

1997학년도 대학수학능력시험 수리·탐구 영역 (I) 자연계 28번 해설

Minjun Kim
mikanebi0@yonsei.ac.kr mikane.net

July 7, 2025

Exercise 1. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 네 원소를 배열하여 만든 순열 (a_1, a_2, a_3, a_4) 에 대하여 각 숫자 a_k 의 오른쪽에 있는 수 중에서 a_k 보다 작은 것들의 개수를 $S_k (k = 1, 2, 3)$ 이라고 하고,
이들의 합 $s_1 + s_2 + s_3$ 을

$$|(a_1, a_2, a_3, a_4)|$$

로 나타내자. 예를 들면

$$\begin{aligned} |(2, 4, 3, 1)| &= s_1 + s_2 + s_3 \\ &= 1 + 2 + 1 = 4 \end{aligned}$$

이다. 집합 A 에 대한 24개의 모든 순열 (i_1, i_2, i_3, i_4) 마다 각각 정해지는 $|(i_1, i_2, i_3, i_4)|$ 의 총합을 구하여라.

Solution. 우리에게는 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 네 개의 칸이 주어져 있다.

$$(_, _, _, _)$$

순열 (i_1, i_2, i_3, i_4) 의 한 자리를 차지하는 숫자 $n (n = 1, 2, 3, 4)$ 으로 인해 발생하는 $s_k (k = 1, 2, 3)$ 의 값을 b_n 이라 하자. 그러면 다음의 사실을 어렵지 않게 알 수 있다.

Fact 1. b_{n+1} 의 값은 b_n 에 관계 없이 결정된다.

예를 들어, b_4 에 대해 고려하면, 다른 숫자와 관계 없이

- $b_4 = 0$ 인 경우

$$(_, _, _, \underline{4})$$

- $b_4 = 1$ 인 경우

$$(_, _, \underline{4}, _)$$

- $b_4 = 2$ 인 경우

$$(_, \underline{4}, _, _)$$

- $b_4 = 3$ 인 경우

$$(\underline{4}, _, _, _)$$

이며 이때 b_1, b_2, b_3 을 고려할 필요는 없다.

동일한 규칙을 b_3, b_2, b_1 에 적용할 수 있으므로, $f(n)$ 을

b_n 이 발생시키는 모든 $(b_n, b_{n-1}, \dots, b_1)$ 에 대하여 $b_n + b_{n-1} + \dots + b_1$ 의 값의 합으로 정의하고 $f(4)$ 의 값을 구하면 충분하다.

$$f(n) = (n-1)!(n-1+n-2+\dots+1+0) + nf(n-1) \quad (n=2,3,\dots)$$

이고, 여기서

$$\frac{f(n)}{n!} = \frac{n-1}{2} + \frac{f(n-1)}{(n-1)!} \implies \frac{f(n+1)}{(n+1)!} - \frac{f(n)}{n!} = \frac{n}{2} \quad (n=2,3,\dots)$$

따라서

$$\frac{f(n+1)}{(n+1)!} = \frac{n(n+1)}{4} \implies f(n+1) = (n+1)! \frac{n(n+1)}{4}$$

으로 일반화할 수 있으므로 $f(4) = 72$ 이다.

Exercise 2 (변형문제). 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 의 원소를 배열하여 만든 순열 $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{10})$ 에 대하여 각 숫자 a_k 의 오른쪽에 있는 수 중에서 a_k 보다 작은 것들의 개수를 S_k ($k = 1, 2, 3, \dots, 10$) 이라고 하고, 이들의 합 $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{10}$ 을

$$|(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{10})|$$

로 나타내자. 집합 A 에 대한 $10!$ 개의 모든 순열 $(i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_{10})$ 마다 각각 정해지는 $|(i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_{10})|$ 의 총합을 구하여라.

Solution. $f(10) = 81648100$.