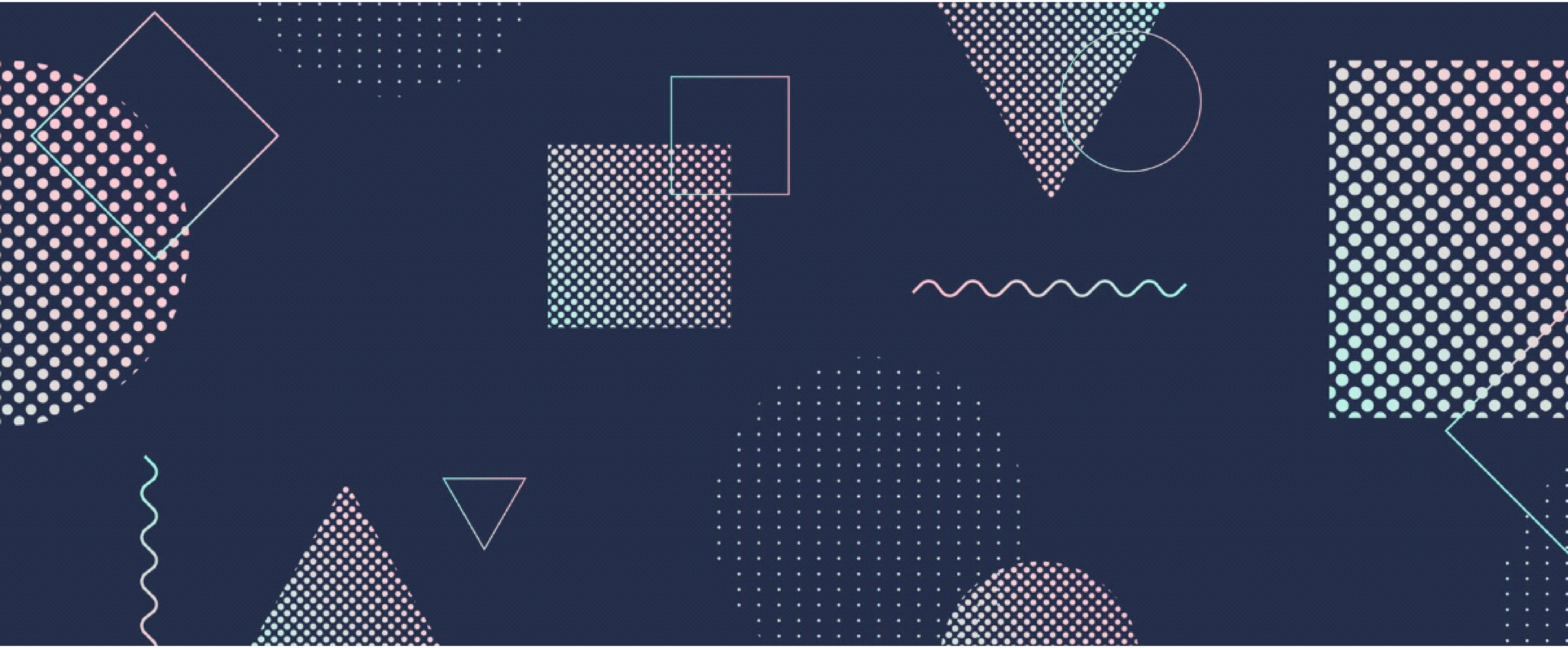
"유일하게 부족한 것은 노력뿐!"

2025년 7모 보충프린트

ver.수1수2



유성민T

대치명인학원

실전같이 풀어라 !!!!

7월 모의고사 보충프린트 ver. 수1수2

■ 실시일: 2025년 7월 12일 (토)

001 2025년 고3 7월 교육청 공통

10. 다음과 같이 $0 \le x < 2$에서 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

> $n-1 \le x < n$일 때, $f(x) = 3^n \sin \pi x + 4$이다.
> (단, $n = 1$, 2)

함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는? [4점]

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

[정답률 : 54.2%]

Comment : 기본적인 삼각함수 그래프 그리기 문제이다.
만약 위 그래프를 그리지 못했다면 기본개념
점검이 반드시 필요하다.

002

097 2025학년도 고3 9월 평가원 공통

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \le x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x - 1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. $0 \le t \le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

대치명인학원 유성민T

003 2025년 고3 7월 교육청 공통

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^3 - 5t^2 + 10t, \quad x_2 = \frac{5}{2}t^2 - 2t - 10$$

이다. 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 순간 점 P의 가속도는? [4점]

① 8 ② 11 ③ 14 ④ 17 ⑤ 20

Comment : 비슷한 기출이 산더미 같이 쌓여있다.
두 점 P, Q사이의 거리라고 했으니 마지막에
절댓값 꼭 잊지말자!

004

064 2013년 고3 10월 교육청 A형

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(0 \leq t \leq 8)$에서의 속도가 각각 $2t^2 - 8t$, $t^3 - 10t^2 + 24t$이다. 두 점 P, Q사이의 거리의 최댓값을 구하시오. [4점]

005

093 2024학년도 고3 9월 평가원 공통

두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다.
두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t) = 3t^2 + 4t - 7, \quad v_2(t) = 2t + 4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32

006 2025년 고3 7월 교육청 공통

12. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$b_{n+1}=\begin{cases} b_n+1 & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n+b_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $b_9-b_3=27$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① 100 ② 145 ③ 190 ④ 235 ⑤ 280

[정답률 : 61%]

Comment : 규칙성 파악은 수열의 꽃이다.
쫄지말고 대입하다보면 어느 순간 답이
도출되어 있다.

007

092 2025학년도 고3 9월 평가원 공통

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$$

를 만족시킨다. $b_2=-2$, $b_3+b_7=0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4점]

① -22 ② -20 ③ -18
④ -16 ⑤ -14

008

091 2024년 고3 5월 교육청 공통

공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과
자연수 m $(m \ge 3)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_1-b_1\rvert=5$
(나) $a_m=b_m$, $a_{m+1}<b_{m+1}$

$\sum_{k=1}^{m} a_k=9$일 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k$의 값은? [4점]

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

009 2025년 고3 7월 교육청 공통

13. 함수 $f(x)=x^2-4x+5$와 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+a)+b & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\left|\lim_{t \to k+} h(t) - \lim_{t \to k-} h(t)\right| = 2$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 1, 4, 5일 때, $g(-4)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

[정답률 : 48.6%]

Comment : $f(x+a)+b$와 $f(x)$는 평행이동관계임을 알 수 있다. 교점의 개수 함수는 국밥중에서도 원조 국밥문제이다. 낯설지 않은 조건이니 쫄지말자! 이차함수의 대칭성을 적극 활용하도록 하자.

010

256 2024학년도 수능 공통

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \leq 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t \to k-} g(t)+\lim_{t \to k+} g(t)=9$$

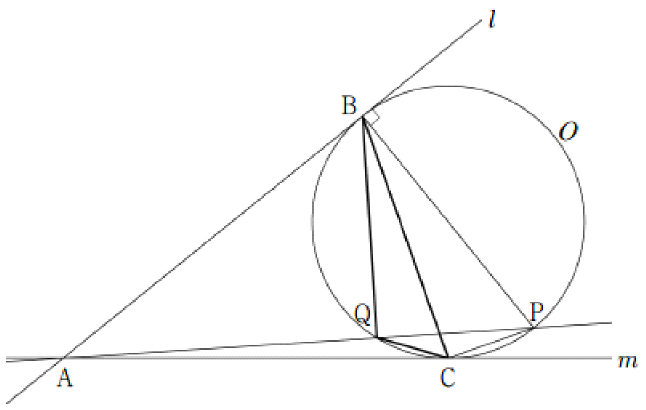
를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53

④ 54 ⑤ 55

011 2025년 고3 7월 교육청 공통

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 원 O 의 외부에 있는 점 A 에서 원 O 에 그은 두 접선을 각각 l, m 이라 하고, 두 직선 l, m 이 원 O 와 만나는 점을 각각 B, C 라 하자. 점 B 를 지나고 직선 l 에 수직인 직선이 원 O 와 만나는 두 점 중에서 B 가 아닌 점을 P, 직선 AP 가 원 O 와 만나는 두 점 중에서 P 가 아닌 점을 Q 라 하면 $\overline{AB}=12$ 일 때, $\sin(\angle BPQ):\sin(\angle QPC)=3:1$ 이다. 삼각형 BQC 의 넓이는? [4점]



① $\frac{14\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ ③ $6\sqrt{2}$
④ $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{22\sqrt{2}}{3}$

[정답률 : 32%]

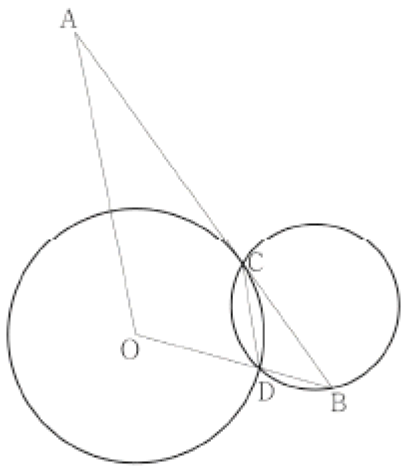
Comment : 원나오면 태도 6가지

1) 원주각 같다.
2) 중심각과 원주각 사이의 관계
3) 원에 내접한 사각형의 두 대각의 합은 180°
4) 원과 직각삼각형의 관계 (빗변=지름)
5) 중심에서 현에 내린 수선의 발
(수직이등분선 작도, 원 위의 한 점과 중심을 이으면 반지름)
6) 접점 수직보조선(중심과 접점을 잇는다.)

012

080

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 삼각형 OAB의 변 AB에 접한다. 이때의 접점을 C라 할 때, $\overline{AC}=2\overline{BC}$ 이다. 원과 선분 OB와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 S_1, 삼각형 BCD의 넓이를 S_2라 할 때, $2S_1=15S_2$이다. 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $k\pi$이다. k의 값을 구하시오.

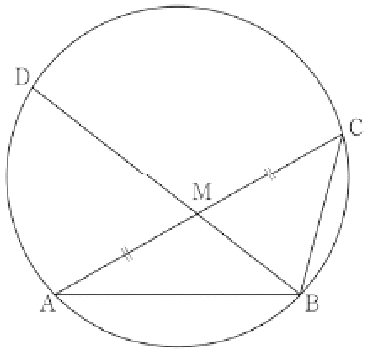


013

060 2023학년도 고3 6월 평가원 공통

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다.

선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]

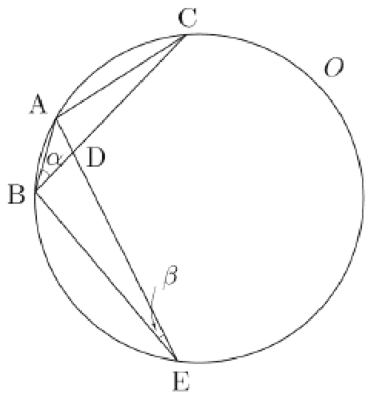


① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

014 2026 규토 모의평가 5월 공통

13. 그림과 같이 넓이가 $\frac{64}{7}\pi$인 원 O에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점을 D라 하고, 직선 AD가 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 하자. $\angle ABC=\alpha$, $\angle AEB=\beta$라 할 때, $2\sin\beta=\sin\alpha$이고, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}$이다. $\overline{AB}+\overline{AE}$의 값은? [4점]



① $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{2}}{2}$

015 2025년 고3 7월 교육청 공통

15. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-x^2 & (x\le 0) \\ \{f(x)\}^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=b$ 에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $g(x)=0$ 은 음의 실근을 갖는다.

$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)+g(3)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

① $\dfrac{183}{2}$ ② $\dfrac{187}{2}$ ③ $\dfrac{191}{2}$ ④ $\dfrac{195}{2}$ ⑤ $\dfrac{199}{2}$

Comment : 무엇을 해야 할지 막막할 수 있다.
문제를 풀어나가는 것은 출제자가 설정한
이정표를 따라가는 과정과 같다.
$x=b$에서만 미분가능하지 않다고 했으니
무조건 미분이 가능한 양수는 배제하고
$b=0$ or $b<0$일 때로 case분류하여 접근하는 것이
첫 시작이다.

016

151

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} (x-1)f(x) & (x\ge 0) \\ \displaystyle\int_0^x tf'(t)dt & (x<0) \end{cases}$$

라 하고 집합 S 를

$S=\{a\,|\,$함수 $|g(x)|$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하자. S 의 모든 원소의 합이 -3 일 때, $\dfrac{g(4)}{g(-2)}$ 의 값은?

① -30 ② -32 ③ -34
④ -36 ⑤ -38

017 2025년 고3 7월 교육청 공통

20. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=-2^{-x+a}+b$가 있다. 집합 $\{x \mid x \neq 4,\ x는\ 실수\}$에서 정의된 함수

$$g(x)=f(x)+2^x+\frac{|x-4|}{x-4}\{f(x)-2^x\}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $g(6)$의 값을 구하시오. [4점]

모든 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수는 0 또는 2이다.

[정답률 : 19.4%]

Comment : 절대 쫄지말자! $x>4$ or $x<4$ case분류!

보나마나 점근선?

018

119 2024년 고3 5월 교육청 공통

두 상수 a, $b(b>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+3}+b & (x \leq a) \\ 2^{-x+5}+3b & (x>a) \end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 $4b+8$일 때, $a+b$의 값은? (단, $k>b$) [4점]

$b<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

019

121 2024년 고3 10월 교육청 공통

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-3}+a & (x<2) \\ |5\log_2 x-b| & (x\geq 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 최솟값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(t)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2\}$이다.
(나) $g(t)=2$인 자연수 t의 개수는 6이다.

020 2025년 고3 3월 교육청 공통

15. 세 실수 a, p, $q(p<q)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} |2^x-4| & (x\leq p \text{ 또는 } x\geq q) \\ a+\log_2 x & (p<x<q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

021 2025년 고3 7월 교육청 공통

21. 함수 $f(x)=-x^2+kx\ (k>0)$의 그래프 위에 있는 제1사분면 위의 점 $\mathrm{A}(a, f(a))\left(a>\frac{k}{2}\right)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하고, 직선 $y=g(x)$의 x절편을 b라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 삼각형 AOH의 넓이를 S라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_a^b g(x)dx = S$

(나) $\int_0^a \left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx = \frac{32}{3}$

$g(-k)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, k는 상수이다.) [4점]

[정답률 : 13.5%]

Comment : 무조건 수식으로 뚫을 생각을 하지 말고 그래프와 함께 복합적으로 사고해보자. $A=B$ 등식에서 B가 넓이이면 A도 넓이의 관점에서 생각해보자. 오른쪽 문제의 ㄷ 해설을 꼭 읽어볼 것!

022

088 2018년 고3 7월 교육청 나형

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=-f'(x)$를 만족시킨다. $f'(1)=0$, $f(1)=2$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $f'(-1)=0$

ㄴ. 모든 실수 k에 대하여 $\int_{-k}^0 f(x)dx = \int_0^k f(x)dx$이다.

ㄷ. $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여 $\int_{-t}^t f(x)dx < 6t$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

023 2025년 고3 7월 교육청 공통

22. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6=6$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) 네 항 a_2, a_3, a_4, a_5 중 짝수인 항의 개수는 1이다.

[정답률 : 7.6%]

Comment : 요번 6평에서는 수학적 귀납법이 쉬운 4점문제로 출제되었다. 9평까지 봐야겠지만 언제든지 22번으로 재출제될 수 있다.
$a_6=6$을 줬으니 a_4가 짝수일 때, 홀수일 때 case분류하여 역행으로 계산하는 것이 바람직하다.

024

071 2023학년도 수능 공통

모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_7=40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

<답>

1. ③
2. 15
3. ③
4. 64
5. ⑤
6. ②
7. ②
8. ①
9. ⑤
10. ①
11. ②
12. 5
13. ③
14. ③
15. ①
16. ③
17. 24
18. ①
19. 15
20. ②
21. 28
22. ⑤
23. 76
24. ⑤

<해설>

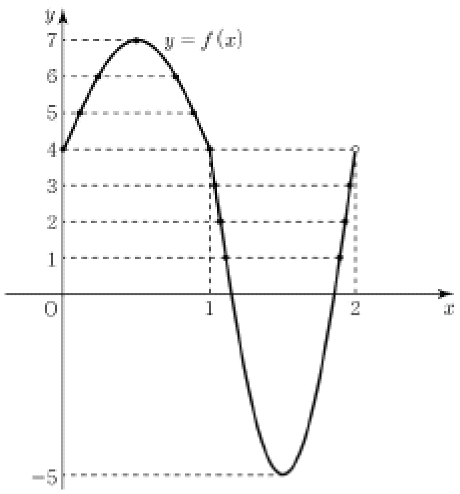
1. ③

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

$$f(x)=\begin{cases}3\sin\pi x+4 & (0\le x<1)\\ 9\sin\pi x+4 & (1\le x<2)\end{cases}$$

두 함수 $y=3\sin\pi x+4$, $y=9\sin\pi x+4$ 의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

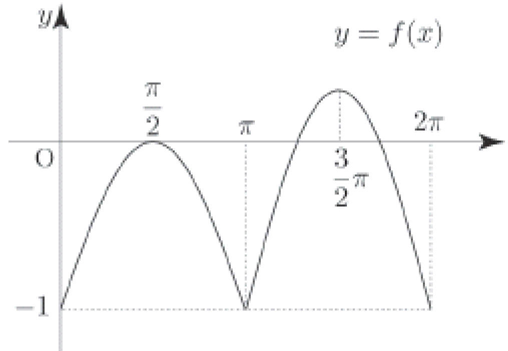


따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 중 y 좌표가 자연수인 점의 개수는 13

2. 15

097

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$



방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되려면 $f(t)=-1$ or $f(t)=0$ 이어야 한다.

① $f(t)=-1$ $(0\le t\le 2\pi)$

$t=0,\ t=\pi,\ t=2\pi$

② $f(t)=0$ $(0\le t\le 2\pi)$

$f(x)=0$ $(\pi<x<2\pi)$ 의 실근을 각각 $\alpha,\ \beta$라 하자.

$t=\dfrac{\pi}{2},\ t=\alpha,\ t=\beta$

대칭성에 의해서 $\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}\pi\times 2=3\pi$

①, ②에 의해

모든 t의 값의 합은 $0+\pi+2\pi+\dfrac{\pi}{2}+\alpha+\beta=\dfrac{13}{2}\pi$이다.

따라서 $p+q=15$이다.

답 15

3. ③

11. **[출제의도] 미분을 활용하여 속도와 가속도 문제 해결하기**

시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|x_1 - x_2| = \left|t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10\right|$$

$f(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10\ (t \ge 0)$이라 하면

$f'(t) = 3t^2 - 15t + 12 = 3(t-1)(t-4)$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	10	↗	극대	↘	극소	↗

$t \ge 0$에서 함수 $f(t)$의 최솟값이 $f(4) = 2$이므로 $f(t) > 0$

$|x_1 - x_2| = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10$이고

두 점 P, Q 사이의 거리는 $t = 4$에서 최소이다.

시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t) = \frac{dx_1}{dt} = 3t^2 - 10t + 10$

$a(t) = v'(t) = 6t - 10$

따라서 $t = 4$에서의 점 P의 가속도는

$a(4) = 6 \times 4 - 10 = 14$

4. 64

064

$v_p(t) = 2t^2 - 8t,\ v_q(t) = t^3 - 10t^2 + 24t$

$x_p(t) = \frac{2}{3}t^3 - 4t^2,\ x_q(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{10}{3}t^3 + 12t^2$

($t = 0$일 때 원점이므로 $x_p(0) = x_q(0) = 0$)

두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|x_p(t) - x_q(t)|$$

$$= \left|\frac{2}{3}t^3 - 4t^2 - \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{10}{3}t^3 + 12t^2\right)\right|$$

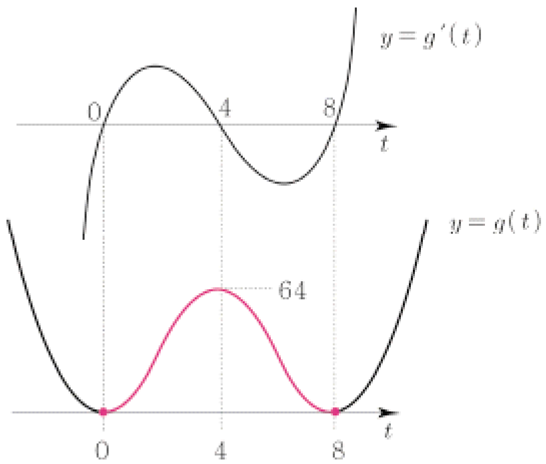
$$= \left|\frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2\right|$$

$g(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$라 하면

$g'(t) = t^3 - 12t^2 + 32t = t(t-4)(t-8)$

$g(0) = 0,\ g(8) = 0,\ g(4) = 64$

$g'(t)$를 바탕으로 $g(t)$를 그리면



$g(t) \ge 0$이므로 $|g(t)| = g(t)$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 $g(4) = 64$이다.

답 64

5. ⑤

093

$v_1(t)=3t^2+4t-7,\ v_2(t)=2t+4$

$x_1(0)=1,\ x_2(0)=8$ 이므로

$x_1(x)=t^3+2t^2-7t+1,\ x_2(t)=t^2+4t+8$

점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$ 라 하면

$f(t)=|t^3+2t^2-7t+1-(t^2+4t+8)|$

$\quad =|t^3+t^2-11t-7|$

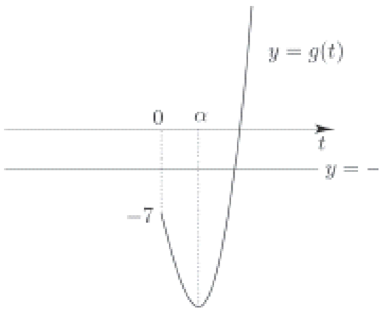
$g(t)=t^3+t^2-11t-7$ 이라 하면

$g'(t)=3t^2+2t-11$

$g'(t)=0 \Rightarrow t=\dfrac{-1-\sqrt{34}}{3}$ or $t=\dfrac{-1+\sqrt{34}}{3}$

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{34}}{3}$ 라 하자.

이를 바탕으로 $g(t)$ 를 그리면



$f(t)=4$ 를 만족시키는 양수 t 의 최솟값은

$g(t)=-4$ 를 만족시키는 양수 t 와 같다.

$g(t)=-4 \Rightarrow t^3+t^2-11t-7=-4$

$\Rightarrow t^3+t^2-11t-3=0$

$\Rightarrow (t-3)(t^2+4t+1)=0$

$\Rightarrow t=3$

$t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P 가 움직인 거리를 S 라 하면

$S=\displaystyle\int_0^3|v_1(t)|dt=\int_0^3|3t^2+4t-7|dt$

$\quad =\displaystyle\int_0^1(-3t^2-4t+7)dx+\int_1^3(3t^2+4t-7)dt$

$\quad =\left[-t^3-2t^2+7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$

$\quad =4+28=32$

이다.

답 ⑤

6. ②

12. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제 해결하기

$b_4=a_3+b_3$

$b_5=b_4+1=a_3+b_3+1$

$b_6=b_5+1=a_3+b_3+2$

$b_7=a_6+b_6=a_6+a_3+b_3+2$

$b_8=b_7+1=a_6+a_3+b_3+3$

$b_9=b_8+1=a_6+a_3+b_3+4$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$a_3=1+2d,\ a_6=1+5d$ 이므로

$b_9-b_3=a_6+a_3+4=7d+6=27$

$d=3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{10\times\{2\times1+(10-1)\times3\}}{2}=145$$

[참고]

$b_1=\alpha$ (α 는 실수)라 하면

$b_3=b_1+2=\alpha+2$

$b_9=a_6+a_3+b_1+6=2+7d+\alpha+6$

$b_9-b_3=7d+6$

7. ②

092

a_n의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$

$b_1=a$

$b_2=a_1-a_2=-d$

$b_3=a_1-a_2+a_3=a+d$

$b_4=a_1-a_2+a_3-a_4=-2d$

$b_5=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=a+2d$

$b_6=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6=-3d$

$b_7=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7=a+3d$

$b_8=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8=-4d$

$b_9=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8+a_9=a+4d$

$b_2=-2 \Rightarrow d=2$

$b_3+b_7=0 \Rightarrow a+d+a+3d=0$

$\Rightarrow a+2d=0 \Rightarrow a=-4$

따라서 $\sum_{n=1}^{9}b_n=5a=-20$이다.

답 ②

8. ①

091

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 하고,
첫째항을 각각 a, b라 하자.

(나) 조건에서
$a_{m+1}-b_{m+1}=(a_m+d_1)-(b_m+d_2)=d_1-d_2<0$

$a_m-b_m=\{a+(m-1)d_1\}-\{b+(m-1)d_2\}$
$=(a-b)+(m-1)(d_1-d_2)=0$

$\Rightarrow a-b=(m-1)(d_2-d_1)$

$m-1>0$, $d_2-d_1>0$이므로 $a-b>0$

(가) 조건에서 $a-b=5$이므로
$(m-1)(d_2-d_1)=5$
이때 $m-1$, d_2-d_1은 모두 자연수이고, $m\geq 3$이므로
$m-1=5$, $d_2-d_1=1 \Rightarrow m=6$

$\sum_{k=1}^{6}a_k=9 \Rightarrow \frac{6(2a+5d_1)}{2}=9 \Rightarrow 2a+5d_1=3$

따라서 $\sum_{k=1}^{6}b_k=\frac{6(2b+5d_2)}{2}=\frac{6\{2(a-5)+5(d_1+1)\}}{2}$
$=3(2a+5d_1-5)=3(3-5)=-6$
이다.

답 ①

9. ⑤

13. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 함수 추론하기

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = g(0)$

$\lim_{x\to 0-} g(x) = f(a)+b$

$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 5$

$g(0)=f(0)=5$

$f(a)+b=5$

$a^2-4a+b=0 \cdots$ ㉠

$f(x)=(x-2)^2+1$이므로

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 1을 갖는다.

함수 $y=f(x+a)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다.

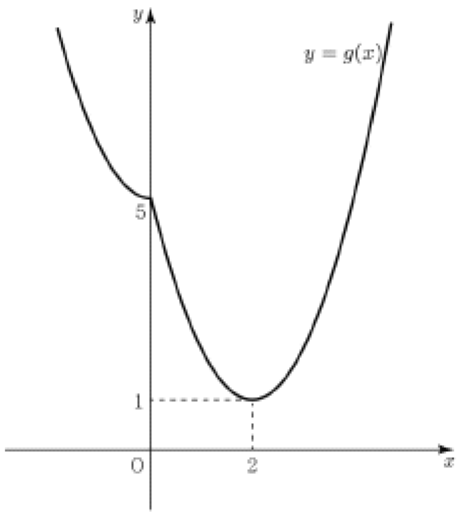
$f(x+a)+b=\{x-(2-a)\}^2+1+b$이므로

함수 $y=f(x+a)+b$는

$x=2-a$에서 최솟값 $1+b$를 갖는다.

(i) $2-a \ge 0$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$k=4$ 또는 $k=5$일 때,

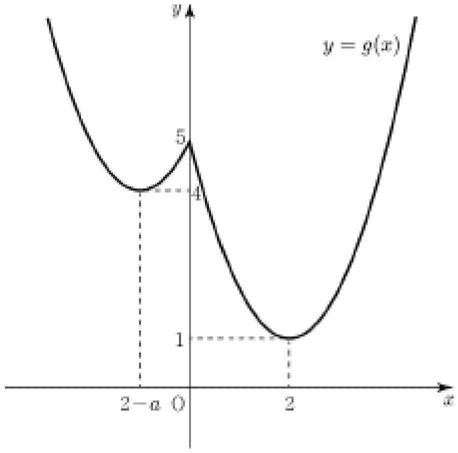
$\left|\lim_{t\to k+} h(t) - \lim_{t\to k-} h(t)\right| \ne 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2-a<0$인 경우

$\left|\lim_{t\to k+} h(t) - \lim_{t\to k-} h(t)\right| = 2$를 만족시키는

k의 값이 1, 4, 5이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2-a)=1+b=4$, $b=3$

㉠에 의하여

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$a>2$이므로 $a=3$

따라서 $g(-4)=f(-4+3)+3=10+3=13$

10. ①

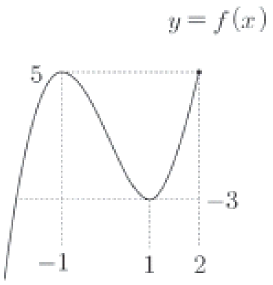
256

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

$\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2)=5$, $\lim_{x\to 2+} f(x)=9$ 이므로 $f(x)$는

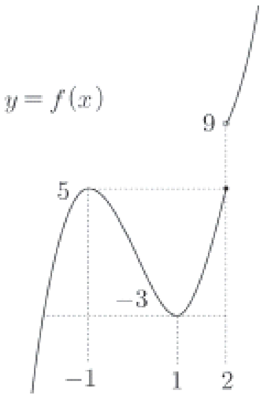
$x=2$에서 불연속이다.

$f(x)=2x^3-6x+1 \ (x\le 2)$
$f'(x)=6x^2-6=6(x-1)(x+1) \ (x<2)$
$f(-1)=5,\ f(1)=-3,\ f(2)=5$
이를 바탕으로 $x\le 2$에서 $f(x)$를 그리면



$f(x)=a(x-2)(x-b)+9 \ (x>2)$ 에서
$y=a(x-2)(x-b)+9$의 꼭짓점의 x좌표는
$x=\dfrac{b+2}{2}$ 이므로 $x=2$와 $\dfrac{b+2}{2}$의 대소관계에 따라
case분류하면

① $\dfrac{b+2}{2}\le 2 \Rightarrow b+2\le 4 \Rightarrow b\le 2$



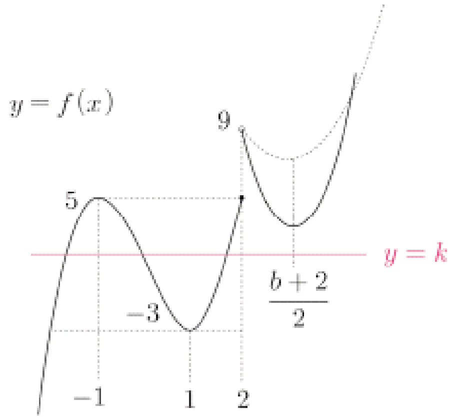
$-3<k<5$인 모든 k에 대하여
$g(k)=\lim_{t\to k-} g(t)=\lim_{t\to k+} g(t)=3$이다.
즉, $g(k)+\lim_{t\to k-} g(t)+\lim_{t\to k+} g(t)=9$를 만족시키는 실수 k의
개수가 1이 아니므로 모순이다.

② $\dfrac{b+2}{2}>2 \Rightarrow b+2>4 \Rightarrow b>2$

$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)$의 값에 따라 개형이 달라지므로

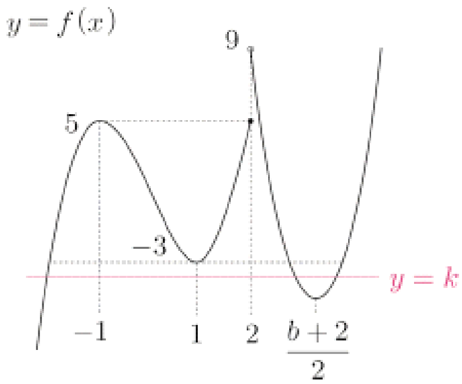
$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)$와 -3의 대소관계에 따라 case분류하면

i) $f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)>-3$



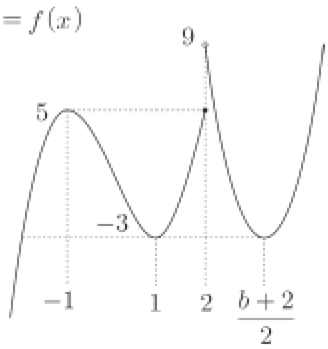
$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)$와 5 중 크지 않은 값을 m이라 할 때,
$-3<k<m$인 모든 실수 k에 대하여
$g(k)=\lim_{t\to k-} g(t)=\lim_{t\to k+} g(t)=3$이다.
즉, $g(k)+\lim_{t\to k-} g(t)+\lim_{t\to k+} g(t)=9$를 만족시키는 실수 k의
개수가 1이 아니므로 모순이다.

ii) $f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)<-3$



$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)<k<-3$인 모든 실수 k에 대하여
$g(k)=\lim_{t\to k-} g(t)=\lim_{t\to k+} g(t)=3$이다.
즉, $g(k)+\lim_{t\to k-} g(t)+\lim_{t\to k+} g(t)=9$를 만족시키는 실수 k의
개수가 1이 아니므로 모순이다.

iii) $f\left(\frac{b+2}{2}\right) = -3$



k의 값에 따라 $g(k)$, $\lim_{t\to k-} g(k)$, $\lim_{t\to k+} g(k)$를 구하면

	$g(k)$	$\lim_{t\to k-} g(k)$	$\lim_{t\to k+} g(k)$
$k<-3$	1	1	1
$k=-3$	3	1	5
$-3<k<5$	5	5	5
$k=5$	4	5	2
$5<k<9$	2	2	2
$k=9$	1	2	1
$k>9$	1	1	1

$g(k)+\lim_{t\to k-} g(t)+\lim_{t\to k+} g(t)=9$ 를 만족시키는 실수 k의 값은 오직 $k=-3$뿐이므로 조건을 만족시킨다.

$b>2$, $f\left(\frac{b+2}{2}\right)=-3$이므로

$$f\left(\frac{b+2}{2}\right)=-3 \Rightarrow a\left(\frac{b+2}{2}-2\right)\left(\frac{b+2}{2}-b\right)+9=-3$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{b-2}{2}\right)\left(\frac{-b+2}{2}\right)=-12 \Rightarrow a(b-2)^2=48$$

a는 자연수이고, b는 2보다 큰 자연수이므로 $a(b-2)^2=48$를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(48,\ 3)$, $(12,\ 4)$, $(3,\ 6)$이다.

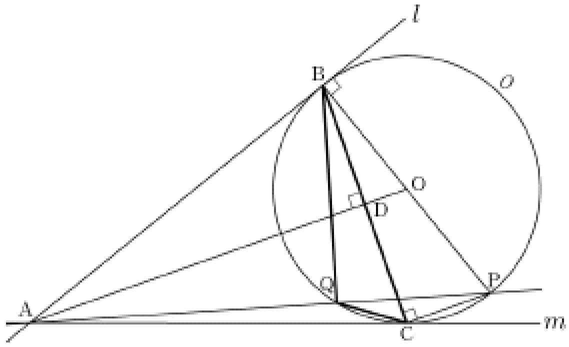
따라서 $a+b$의 최댓값은 $48+3=51$이다.

답 ①

11. ②

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

직선 l과 직선 BP가 서로 수직이므로
직선 BP는 원의 중심을 지나고, 선분 BP는
원 O의 지름이다. 원 O의 중심을 O,
선분 AO와 선분 BC가 만나는 점을 D라 하자.



$\overline{AO}^2=\overline{AB}^2+\overline{BO}^2=12^2+(3\sqrt{2})^2=162$

$\overline{AO}=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$

삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BO}$

$\frac{1}{2}\times 9\sqrt{2}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 12\times 3\sqrt{2}$

$\overline{BD}=4$

$\overline{BC}=2\times\overline{BD}=8$

원주각의 성질에 의하여

$\angle BPQ=\angle BCQ$, $\angle QPC=\angle QBC$

$\sin(\angle BCQ):\sin(\angle QBC)=3:1$

삼각형 BQC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin(\angle BCQ)}=\frac{\overline{QC}}{\sin(\angle QBC)}$$

$\overline{BQ}:\overline{QC}=3:1$

$\overline{QC}=k\ (k>0)$이라 하면, $\overline{BQ}=3k$

삼각형 BCP는

$\angle BCP=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\angle BPC=\theta$라 하면 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 BCP에서

$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{BP}}=\frac{8}{6\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$

사각형 BQCP 는 원 O 에 내접하므로
$\angle \mathrm{CQB} = \pi - \theta$ 이다.

$\cos(\angle \mathrm{CQB}) = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -\frac{1}{3}$

삼각형 BQC 에서 코사인법칙에 의하여

$8^2 = k^2 + (3k)^2 - 2 \times k \times 3k \times \left(-\frac{1}{3}\right)$

$k^2 = \frac{16}{3}$

따라서 삼각형 BQC 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BQ}} \times \overline{\mathrm{QC}} \times \sin(\angle \mathrm{CQB})$

$= \frac{1}{2} \times 3k \times k \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = k^2 \times \sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

12. 5

080

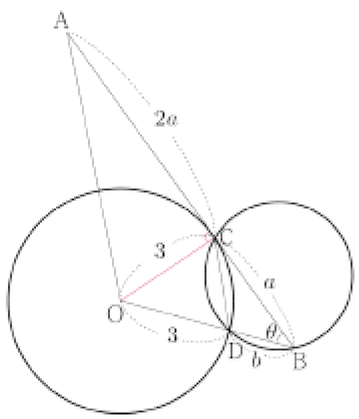
우선 원에 접한다고 했으니 보조선을 그어 보자.
(원의 중심과 접점을 이은 수직 보조선 !)

$\overline{\mathrm{CB}} = a$, $\overline{\mathrm{BD}} = b$ 라 하자.
$\overline{\mathrm{AC}} = 2\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = 2a$

$\angle \mathrm{DBC} = \theta$ 라 하면

$S_1 = \frac{1}{2} \times 3a \times (3+b) \times \sin\theta$

$S_2 = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin\theta$



$2S_1 = 15S_2$ 을 조건을 이용해보자.

$3a(3+b)\sin\theta = \frac{15}{2}ab\sin\theta \Rightarrow 6+2b = 5b \Rightarrow b = 2$

$b = 2$ 이므로 $\overline{\mathrm{BO}} = 5$ 이다.

삼각형 BOC 는 직각삼각형이므로
피타고라스의 정리에 의해서 $\overline{\mathrm{BC}} = 4$ 이다.

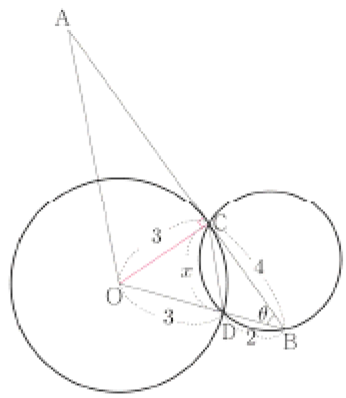
직각삼각형 OBC 을 이용하면 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 이므로
삼각형 BDC 의 외접원의 반지름은 사인법칙으로 구하면
되니까 선분 CD 의 길이만 찾으면 된다.

$\overline{\mathrm{CD}} = x$ 라 하면

"삼각함수 같다" Technique에 의해서
(삼각형 OBC 에서의 θ 와 삼각형 BCD 에서의 θ 는 서로 각이 같다.)
삼각형 BCD에서 코사인법칙을 사용하면

$\frac{4}{5} = \frac{2^2+4^2-x^2}{2 \times 2 \times 4}$

$\Rightarrow \frac{64}{5} = 20 - x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{5} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{5}}$



삼각형 BCD 의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면
사인법칙에 의해서

$\frac{x}{\sin\theta} = 2R \Rightarrow \frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{5}$

따라서 외접원의 넓이는 5π 이고, $k = 5$ 이다.

답 5

Tip

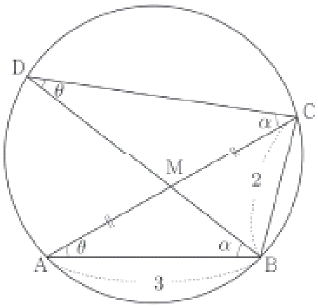
$\sin\theta$ 를 구할 때, 직각삼각형의 삼각비를 이용하여
"삼각함수 같다 technique"을 쓰는 유형은 최근 2025학년도 9월 모의고사 10번에서도 출제된 적이 있다. (55번)

13. ③

060

$\angle CAB=\theta$, $\angle ABD=\alpha$ 라 하자.

호 BC 에 대한 원주각의 크기가 같으므로
$\angle BAC=\angle BDC=\theta$ 이고,
호 AD 에 대한 원주각의 크기가 같으므로
$\angle ABD=\angle ACD=\alpha$ 이다.



$\overline{AC}=x$ $(x>3)$ 라 하자.
삼각형 ABC 에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos\theta=\frac{x^2+3^2-2^2}{2\times x\times 3} \Rightarrow \frac{7}{8}=\frac{x^2+5}{6x} \Rightarrow 4x^2+20=21x$$

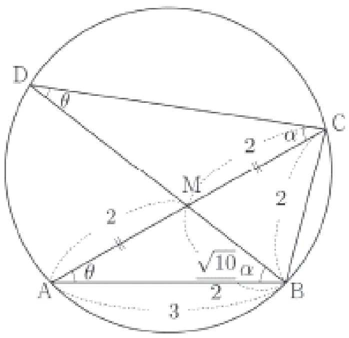
$$\Rightarrow 4x^2-21x+20=0 \Rightarrow (4x-5)(x-4)=0$$

$$\Rightarrow x=4 \ (\because x>3)$$

$\overline{MB}=y$ 라 하자.
삼각형 ABM 에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos\theta=\frac{2^2+3^2-y^2}{2\times 2\times 3} \Rightarrow \frac{7}{8}=\frac{13-y^2}{12} \Rightarrow 21=26-2y^2$$

$$\Rightarrow 2y^2=5 \Rightarrow y=\frac{\sqrt{10}}{2} \ (\because y>0)$$



삼각형 ABM 과 삼각형 DCM 은 서로 닮음이므로

$$\overline{MA}:\overline{MD}=\overline{MB}:\overline{MC} \Rightarrow 2:\overline{MD}=\frac{\sqrt{10}}{2}:2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{2}\overline{MD}=4 \Rightarrow \overline{MD}=4\times\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

따라서 선분 MD 의 길이는 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ 이다.

답 ③

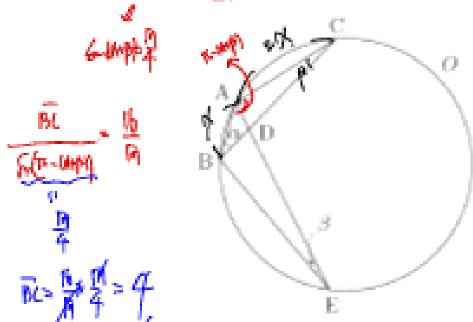
14. ③

홀수형 수학

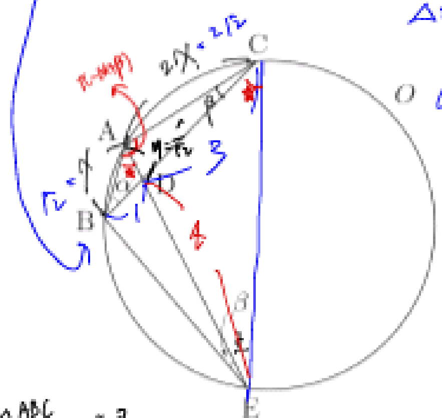
13. 그림과 같이 넓이가 $\frac{64}{7}\pi$인 원 O에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점을 D라 하고, 직선 AD가 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 하자. $\angle ABC=\alpha$, $\angle AEB=\beta$라 할 때, $2\sin\beta=\sin\alpha$이고, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}$이다. $\overline{AB}+\overline{AE}$의 값은? [4점]

$R=\frac{8}{\sqrt7}$

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$



① $\frac{7\sqrt2}{2}$ ② $4\sqrt2$ ③ $\frac{9\sqrt2}{2}$ ④ $5\sqrt2$ ⑤ $\frac{11\sqrt2}{2}$



$\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{CD}:\overline{DE}$

$\therefore \overline{AB}+\overline{AE}=\sqrt2+\left(\frac{\sqrt2}{2}+3\sqrt2\right)$
$=\sqrt2+\frac{7}{2}\sqrt2$
$=\frac{9}{2}\sqrt2$

5

15. ①

15. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 문제 해결하기

$$g(x)=\begin{cases} |x^2+ax+b|-x^2 & (x \le 0) \\ (x^2+ax+b)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하므로

조건 (가)에 의하여 $b \le 0$

(i) $b=0$인 경우

$f(x)=x^2+ax=x(x+a)$

$$g(x)=\begin{cases} |x(x+a)|-x^2 & (x \le 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

① $a>0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x \le -a) \\ -2x^2-ax & (-a<x\le 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x=-a$에서의 미분가능성을 조사하면

$$\lim_{x\to -a-}\frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$$

$$=\lim_{x\to -a-}\frac{ax-(-a^2)}{x+a}=a$$

$$\lim_{x\to -a+}\frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$$

$$=\lim_{x\to -a+}\frac{(-2x^2-ax)-(-a^2)}{x+a}$$

$$=\lim_{x\to -a+}\frac{-(2x-a)(x+a)}{x+a}=3a$$

$a>0$이므로 $a\ne 3a$

함수 $g(x)$는 $x=-a$에서 미분가능하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a=0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ x^4+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x=0$에서의 미분가능성을 조사하면

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{0-0}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^4+x^3-0}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $a<0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x \le 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=ax\ne 0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$인 경우

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 연속이다.

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$$

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=|b|=-b$$

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=b^2$$

$g(0)=|b|=-b$

이므로 $-b=b^2$

$b<0$이므로 $b=-1$이고, 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.

$$g(x)=\begin{cases} |x^2+ax-1|-x^2 & (x \le 0) \\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

방정식 $x^2+ax-1=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-1$이므로

$\alpha<0<\beta$

$$g(x)=\begin{cases} ax-1 & (x \le \alpha) \\ -2x^2-ax+1 & (\alpha<x\le 0) \\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{(-2x^2-ax+1)-1}{x}$$

$$=-a$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\{(x^2+ax-1)^2+x^3\}-1}{x}$$

$$=-2a$$

에서 $-a=-2a$, $a=0$

$$g(x)=\begin{cases} |x^2-1|-x^2 & (x \le 0) \\ (x^2-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

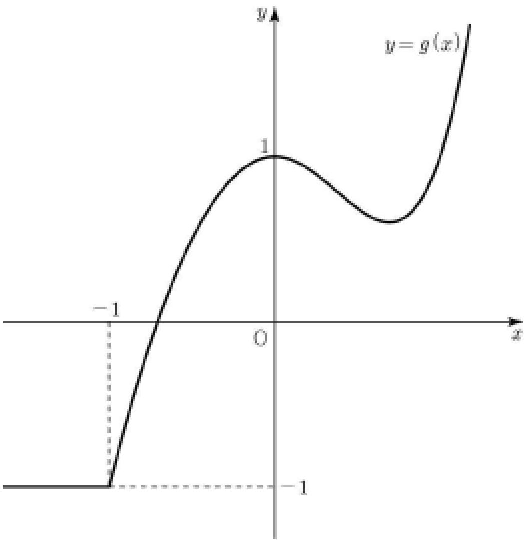
따라서 $g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)=\frac{1}{2}+91=\frac{183}{2}$

[참고]

$f(x)=x^2-1$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & (x \le -1) \\ -2x^2+1 & (-1<x\le 0) \\ x^4+x^3-2x^2+1 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



16. ③

151

$h(x) = \int_0^x tf'(t)\,dt$ 라 하면

$h(0) = 0,\ h'(x) = xf'(x),\ h'(0) = 0$

$g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$x = 0$에서 연속이어야 한다.

$(0-1)f(0) = h(0) = 0 \ \Rightarrow\ f(0) = 0$

$x = 0$에서 미분가능하므로
$f(0) + (0-1)f'(0) = h'(0) = 0 \ \Rightarrow\ f'(0) = 0$

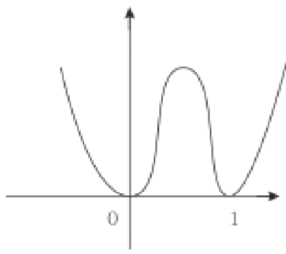
$f'(0) = f(0) = 0$
$f(x) = x^2(x-k)$

$f'(x) = 3x^2 - 2kx$ 이므로
$h'(x) = xf'(x) = 3x^3 - 2kx^2,\ h(0) = 0$

$\Rightarrow\ h(x) = \frac{3}{4}x^3\left(x - \frac{8}{9}k\right)$

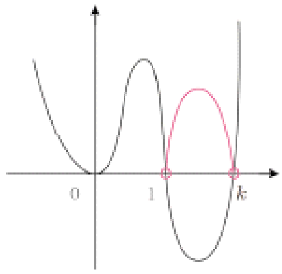
$(x-1)f(x) = x^2(x-1)(x-k),\ h(x) = \frac{3}{4}x^3\left(x - \frac{8}{9}k\right)$
를 그리려고 봤더니 k를 모르니까 같은 개형이 나오도록 하는 k에 따라 case 분류해보자.

① $k > 0$ 에서 $k = 1$



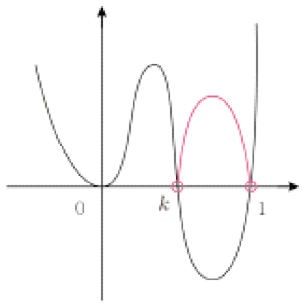
집합 S의 원소의 합이 -3X

② $k > 0$ 에서 $k > 1$



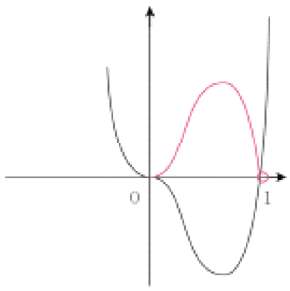
집합 S의 원소의 합이 -3X

③ $k > 0$ 에서 $0 < k < 1$



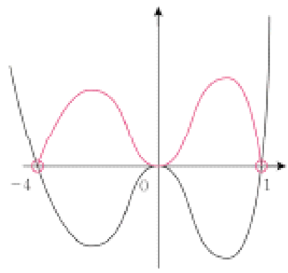
집합 S의 원소의 합이 -3X

④ $k = 0$



집합 S의 원소의 합이 -3X

⑤ $k < 0$



집합 S의 원소의 합이 -3이 되려면 $h(-4) = 0$ 를 만족해야 한다. 즉, $-4 = \frac{8}{9}k \Rightarrow k = -\frac{9}{2}$

이제 $g(x)$를 구하면

$$g(x) = \begin{cases} x^2(x-1)\left(x + \frac{9}{2}\right) & (x \geq 0) \\ \frac{3}{4}x^3(x+4) & (x < 0) \end{cases}$$

따라서 $\frac{g(4)}{g(-2)} = \frac{24 \times 17}{-12} = -34$ 이다.

답 ③

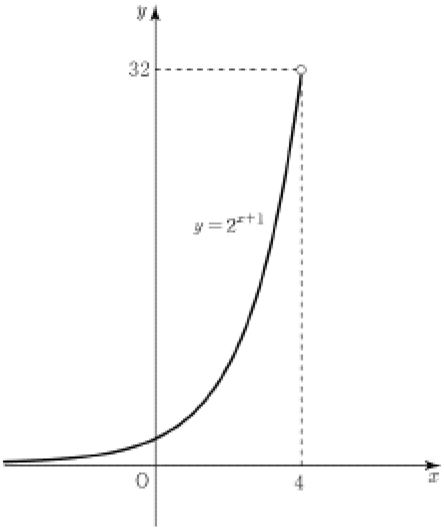
17. 24

20. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 추론하기

$$g(x)=\begin{cases}2^{x+1} & (x<4)\\ 2f(x) & (x>4)\end{cases}$$

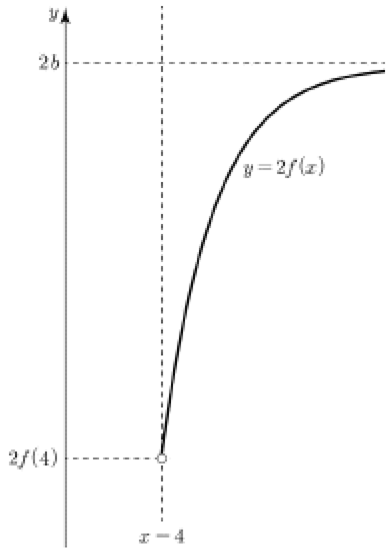
(i) $x<4$ 인 경우

함수 $y=2^{x+1}$ 의 그래프는
직선 $y=0$ 을 점근선으로 가지므로
함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과
같다.



(ii) $x>4$ 인 경우

함수 $y=2f(x)$ 의 그래프는
직선 $y=2b$ 를 점근선으로 가지므로
함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과
같다.

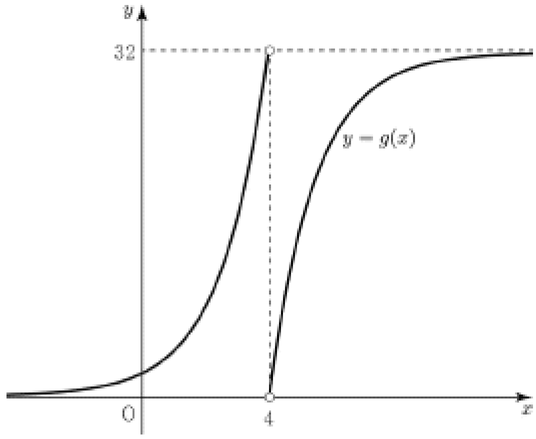


조건을 만족시키기 위해서는
$2b=32$, $b=16$
$2f(4)=-2^{a-3}+2b$
$=-2^{a-3}+32=0$
$2^{a-3}=2^5$, $a=8$

$$g(x)=\begin{cases}2^{x+1} & (x<4)\\ -2^{-x+9}+32 & (x>4)\end{cases}$$

따라서 $g(6)=-2^3+32=24$

[참고]
함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



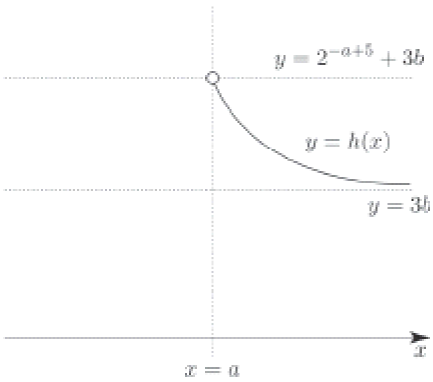
18. ①

119

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+3}+b & (x \le a) \\ 2^{-x+5}+3b & (x > a) \end{cases}$$

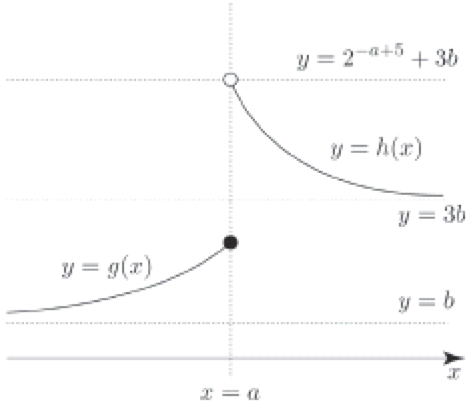
$g(x)=2^{x+3}+b$, $h(x)=2^{-x+5}+3b$라 하자.

$b>0$이므로 $y=h(x)$를 그리면 다음과 같다.



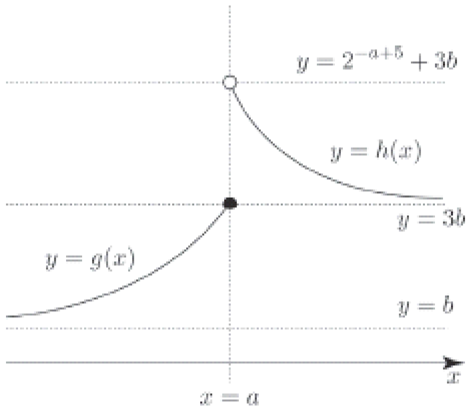
$g(a)=2^{a+3}+b$와 $3b$의 대소관계에 따라 case분류하면

① $2^{a+3}+b<3b$



$2^{a+3}+b<t<3b$인 모든 실수 t에 대하여
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점이
존재하지 않으므로 조건을 만족시키는 실수 k의
최댓값은 $4b+8$이 될 수 없다.

② $2^{a+3}+b=3b$



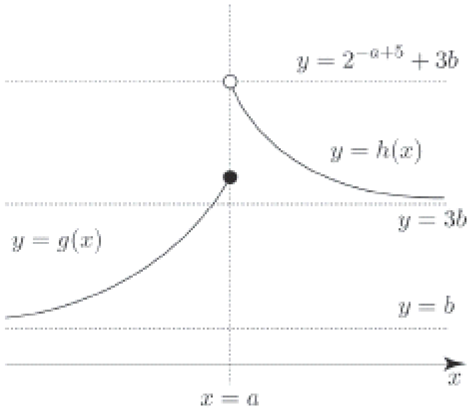
$b<t<2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 t에 대하여
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의
개수는 1이다.

조건을 만족시키는 k의 최댓값은 $4b+8$이므로
$2^{-a+5}+3b=4b+8$이다.

③ $2^{a+3}+b>3b$

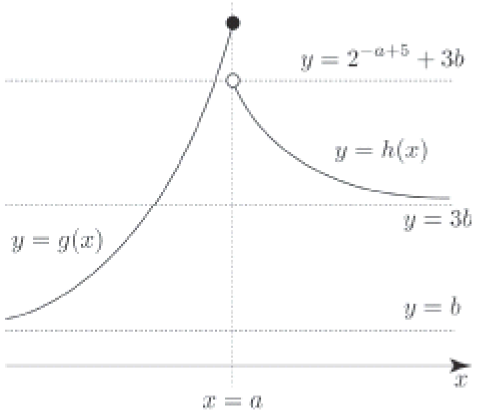
$g(a)$와 $h(a)$의 대소 관계에 따라 case분류하면

❶ $2^{a+3}+b \le 2^{-a+5}+3b$



$3b < t < 2^{a+3}+b$ 인 모든 실수 t에 대하여
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는
2이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은
$4b+8$이 될 수 없다.

❷ $2^{a+3}+b > 2^{-a+5}+3b$



$3b < t < 2^{-a+5}+3b$ 인 모든 실수 t에 대하여
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의
개수는 2이므로 조건을 만족시키는 실수 k의
최댓값은 $4b+8$이 될 수 없다.

①, ②, ③에 의하여
$2^{a+3}+b=3b,\ 2^{-a+5}+3b=4b+8$

$\Rightarrow 2^a-2^{-a+3}+2=0 \Rightarrow (2^a)^2+2\times 2^a-8=0$

$\Rightarrow (2^a+4)(2^a-2)=0 \Rightarrow 2^a=2\ (\because\ 2^a>0)$

$\Rightarrow a=1,\ b=8$

따라서 $a+b=9$이다.

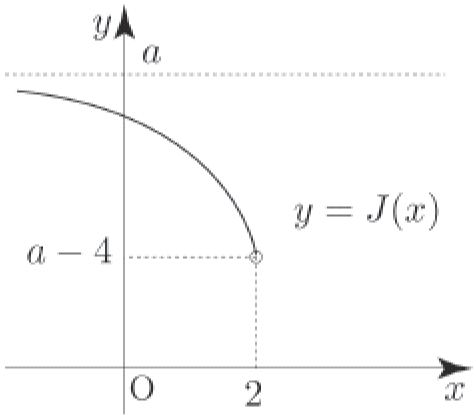
답 ①

19. 15

121

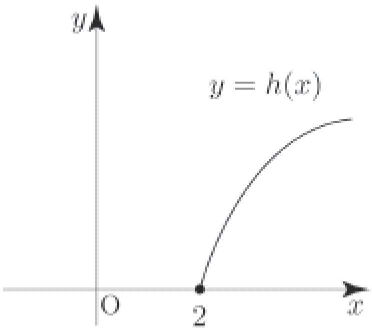
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-3}+a & (x<2) \\ |5\log_2 x-b| & (x\ge 2) \end{cases}$$

$J(x)=\dfrac{4}{x-3}+a$ 라 하고, $h(x)=|5\log_2 x-b|$ 라 하자.
$x<2$에서 $y=J(x)$는 감소하고 $g(2)=a-4$이다.
대략적으로 $y=J(x)$ $(x<2)$를 그리면 다음과 같다.

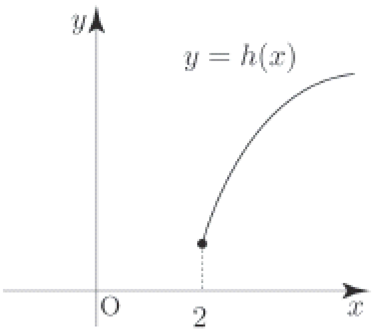


$y=5\log_2 x-b$에서 $x=2$를 대입하면 $5-b$이므로
b와 5의 대소관계에 따라 case분류하여
$y=h(x)$ $(x \geq 2)$를 그리면 다음과 같다.

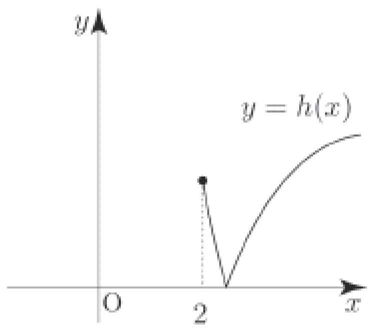
① $b=5$



② $b<5$



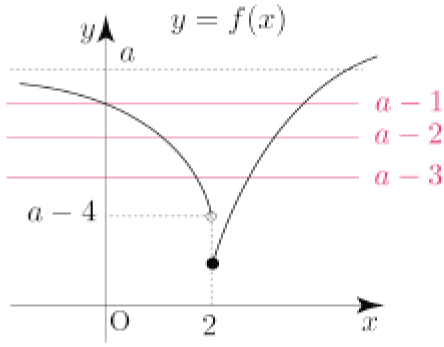
③ $b>5$



이제 $y=f(x)$와 $y=h(x)$를 동시에 고려해보자.

여기서 주목해야 할 점은 $y=f(x)$의 치역 중에서
자연수인 것은 $a-1$, $a-2$, $a-3$ 이렇게 3개만 가능하다는
점이다.

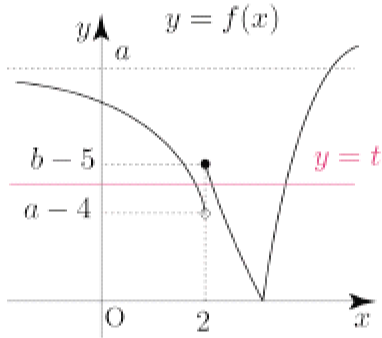
만약 $y=f(x)$와 ①, ②인 $y=h(x)$를 조합하면
$g(t)=2$를 만족시키는 자연수 t의 개수는 최대 3이므로
(나) 조건을 만족시킬 수 없다.



즉, $y=f(x)$와 ③ $y=h(x)$를 조합해야 함을 알 수 있다.

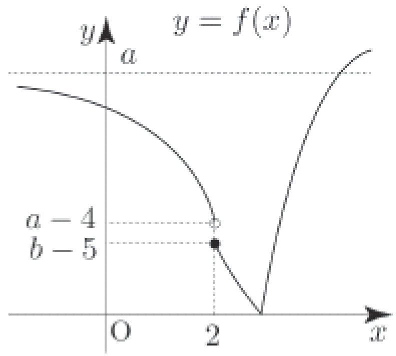
$b-5$와 $a-4$의 대소 관계에 따라 case분류하면

❶ $b-5>a-4$



$g(t)=3$인 t가 존재하므로 (가) 조건을 만족시키지 않는다.

❷ $b-5 \leq a-4$



$g(t)=2$인 자연수 t의 개수가 6이어야 하므로
$t=a-1$, $a-2$, $a-3$을 제외하고 $g(t)=2$를
만족시키는 자연수 t의 개수가 3개 더 있어야 한다.
즉, $b-5=3 \Rightarrow b=8$
이때 $b-5 \leq a-4 \Rightarrow 7 \leq a$

따라서 $a+b$의 최솟값은 $7+8=15$이다.

답 15

20. ②

15. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 상수의 값을 추론한다.

함수 $y=|2^x-4|$ 의 치역이 $\{y\,|\,y\geq 0\}$,
함수 $y=a+\log_2 x$ 의 치역이 실수 전체의 집합이고 함수 $f(x)$ 의 치역이 실수 전체의 집합이므로

$p\leq 0$ …… ㉠

$p<x<q$에서 $f(x)=a+\log_2 x$ 이고
함수 $f(x)$ 의 정의역이 실수 전체의 집합이므로

$p\geq 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $p=0$

$\{f(x)\,|\,x\leq 0\}=\{y\,|\,3\leq y<4\}$

함수 $f(x)$가 일대일대응이므로

$\{f(x)\,|\,x>0\}=\{y\,|\,y<3$ 또는 $y\geq 4\}$ 이고

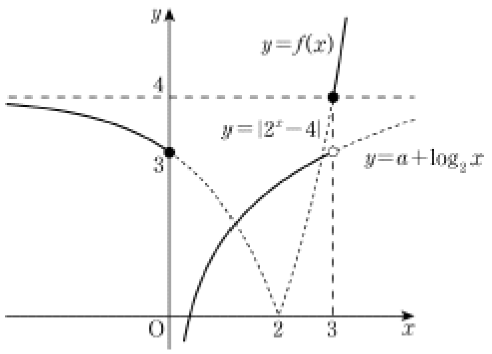
$\{f(x)\,|\,0<x<q\}=\{y\,|\,y<a+\log_2 q\}=\{y\,|\,y<3\}$,

$\{f(x)\,|\,x\geq q\}=\{y\,|\,y\geq 4\}$ 이다.

$|2^q-4|=4$ 에서 $q=3$

$a+\log_2 3=3$, $a=3-\log_2 3$

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=3-\log_2 3+\log_2 \frac{3}{2}$$
$$=3-\log_2 3+\log_2 3-1=2$$



21. 28

21. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f'(x)=-2x+k$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\,f(a))$ 에서의 접선의 방정식 $y=g(x)$ 는

$$g(x)=(-2a+k)(x-a)-a^2+ka$$
$$=(-2a+k)x+a^2$$

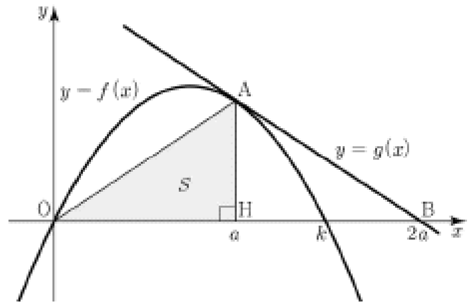
$0=(-2a+k)x+a^2$ 에서 $x=\dfrac{a^2}{2a-k}=b$

직선 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점을 B라 하자.

$\displaystyle\int_a^b g(x)dx=S$ 이므로 삼각형 BAH 의 넓이와 삼각형 AOH 의 넓이는 서로 같다.

점 H 의 좌표는 $(a,\,0)$ 이고 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{BH}}$ 이므로

$b=2a$



$\dfrac{a^2}{2a-k}=2a$ 에서 $k=\dfrac{3}{2}a$

$$\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx$$
$$=\int_0^a\left(-x^2+\frac{3}{2}ax-\frac{1}{2}ax\right)dx$$
$$=\int_0^a(-x^2+ax)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a$$
$$=\frac{a^3}{6}=\frac{32}{3}$$

$a=4$, $k=6$

$g(x)=-2x+16$

따라서 $g(-k)=g(-6)=12+16=28$

22. ⑤

088

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$
모든 실수 x에 대하여 $f'(-x) = -f'(x)$

$f'(x)$는 기함수이므로
$f'(x) = 4x^3 - ax$
$f'(1) = 0 \Rightarrow 4 - a = 0 \Rightarrow a = 4$

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$
$f(x) = x^4 - 2x^2 + C$

$f(1) = 2 \Rightarrow 1 - 2 + C = 2 \Rightarrow C = 3$
$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

ㄱ. $f'(-1) = 0$
$f'(-1) = -f'(1) = 0$이므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 모든 실수 k에 대하여
$\int_{-k}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{k} f(x)\,dx$ 이다.

$g(k) = \int_{0}^{k} f(x)dx$ 라 하면 (new 함수 Technique !)

$\int_{-k}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{-k} f(x)dx = -g(-k)$
모든 실수 k에 대하여 $g(-k) = -g(k)$을
만족시키려면 $g(k)$는 기함수이어야 한다.

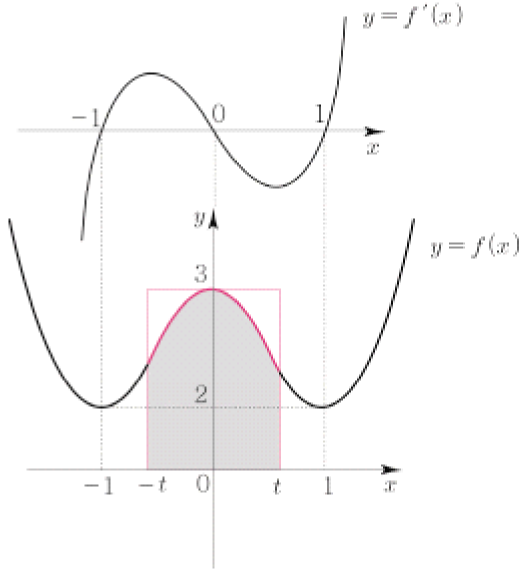
$g(k) = \int_{0}^{k} f(x)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x\right]_0^k$

$= \frac{1}{5}k^5 - \frac{2}{3}k^3 + 3k$
$g(k)$는 홀수차 항의 합으로 구성되어 있으므로
기함수이다.
따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $0 < t < 1$인 모든 실수 t에 대하여
$\int_{-t}^{t} f(x)\,dx < 6t$ 이다.

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$
$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
$f(0) = 3,\ f(1) = 2$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



세 직선 $x = -t,\ x = t,\ y = 3$과 x축으로 둘러싸인
직사각형의 넓이가 $6t$이고 $\int_{-t}^{t} f(x)dx$ 는 색칠한
영역의 넓이이므로 $0 < t < 1$인 모든 실수 t에 대하여
$\int_{-t}^{t} f(x)dx < 6t$ 이다.

따라서 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

Tip

<같은 속성끼리 비교>

$\int_{-t}^{t} f(x)dx < 6t$ 에서 좌변이 넓이를 나타내는
식이므로 $6t$도 넓이의 관점에서 생각하는 것이 자연스럽다.

예를 들어 $f(2) - f(1) < f'(1)$ 일 때,
우변이 기울기를 나타내는 식이므로
좌변도 기울기의 관점에서 생각해보면 아래와 같다.

$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} < f'(1)$

23. 76

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 문제 해결하기

a_n, a_{n+1}이 모두 홀수라 가정하면

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 a_{n+2}는 짝수이므로

연속하는 세 항 중 적어도 하나의 항은 짝수이다.

… (★)

(i) a_4가 짝수인 경우

$a_6=6=\frac{1}{2}a_4$, $a_4=12$

a_4가 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2, a_3, a_5는 홀수이다.

a_2, a_3이 홀수이므로 (★)에 의하여

a_1은 짝수이다.

$a_3=\frac{1}{2}a_1$

$a_5=a_4+a_3=12+\frac{1}{2}a_1$

$a_4=a_3+a_2=\frac{1}{2}a_1+a_2=12$

$a_2=12-\frac{1}{2}a_1$

a_2가 홀수이므로

$\frac{1}{2}a_1$은 11 이하의 홀수이다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	11	1	12	13	6
6	9	3	12	15	6
10	7	5	12	17	6
14	5	7	12	19	6
18	3	9	12	21	6
22	1	11	12	23	6

주어진 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값은

2, 6, 10, 14, 18, 22이다.

(ii) a_4가 홀수인 경우

$a_6=6=a_5+a_4$에서

a_4, a_5가 홀수이므로 (★)에 의하여

a_3은 짝수이다.

$a_5=\frac{1}{2}a_3$에서 $a_4=6-\frac{1}{2}a_3$

a_3이 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2는 홀수이다.

$a_4=a_3+a_2$에서

$6-\frac{1}{2}a_3=a_3+a_2$이므로 $a_3=4-\frac{2}{3}a_2$

a_3이 자연수이므로 $a_2=3$, $a_3=2$

a_1이 홀수이면 $a_3=a_2+a_1$

$2=3+a_1$이므로 a_1은 자연수가 아니다.

그러므로 a_1은 짝수이고

$a_3=\frac{1}{2}a_1$, $a_1=4$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
4	3	2	5	1	6

따라서 (i), (ii)에 의하여

모든 a_1의 값의 합은

$(2+6+10+14+18+22)+4=76$

24. ⑤

071

$a_7=40$이고, 조건 (나)를 이용하여 a_6를 구하기 위해

a_6를 3으로 나눈 나머지로 case분류하면 다음과 같다.

① $a_6=3k$

$a_6=3\times40=120$

$a_7=40$

$a_8=120+40=160$

$a_9=40+160=200$

② $a_6=3k+1$

$a_5=40-(3k+1)=39-3k$

$a_6=3k+1$

$a_7=40$

$a_8=3k+1+40=3k+41$

$a_9=40+3k+41=3k+81$

a_5는 3의 배수이므로

$a_6=\frac{1}{3}a_5\Rightarrow 3k+1=13-k\Rightarrow k=3$이다.

즉, $a_9=3k+81=9+81=90$이다.

③ $a_6=3k+2$

$a_5=40-(3k+2)=38-3k$

$a_4=3k+2-(38-3k)=6k-36$

$a_6=3k+2$

$a_7=40$

$a_8=3k+42$

$a_9=k+14$

a_4는 3의 배수이므로

$a_5=\frac{1}{3}a_4\Rightarrow 38-3k=2k-12\Rightarrow k=10$이다.

즉, $a_9=k+14=24$이다.

따라서 $M+m=200+24=224$이다.

답 ⑤