2025년 고3 7월 교육청 미적분

29. 첫째항이 자연수이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n+1|-a_n-1)=26$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

[정답률 : 22.7%]

Comment : 절댓값이 나왔으니 $a_n \ge -1$ or $a_n < -1$일 때로 case분류하는 것이 자명하다.

첫째항이 자연수이고 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로

n이 점점 커지면 a_n의 절댓값은 0에 수렴함을 알 수 있다. 즉, 주어진 급수는 무조건 수렴하는 것이 자명하고 자연수 조건에 유의하여

$a_n < -1$일 때의 합만 처리하면 된다.

007 2026 규토 모의평가 5월 미적분

29. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} |a_n| & (|a_n|\le 6) \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} & (|a_n|>6) \end{cases}$$

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5=6$
(나) $\sum_{n=5}^{\infty}(a_n-|a_n|)=-8$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=S$일 때, $-20\times S$의 값을 구하시오. [4점]

008 2025년 고3 7월 교육청 미적분

28. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(-x)}{x} & (x<0) \\ -x^2+2x+a & (x\ge 0) \end{cases}$$

이다. 실수 $t\,(0<t<2)$에 대하여 $f'(x)=t$를 만족시키는 음수 x의 값을 $g(t)$라 하고, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a의 값을 $h(t)$라 하자.

> $k\ge a$인 모든 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$g(1)+h'(1)$의 값은? (단, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$) [4점]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{5}{6}$ ⑤ 1

[정답률 : 24.8%]

Comment : 문자와 조건이 많아 무슨 말인지 모를 때는
그냥 한번 해본다는 느낌으로 접근해보자.
t가 고정되어 있다고 가정하고 해석해보자.

009

087 2018학년도 고3 6월 평가원 가형

실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2+k & (x\le 2) \\ \ln(x-2) & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개일 때, k의 값은? [4점]

① -2 ② $-\dfrac{9}{4}$ ③ $-\dfrac{5}{2}$ ④ $-\dfrac{11}{4}$ ⑤ -3

010

095 2020학년도 고3 6월 평가원 가형

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점]

① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$ ④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

011 2025년 고3 7월 교육청 미적분

30. 함수 $f(x)=\int_0^x e^{\cos \pi t}dt$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $h(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$h(g(x)+2)=2x^3+6f(1)x^2+1$$

을 만족시킨다. $\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx=k\times\{f(1)\}^2$ 일 때, 실수 k 의 값을 구하시오. [4점]

[정답률 : 3.1%]

Comment : 부분적분, 치환적분 길이 보이지 않는다...

$f(x)$의 그래프 자체에 집중해보자.

$f'(x)=e^{\cos \pi x}$

$\Rightarrow f'(x)=f'(x+2),\ f'(x)=f'(2-x)$

012

114 2018학년도 고3 6월 평가원 가형

실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 라 하자.

함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=k\alpha_m\int_0^1|f(x)|dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

<답>

1. ②
2. ③
3. ⑤
4. ⑤
5. 24
6. 16
7. 24
8. ②
9. ④
10. ②
11. 72
12. 16

<해설>

1. ②

26. [출제의도] 부분적분법 이해하기

직선 AP의 기울기 $f(t)=\dfrac{\dfrac{\ln t}{t}-1}{t-0}=\dfrac{\ln t-t}{t^2}$

$$\int_1^e f(t)dt=\int_1^e \frac{\ln t-t}{t^2}dt=\int_1^e\left(\frac{\ln t}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}dt-\int_1^e \frac{1}{t}dt$$
$$=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^e+\int_1^e \frac{1}{t^2}dt-\left[\ln t\right]_1^e$$
$$=-\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{t}\right]_1^e-1$$
$$=-\frac{1}{e}+\left(-\frac{1}{e}+1\right)-1=-\frac{2}{e}$$

따라서 $\displaystyle\int_1^e f(t)dt=-\frac{2}{e}$

2. ③

078

$f(t)=2t\ln(t+1)$

$$\int_1^3 f(t)dt=\int_1^3 2t\ln(t+1)dt$$

$t+1=x$라 하면 $dt=dx$

$$\int_1^3 2t\ln(t+1)dt=\int_2^4(\ln x)(2x-2)\,dx$$
$$=\left[(\ln x)(x^2-2x)\right]_2^4-\int_2^4(x-2)dx$$
$$=8\ln 4-\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^4$$
$$=-2+16\ln 2$$

따라서 $\displaystyle\int_1^3 f(t)dt=-2+16\ln 2$이다.

답 ③

3. ⑤

$$\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{x^2}dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx+\int_e^{e^2}-\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx+\left[\frac{1}{x}\right]_e^{e^2}$$
$$=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx+\frac{1-e}{e^2}$$

$\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx$에서

$f(x)=\ln x,\ g'(x)=\dfrac{1}{x^2}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=-\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int_e^{e^2}\ln x\times\frac{1}{x^2}dx=\left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\times\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=-\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e}-\int_e^{e^2}-\frac{1}{x^2}dx$$
$$=-\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e}-\left[\frac{1}{x}\right]_e^{e^2}$$
$$=-\frac{3}{e^2}+\frac{2}{e}=\frac{-3+2e}{e^2}$$

따라서 $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{x^2}dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx+\frac{1-e}{e^2}$
$$=\frac{-3+2e}{e^2}+\frac{1-e}{e^2}$$
$$=\frac{e-2}{e^2}$$

이다.

답 ⑤

4. ⑤

27. [출제의도] 몫의 미분법 이해하기

$$g'(x)=\frac{f'(x)e^{f(x)}-\{f(x)+k\}f'(x)e^{f(x)}}{\{e^{f(x)}\}^2}$$

$$=\frac{f'(x)\{1-k-f(x)\}}{e^{f(x)}}$$

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극대이므로 $g'(3)=0$

$f'(3)=0$ 또는 $f(3)=1-k$

함수 $f(x)$가 이차함수이므로 $f'(3)=0$이면

$k\neq 0$인 실수 k에 대하여

$f(3)\neq f(3-2k)$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(3)\neq 0$이고 $f(3)=1-k$

$$g(3)=\frac{f(3)+k}{e^{f(3)}}=\frac{1}{e^{1-k}}=e^{k-1}$$

$g(3)=e$이므로 $k=2$

$f(3)=f(-1)=-1$

그러므로 $f(x)+1=(x+1)(x-3)$

$f(x)=x^2-2x-4$, $f(2)=-4$

따라서 $g(k)=g(2)=\dfrac{f(2)+2}{e^{f(2)}}=-2e^4$

5. 24

104

$g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$

$g'(x)=f'(x)e^{f(x)}+\{f(x)+2\}f'(x)e^{f(x)}$

$=\{3f'(x)+f(x)f'(x)\}e^{f(x)}$

$=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}$

(가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이고 정의역이 실수 전체이므로 $x=a$에서 최댓값을 가지려면 $x=a$에서 극대이어야 한다. 즉, $g'(a)=0$이다.

$g'(a)=0 \Rightarrow \{3f'(a)+f(a)f'(a)\}e^{f(a)}=0$

$\Rightarrow 3f'(a)+f(a)f'(a)=0 \Rightarrow 9f'(a)=0$

$\Rightarrow f'(a)=0$

이차함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$, $f(a)=6$이므로

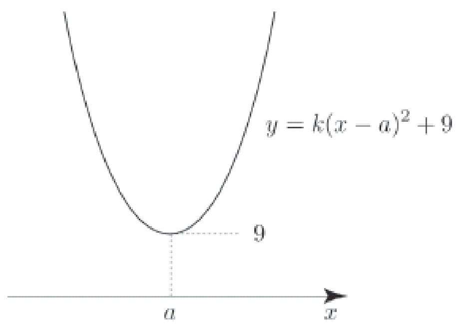
$f(x)=k(x-a)^2+6$, $f'(x)=2k(x-a)$이다.

$g'(x)=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}$

$=2k(x-a)\{k(x-a)^2+9\}e^{k(x-a)^2+6}$

k의 부호에 따라 case분류하면 다음과 같다.

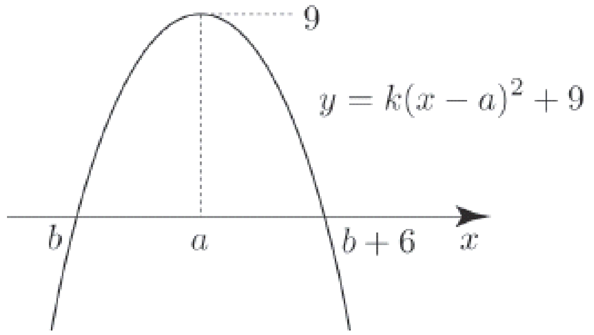
① $k>0$



Semi 도함수 $g'(x)=x-a$

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극소이므로 (가) 조건을 만족시키지 않는다.

② $k<0$



(나) $g(x)$는 $x=b,\ x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

(나) 조건에 의해서 $g'(b)=g'(b+6)=0$이므로
방정식 $k(x-a)^2+9=0$의 두 실근은 $x=b,\ x=b+6$이다.

$k(b-a)^2+9=0 \Rightarrow k=\dfrac{-9}{(b-a)^2}$

$k(b+6-a)^2+9=0 \Rightarrow k=\dfrac{-9}{(b-a+6)^2}$

이때 대칭성에 의해서
$a=\dfrac{b+(b+6)}{2} \Rightarrow 2a=2b+6 \Rightarrow b-a=-3$
이므로 $k=-1$이다.
$f(x)=-(x-a)^2+6$이므로
$f(x)=0 \Rightarrow -(x-a)^2+6=0 \Rightarrow (x-a)^2=6$
$\Rightarrow x=a+\sqrt{6}$ or $x=a-\sqrt{6}$

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $\beta=a+\sqrt{6},\ \alpha=a-\sqrt{6}$이다.

따라서
$(\alpha-\beta)^2=(a-\sqrt{6}-a-\sqrt{6})^2=(-2\sqrt{6})^2=24$이다.

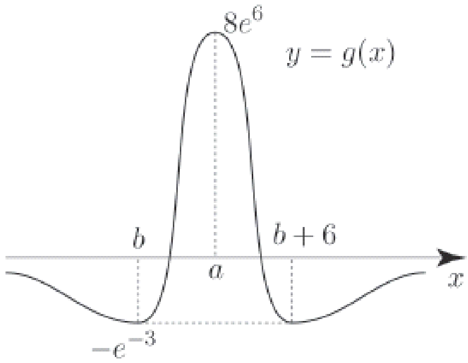
(참고로 $\alpha>\beta$라 해도 $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하는 것이므로 답은 동일하다.)

답 24

<여기서 잠깐!>
$k=-1$일 때, 정말 $g(x)$가 $x=b,\ x=b+6$에서 최솟값을 갖는지 확인해보자.

$g(x)=\{-(x-a)^2+8\}e^{-(x-a)^2+6}$
모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(2a-x)$이 성립하므로
함수 $g(x)=\{-(x-a)^2+8\}e^{-(x-a)^2+6}$는 $x=a$에 대하여 대칭이다.
$g'(x)=-2(x-a)\{-(x-a)^2+9\}e^{-(x-a)^2+6}$에서
$-(x-a)\{-(x-a)^2+9\}=(x-a)(x-b)(x-b-6)$이므로
Semi 도함수 $g'(x)=(x-a)(x-b)(x-b-6)$
$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$
$g(a)=8e^6,\ g(b)=-e^{-3}$

이를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



따라서 $g(x)$는 $x=b,\ x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

6. 16

29. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

$b_n = |a_n + 1| - (a_n + 1)$이라 하면

$$b_n = \begin{cases} 0 & (a_n + 1 \geq 0) \\ -2(a_n+1) & (a_n + 1 < 0) \end{cases}$$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_n = a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (단, n은 자연수)

모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq -1$이면

$b_n = 0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a \geq 3$

n이 홀수일 때, $b_n = 0$

n이 짝수일 때, $a_n < -1$을 만족시키는

최대의 자연수 n을 N이라 하자.

(I) $n > N$인 경우

$a_n + 1 \geq 0$이므로 $b_n = 0$

(II) $n \leq N$인 경우

$a_n + 1 < 0$이므로

$b_n = -2(a_n + 1)$

$= -2\left\{a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} - 2$

이고

$a_N < -1 \leq a_{N+2}$

$a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{N-1} < -1 \leq a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{N+1}$

$-1 \times (-2)^{N-1} < a \leq -1 \times (-2)^{N+1}$

$2^{N-1} < a \leq 2^{N+1}$

(I), (II)에 의하여 다음 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $N = 2$인 경우

$2 < a \leq 2^3$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_2 = -2(a_2 + 1) = a - 2$

$a - 2 \leq 2^3 - 2 = 6$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq 6$이므로 주어진 조건을

만족시키지 않는다.

(ii) $N = 4$인 경우

$2^3 < a \leq 2^5$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_2 + b_4$

$= -2(a_2 + 1) - 2(a_4 + 1)$

$= (a - 2) + \left(\frac{1}{4}a - 2\right) = \frac{5}{4}a - 4$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{5}{4}a - 4 = 26$에서 $a = 24$

(iii) $N \geq 6$인 경우

$a > 2^5$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n > b_2 + b_4 = \frac{5}{4}a - 4$

$\frac{5}{4}a - 4 > \frac{5}{4} \times 2^5 - 4 = 36$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n > 36$이므로 주어진 조건을

만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a = 24$

등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 24이고 공비가 $-\frac{1}{2}$

$a_n = 24 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{24}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 16$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 16$

7. 24

단답형

29. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} |a_n| & (|a_n| \le 6) \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} & (|a_n| > 6) \end{cases}$$

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5 = 6$
(나) $\sum_{n=5}^{\infty}(a_n - \lvert a_n \rvert) = -8$

$a_n \ge 0 \Rightarrow 0$

$a_n < 0 \Rightarrow 2a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = S$일 때, $-20 \times S$의 값을 구하시오. [4점]

24

$\Rightarrow |a_5| = 6 \Rightarrow a_5 = 6$ or $a_5 = -6$

① $a_5 = 6$

② $a_5 = -6$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \quad b_7$

$-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 6 \quad |a_6| = 3 \quad |a_7| = \frac{3}{2}$

$a_1 = 96, \quad a_2 = -48, \quad a_3 = 24, \quad a_4 = -12, \quad a_5 = 6, \quad a_6 = -3, \quad a_7 = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow -48 + 24 - 12 + 6 \quad 36 - 9 \quad \frac{9}{4}$

$-30 + \dfrac{36}{1+\frac{1}{4}} = -30 + \dfrac{36}{\frac{5}{4}}$

$-30 + \dfrac{144}{5} = -\dfrac{6}{5} \qquad \therefore -20 \times -\dfrac{6}{5} = 24$

8. ②

28. [출제의도] 함수의 그래프 추론하기

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \ln(-x)}{x^2} & (x < 0) \\ -2x + 2 & (x > 0) \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-3 + 2\ln(-x)}{x^3} & (x < 0) \\ -2 & (x > 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{-x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\ln(-x)}{x} = \infty$$

$x < 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	$-e$	$\cdots$	(0)
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	↘	변곡점	↖	극소	↙	

$0 < t < 2$인 t에 대하여 곡선 $y = \dfrac{\ln(-x)}{x}$와 직선 $y = tx + k$가 접할 때 k의 값을 b라 하자.

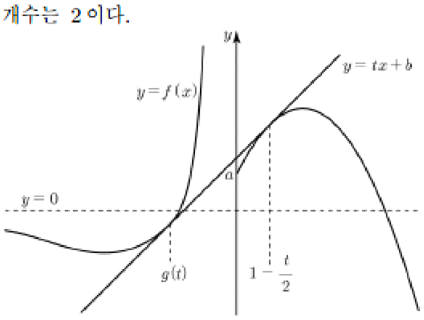
$x < 0$에서 곡선 $y = \dfrac{\ln(-x)}{x}$와 직선 $y = tx + k$가 만나는 서로 다른 점의 개수는

$$\begin{cases} k<b\text{일 때}, & 0 \\ k=b\text{일 때}, & 1 \\ k>b\text{일 때}, & 2 \end{cases}$$

이다.
곡선 $y=-x^2+2x+a$ 위의 점 $(0,\ a)$에서
접선의 기울기는 2이므로
$k \ge a$인 모든 실수 k에 대하여
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=tx+k$가
만나는 서로 다른 점의 개수가 2이기 위해서는
곡선 $y=-x^2+2x+a\ (x \ge 0)$과
직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의
개수가

$$\begin{cases} a \le k<b\text{일 때}, & 2 \\ k=b\text{일 때}, & 1 \\ k>b\text{일 때}, & 0 \end{cases}$$

이어야 한다.
즉, 직선 $y=tx+b$가 두 곡선
$y=\dfrac{\ln(-x)}{x}\ (x<0)$, $y=-x^2+2x+a\ (x \ge 0)$
에 동시에 접할 때, $k \ge a$인 모든 실수 k에
대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와
직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의
개수는 2이다.



$x<0$에서 직선 $y=tx+b$는
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(g(t),\ f(g(t)))$에서의
접선이므로 $f'(g(t))=t$ … ㉠
$x>0$에서
$f'(x)=-2x+2=t$이므로 $f'\left(1-\dfrac{t}{2}\right)=t$
곡선 $y=-x^2+2x+a$ 위의
점 $\left(1-\dfrac{t}{2},\ a+1-\dfrac{t^2}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은
$y=tx+b$와 같다.
두 점 $(g(t),\ f(g(t)))$, $\left(1-\dfrac{t}{2},\ a+1-\dfrac{t^2}{4}\right)$을
지나는 직선의 기울기가 t이므로

$$t=\frac{\left(a+1-\dfrac{t^2}{4}\right)-f(g(t))}{\left(1-\dfrac{t}{2}\right)-g(t)}$$

$$t-\frac{t^2}{2}-t\times g(t)=a+1-\frac{t^2}{4}-f(g(t))$$

$$h(t)=a=f(g(t))-t\times g(t)-\frac{t^2}{4}+t-1$$

㉠에 의하여
$h'(t)$

$$\begin{aligned} &=f'(g(t))\times g'(t)-g(t)-t\times g'(t)-\frac{t}{2}+1 \\ &=t\times g'(t)-g(t)-t\times g'(t)-\frac{t}{2}+1 \\ &=-g(t)-\frac{t}{2}+1 \end{aligned}$$

$$g(t)+h'(t)=-\frac{t}{2}+1$$

따라서 $g(1)+h'(1)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$

[참고]
$f'(g(1))=1$에서 $\dfrac{1-\ln\{-g(1)\}}{\{g(1)\}^2}=1$
$g(1)=-1$, $h'(1)=\dfrac{3}{2}$

[다른 풀이]
$x \ge 0$에서 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 직선
$y=tx+k$의 접점을 $(s,\ -s^2+2s+a)$라 하면
접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y&=(-2s+2)(x-s)-s^2+2s+a \\ &=(-2s+2)x+s^2+a \end{aligned}$$

직선 $y=(-2s+2)x+s^2+a$가
직선 $y=tx+b$와 일치하므로
$t=-2s+2$, $b=s^2+a$에서
$h(t)=a=b-s^2$

$$h'(t)=\frac{da}{dt}=\frac{db}{dt}-2s\frac{ds}{dt}\ \cdots\ ㉠$$

점 $(g(t),\ f(g(t)))$는
직선 $y=tx+b$ 위의 점이므로
$f(g(t))=t\times g(t)+b$
양변을 t에 대하여 미분하면

$$f'(g(t))g'(t)=g(t)+t\times g'(t)+\frac{db}{dt}$$

$f'(g(t))=t$이므로 $\dfrac{db}{dt}=-g(t)$

$$g(t)=-\frac{db}{dt}\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$g(t)+h'(t)=-2s\frac{ds}{dt}$$

$x>0$일 때, 직선 $y=tx+b$가
곡선 $y=-x^2+2x+a$와
점 $(s,\ -s^2+2s+a)$에서 접하므로
$t=-2s+2$에서
$s=1-\dfrac{t}{2}$이고 $\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{1}{2}$이므로
$t=1$일 때, $s=\dfrac{1}{2}$

따라서

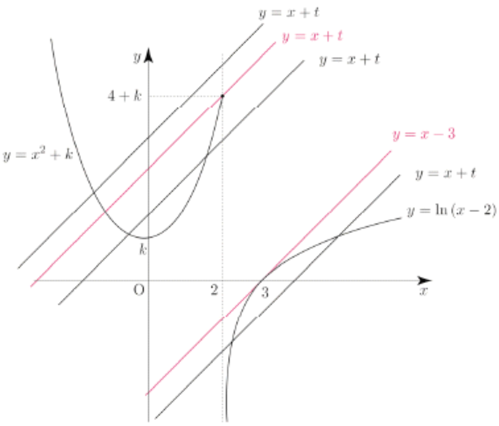
$$\begin{aligned} g(t)+h'(t)&=-2s\frac{ds}{dt} \\ &=-2\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

9. ④

087

$$f(x)=\begin{cases} x^2+k & (x\le 2) \\ \ln(x-2) & (x>2) \end{cases}$$

직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$



이런 문제들은 특수한 지점부터 확인해보는 것이 좋다.

$h(x)=\ln(x-2)$라 하면 $h'(x)=\dfrac{1}{x-2} \Rightarrow h'(3)=1$

이므로 $(3,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=x-3$이다.

직선 $y=x+t$가 점 $(2,\ 4+k)$를 지날 때를 살펴보자.

$4+k=2+t \Rightarrow t=k+2$

$\lim\limits_{t\to(k+2)-} g(t)=2$, $g(k+2)=2$이고,

$t>k+2$일 때, $g(t)=1$이므로

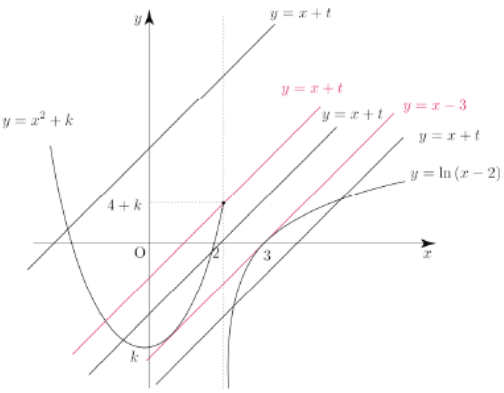
$g(t)$는 $t=k+2$에서 불연속이다.

$g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개이므로

$t<k+2$에서 $g(t)$는 연속이어야 한다.

즉, $t<k+2$ 일 때, $g(t)=2$가 되려면 다음 그림과 같이

$y=x^2+k$가 $y=x-3$와 접해야 한다.



$x^2+k=x-3 \Rightarrow x^2-x+k+3=0$

판별식 $D=0 \Rightarrow 1-4k-12=0 \Rightarrow k=-\dfrac{11}{4}$

따라서 $k=-\dfrac{11}{4}$ 이다.

답 ④

10. ②

095

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

접점의 x좌표를 $g(t)$

접선의 기울기가 t이므로

$f'(g(t))=t \Rightarrow \dfrac{1-\ln g(t)}{\{g(t)\}^2}=t$

$y=\dfrac{1-\ln g(t)}{\{g(t)\}^2}(x-g(t))+\dfrac{\ln g(t)}{g(t)}$

$=\dfrac{1-\ln g(t)}{\{g(t)\}^2}x+\dfrac{-1+2\ln g(t)}{g(t)}$

점 $(0,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a이므로 $(0,\ 0)$을 대입하면

$0=\dfrac{-1+2\ln g(a)}{g(a)} \Rightarrow g(a)=e^{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{1-\ln g(t)}{\{g(t)\}^2}=t$의 양변에 $t=a$을 대입하면

$\dfrac{1-\ln g(a)}{\{g(a)\}^2}=a \Rightarrow \dfrac{1}{2e}=a$

$\dfrac{1-\ln g(t)}{\{g(t)\}^2}=t \Rightarrow 1-\ln g(t)=t\{g(t)\}^2$의

양변을 t에 대하여 미분하면

$-\dfrac{g'(t)}{g(t)}=\{g(t)\}^2+2tg'(t)g(t)$

양변에 $t=a$을 대입하면

$-\dfrac{g'(a)}{g(a)}=\{g(a)\}^2+2ag'(a)g(a)$

$\Rightarrow -\dfrac{g'(a)}{\sqrt{e}}=e+\dfrac{\sqrt{e}}{e}g'(a)$

$\Rightarrow -g'(a)=e\sqrt{e}+g'(a) \Rightarrow g'(a)=-\dfrac{e\sqrt{e}}{2}$

따라서 $a\times g'(a)=\dfrac{1}{2e}\times\left(-\dfrac{e\sqrt{e}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$ 이다.

답 ②

11. 72

30. [출제의도] 치환적분을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=\int_0^x e^{\cos \pi t}dt$ 에서 $f(0)=0$

$f'(x)=e^{\cos \pi x}$

모든 실수 x 에 대하여

$f'(x+2)=f'(x)$ … ㉠

$f'(-x)=f'(x)$ … ㉡

㉠에 의하여

$f(x+2)=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

$f(2)=f(0)+C=C$ 이므로

$f(x+2)=f(x)+f(2)$

$$f(2)=\int_0^2 e^{\cos \pi t}dt$$

$$=\int_0^2 f'(t)dt$$

$$=\int_0^1 f'(t)dt+\int_1^2 f'(t)dt$$

$$=f(1)+\int_{-1}^0 f'(t)dt$$

㉡에 의하여 $\int_{-1}^0 f'(t)dt=\int_0^1 f'(t)dt$ 이므로

$$f(2)=f(1)+\int_0^1 f'(t)dt$$

$$=f(1)+f(1)=2f(1)$$

$h(g(t)+2)=2t^3+6f(1)t^2+1$

$x=g(t)+2$로 치환하면 $1=g'(t)\dfrac{dt}{dx}$

$g(t)=x-2$ 에서 $t=f(x-2)$

$x=3$ 일 때 $t=f(1)$

$x=7$ 일 때 $t=f(5)$

이고

$h'(g(t)+2)g'(t)=6t^2+12f(1)t$ 이므로

$$\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx=\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{h'(g(t)+2)}{f(g(t)+2)}g'(t)dt$$

$$=\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{6t^2+12f(1)t}{f(g(t))+f(2)}dt$$

$$=\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{6t\{t+2f(1)\}}{t+2f(1)}dt$$

$$=\int_{f(1)}^{f(5)}6t\,dt$$

$$=3\times\left[t^2\right]_{f(1)}^{f(5)}$$

$$=3\times\left[\{f(5)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$$

$f(5)=f(3)+f(2)$

$\quad=\{f(1)+f(2)\}+f(2)=5f(1)$

이므로

$$\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx=3\times\left[\{5f(1)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$$

$$=72\times\{f(1)\}^2$$

따라서 $k=72$

[다른 풀이]

$g(f(x))=x$ 이므로

$h(x+2)=2\{f(x)\}^3+6f(1)\{f(x)\}^2+1$

$h'(x+2)=6\{f(x)\}^2f'(x)+12f(1)f(x)f'(x)$

$x=t+2$ 라 하면

$$\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx$$

$$=\int_1^5 \frac{h'(t+2)}{f(t+2)}dt$$

$$=\int_1^5 \frac{6\{f(t)\}^2f'(t)+12f(1)f(t)f'(t)}{f(t)+f(2)}dt$$

$$=\int_1^5 \frac{6f(t)f'(t)\{f(t)+2f(1)\}}{f(t)+2f(1)}dt$$

$$=\int_1^5 6f(t)f'(t)dt$$

$$=3\times\left[\{f(5)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$$

$f(5)=f(3)+f(2)$

$\quad=\{f(1)+f(2)\}+f(2)=5f(1)$

이므로

$$\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx=3\times\left[\{5f(1)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$$

$$=72\times\{f(1)\}^2$$

따라서 $k=72$

12. 16

114

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$

$g(a)=0,\ g'(x)=f(x)$

(가) 조건에 의하여 $g'(1)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=\ln(x^4+1)-c\ \ (c>0)$

$f(1)=0 \Rightarrow 0=\ln2-c \Rightarrow c=\ln2$

$\therefore\ f(x)=\ln(x^4+1)-\ln2$

$f(1)=f(-1)=0$

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로

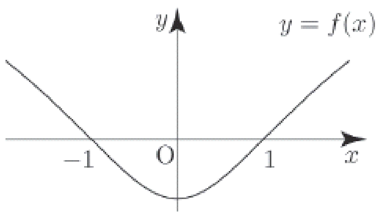
$y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$f'(x)=\dfrac{4x^3}{x^4+1}$

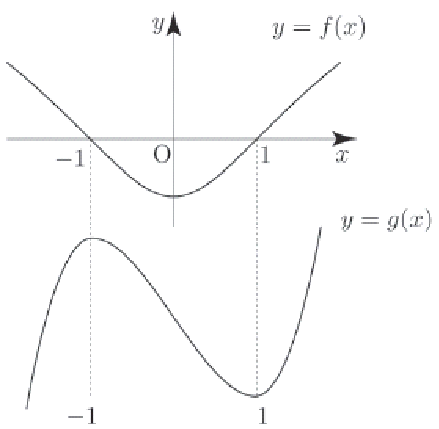
Semi 도함수 $f'(x)=x^3$

$f'(0)=0 \Rightarrow x=0$에서 극소

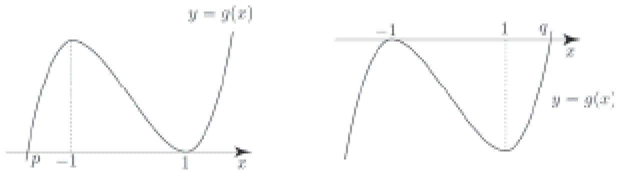
이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면 다음과 같다.



$g'(x)=f(x)$를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되려면 다음과 같이 2가지 경우가 가능하다.

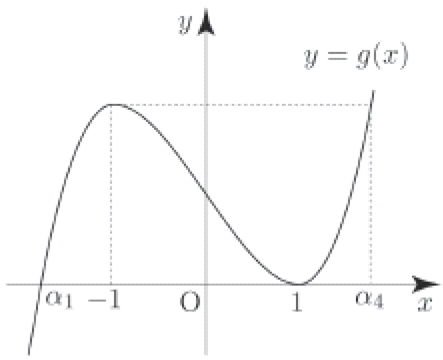


$g(a)=0$이므로 위 그림에 의하여 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 다음과 같다.

$\alpha_1=p,\ \alpha_2=-1,\ \alpha_3=1,\ \alpha_4=q$

즉, $m=4$

$a=\alpha_1=p$일 때, $g(x)$는



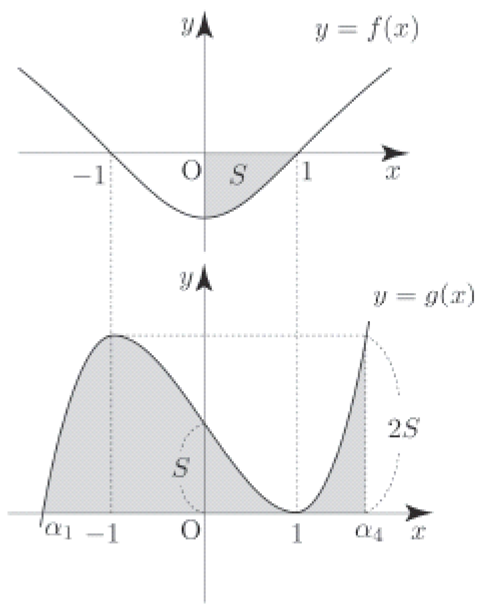
(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=k\alpha_m\int_0^1|f(x)|dx$

$m=4$이므로 $\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx=k\alpha_4\int_0^1|f(x)|dx$

$\int_0^1|f(x)|dx=S$ 라 하면

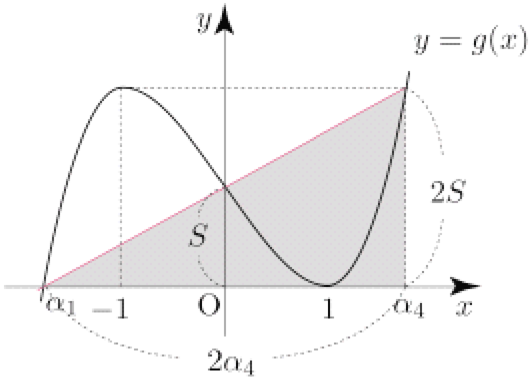
($f'(x)$의 넓이는 $f(x)$의 함숫값의 차이와 같다.)

$g(0)=S \Rightarrow g(\alpha_4)=2S$



$y=f(x)$ 의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
$y=g(x)$ 의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$ 에 대하여 대칭이다.

즉, $\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx$ 는 대칭성에 의하여 아래와 같이 삼각형의 넓이와 같다.



$\therefore \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx = \frac{1}{2}\times 2\alpha_4 \times 2S = 2\alpha_4 S$

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx = k\alpha_4 \int_0^1 |f(x)|dx$

$\Rightarrow 2\alpha_4 S = k\alpha_4 S$

$\Rightarrow k=2$

따라서 $mk\times e^c = 4\times 2\times e^{\ln 2} = 8\times 2 = 16$ 이다.

답 16