김O수 미적분 모의고사
1회 해설지

1번	2번	3번	4번	5번
①	③	②	④	⑤
6번	**7번**	**8번**	**9번**	**10번**
②	③	①	①	⑤
11번	**12번**	**13번**	**14번**	**15번**
④	④	③	②	④
16번	**17번**	**18번**	**19번**	**20번**
6	31	48	11	132
21번	**22번**			
50	140			

23번	24번	25번	26번	27번
①	③	②	①	⑤
28번	**29번**	**30번**		
⑤	169	437		

2026학년도 김O수 미적분 모의고사 1회 해설지

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{-32}\times 2^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

$\sqrt[3]{-32}\times 2^{\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{2^5}\times 2^{\frac{1}{3}}=-2^{\frac{5}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=-4$

2. 함수 $f(x)=4x^3+2$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)=1$일 때, $F(2)$의 값은? [2점]

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

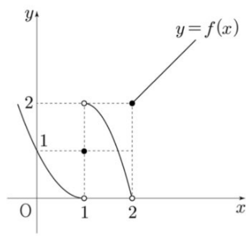
$f(x)=4x^3+2$의 한 부정적분을 $F(x)=x^4+2x+C$라 하면,
$F(0)=1$, $1=3+C$, $C=-2$이다.
$F(x)=x^4+2x-2$, $F(2)=2^4+2^2+1=21$

3. $\tan\frac{13\pi}{6}\times\sin\frac{7\pi}{6}$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\frac{13\pi}{6}\times\sin\frac{7\pi}{6}=\tan\frac{\pi}{6}\times\left\{-\sin\frac{\pi}{6}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f\left(\lim_{x\to 1+}f(x)\right)+\lim_{x\to 2-}f(x)$의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$\lim_{x\to 1+}f(x)=2$, $f\left(\lim_{x\to 1+}f(x)\right)=f(2)=2$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=0$

구하는 답은 $f\left(\lim_{x\to 1+}f(x)\right)+\lim_{x\to 2-}f(x)=2$이다.

5. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5^2 - a_2^2 = 36$ 일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

$a_5 - a_2 = 3\times2 = 6$,

$a_5^2 - a_2^2 = (a_5 + a_2)(a_5 - a_2) = (a_5 + a_2)\times 6 = 36$에서

$a_2 + a_5 = 6$이다.

$a_5 - a_2 = 6$, $a_2 + a_5 = 6$에서 $a_5 = 6$이므로

$a_{10} = a_5 + 5\times2 = 6 + 10 = 16$

6. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 이차방정식 $15x^2 + ax + 12 = 0$의 두 근이 $\tan\theta$, $\cos\theta$일 때, a의 값은? [3점]

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

이차방정식 $15x^2 + ax + 12 = 0$의 두 실근의 곱은

$\tan\theta\times\cos\theta = \frac{4}{5}$에서 $\sin\theta = \frac{4}{5}$이고, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$이므로

$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\frac{3}{5}$, $\tan\theta = -\frac{4}{3}$

두 실근의 합은 $-\frac{4}{3} + \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{29}{15} = -\frac{a}{15}$이므로

$a = 29$이다.

7. 원점에서 곡선 $y = 2x^3 - x + 4$에 그은 접선이 이 곡선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① $6\sqrt{6}$ ② 15 ③ $3\sqrt{26}$
④ $9\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{7}$

$f(x) = 2x^3 - x + 4$라 하고 접점의 좌표를 $(\alpha, f(\alpha))$라 하면

$f(\alpha) = f'(\alpha)\times(\alpha - 0) + 0$, $2\alpha^3 - \alpha + 4 = (6\alpha^2 - 1)\times\alpha$, $\alpha = 1$이다.

접점의 좌표가 A든 B든 일반성을 잃지 않으므로

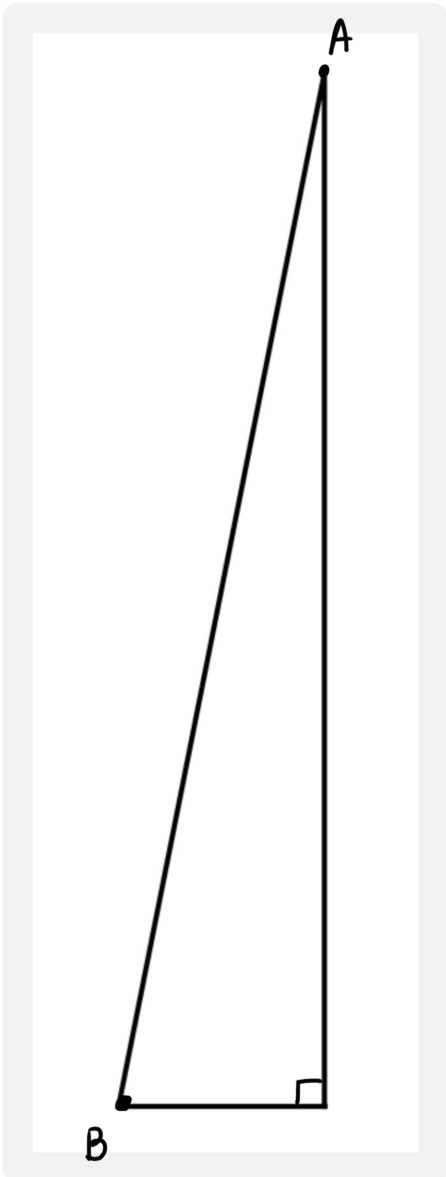
$A(1, 5)$라 하자.

접선의 방정식은 $y = 5x$이고

$2x^3 - x + 4 = 5x$, $2x^3 - 6x + 4 = 0$, $2(x-1)^2(x+2) = 0$에서

$B(-2, -10)$이다.

$\overline{AB} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (5-(-10))^2} = 3\sqrt{26}$이다.



A와 B의 X좌표 차이 : 3

$3\times\sqrt{1^2+5^2} = 3\sqrt{26}$ ..

8. 함수 $f(x)=-x^2+4x$에 대하여 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같을 때, 함수 $(x-b)f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

함수 $f(x)=-x^2+4x$에 대하여 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=2$이고 $f'(a)=-2a+4$이므로 $a=1$이다.

$g(x)=(x-b)(-x^2+4x)=-x^3+(b+4)x^2-4bx$에 대하여 $g'(1)=0$이므로 $-3+2(b+4)-4b=0$에서 $b=\frac{5}{2}$이다.

$a+b=\frac{7}{2}$

9. 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

(가) : $\log_3 c=\log_b a$, $(\log_3 a)\times(\log_3 b)\times(\log_3 c)=9$
(나) : $\log_3 bc=2$

① $\frac{739}{27}$ ② $\frac{740}{27}$ ③ $\frac{247}{9}$
④ $\frac{742}{27}$ ⑤ $\frac{743}{27}$

$\log_3 a=A$, $\log_3 b=B$, $\log_3 c=C$라 하면,

(가)에서 $C=\frac{A}{B}$, $ABC=9$이므로 $A=\pm3$이다.$(BC=\pm3)$

(나)에서 $B+C=2$인데 $BC=3$이면 $x^2-2x+3=0$의 해가 존재하지 않으므로 B와 C가 존재하지 않는다.
따라서 $BC=-3$이고 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$에서 $B=-1$, $C=3$ 또는 $B=3$, $C=-1$이다.
어떤 경우든 $b+c=3^3+3^{-1}=\frac{82}{3}$로 같다.

$a+b+c=3^{-3}+\frac{82}{3}=\frac{739}{27}$

10. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{-2}^{x}(x^2-t^2)f(t)dt$$

가 역함수를 가질 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

$g(x)=\int_{-2}^{x}(x^2-t^2)f(t)dt=x^2\int_{-2}^{x}f(t)dt-\int_{-2}^{x}t^2f(t)dt$에서
$g'(x)=2x\int_{-2}^{x}f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_{-2}^{x}f(t)dt$이다.

$g'(x)$의 부호변화가 있으면 $g(x)$가 역함수를 가질수 없다.
따라서 부호변화가 존재해서는 안되는데 $g'(0)=g'(-2)=0$이고 $\int_{-2}^{x}f(t)dt$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이므로
$2x\int_{-2}^{x}f(t)dt=\frac{2}{3}x^2(x+2)^2$이다.

$\int_{-2}^{x}f(t)dt=\frac{1}{3}x(x+2)^2$이고 $f(x)=x^2+\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}$이므로
$f(1)=5$이다.

11. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{4} a_n = 20, \quad \sum_{n=1}^{3} n(a_{n+1}-a_n) = -24$$

일 때, $\sum_{n=1}^{6} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{176}{9}$　② $\frac{178}{9}$　③ 20　④ $\frac{182}{9}$　⑤ $\frac{184}{9}$

$\sum_{n=1}^{4} a_n = 20$에서 $(a_1+a_2+a_3)+a_4=20$,

$\sum_{n=1}^{3} n(a_{n+1}-a_n) = (a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+3(a_4-a_3)$

$= -(a_1+a_2+a_3)+3a_4 = -24$

$\therefore\ a_1+a_2+a_3=21,\ a_4=-1$

공비를 r이라 하면 $-\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}=21$에서

$21r^3+r^2+r+1=0$이다.

$21r^3+r^2+r+1=(3r+1)(7r^2-2r+1)=0$이므로

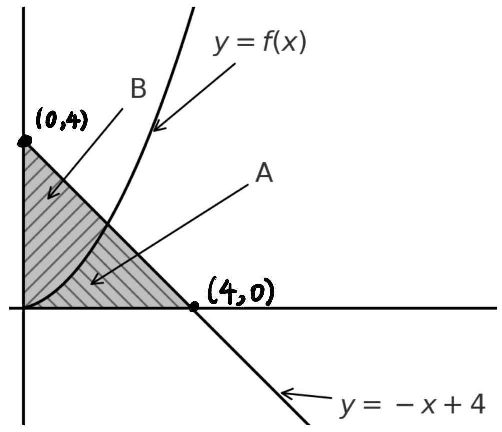
$r=-\frac{1}{3}$이다.

$$\sum_{n=1}^{6} a_n = (a_1+a_2+a_3)(1+r^3) = 21\times\left(1-\frac{1}{27}\right) = \frac{21\times 26}{27} = \frac{182}{9}$$

12. 상수 $a\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$에 대하여 함수

$$f(x)=ax^2-(2a-1)x \ (x \geq 0)$$

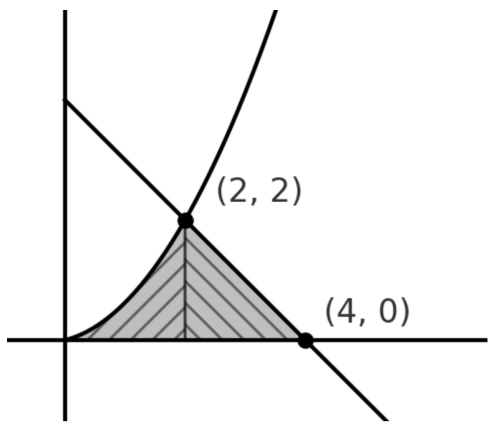
가 있다. 곡선 $y=f(x)$의 그래프과 직선 $y=-x+4$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+4$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $3B-A=10$이다. a의 값은? [4점]



① $\frac{3}{16}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{5}{16}$　④ $\frac{3}{8}$　⑤ $\frac{7}{16}$

위 그림을 보면 알 수 있듯이 영역 A와 영역 B를 합치면 직각이등변삼각형이 된다. $\therefore\ A+B=\frac{4\times4}{2}=8$

$3B-A=10$이므로 연립하면 $A=\frac{7}{2}$, $B=\frac{9}{2}$이다.



왼쪽 부분의 넓이와 오른쪽 부분의 넓이의 합이 $A=\frac{7}{2}$이고, 오른쪽 부분은 한 변의 길이가 2인 직각이등변삼각형이므로 ($f(x)$는 a의 값에 상관없이 (2, 2)를 지난다.)

왼쪽 부분의 넓이는 $\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{3}{2}$이다.

왼쪽 부분의 넓이를 다음과 같이 표현할 수 있다.

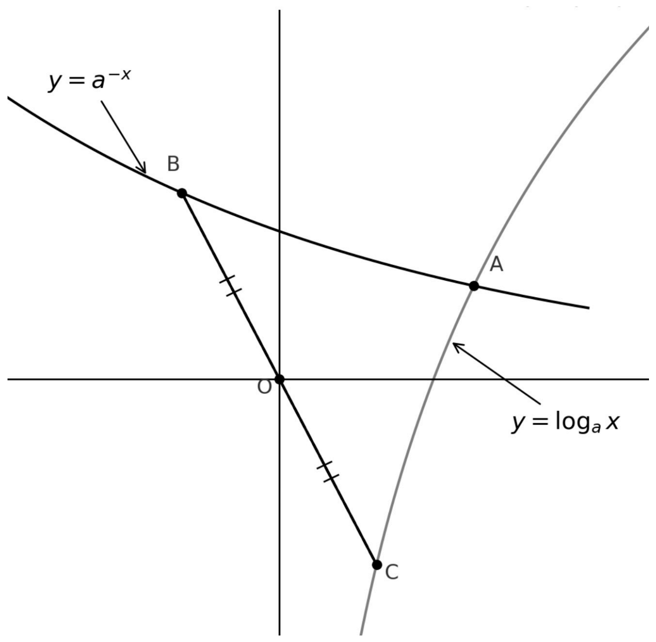
$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \{ax^2-(2a-1)x\}dx = \left[\frac{a}{3}x^3-\frac{(2a-1)}{2}x^2\right]_0^2 = 2-\frac{4}{3}a$$

정리하면 $\frac{3}{2}=2-\frac{4}{3}a$이므로 $a=\frac{3}{8}$이다.

13. 그림과 같이 1보다 큰 상수 a에 대하여 두 곡선

$$y=a^{-x},\ y=\log_a x$$

가 점 A에서 만난다. 곡선 $y=a^{-x}$ 위의 점 B, 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점 C에 대하여 선분 BC의 중점은 원점 O이고, 직선 AC의 기울기는 3이다. 점 A의 y좌표를 k라 할 때, $2k\times\log_2 a$의 값은? [4점]



① $\dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{3}$　　② $\dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{3}$　　③ $\dfrac{2}{3}$

④ $\dfrac{2^{\frac{4}{3}}}{3}$　　⑤ $\dfrac{2^{\frac{5}{3}}}{3}$

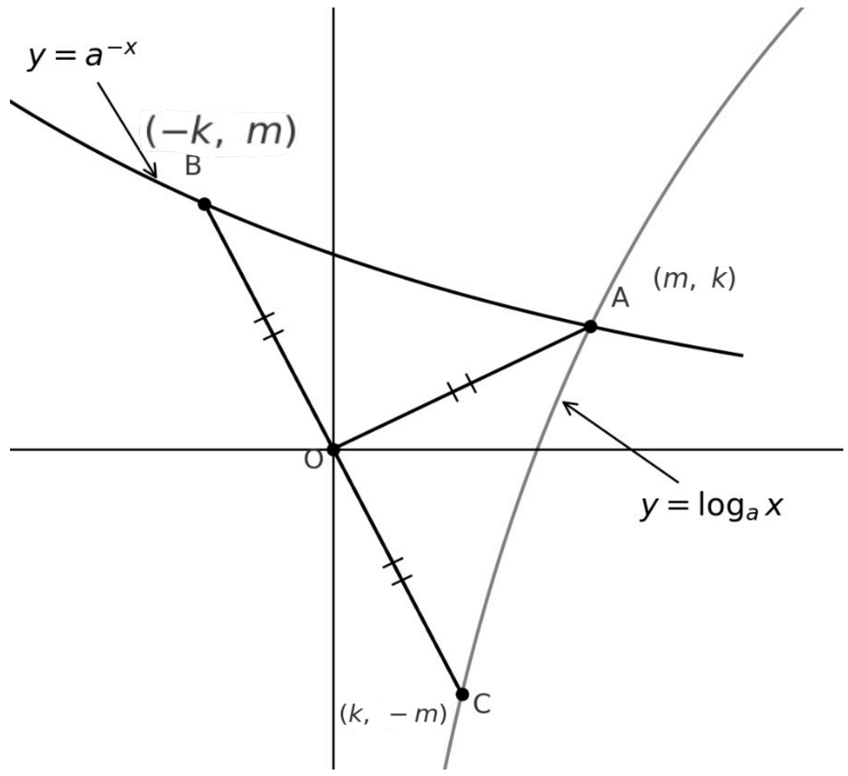
점 B의 좌표를 $(-t,\ a^t)$라 하자. 점 C는 점 B를 원점 O에 대하여 대칭이동 시킨 것이므로 점 C의 좌표는 $(t,\ -a^t)$이다.

$(t,\ -a^t)$가 곡선 $y=\log_a x$위의 점이므로 $a^t+\log_a t=0$이다.

점 A의 좌표를 $(m,\ k)$이라 하면, 점 A는 두 곡선 $y=a^{-x}$, $y=\log_a x$ 위의 점이므로 $a^{-m}=\log_a m=k$이다.
$a^k=m$, $-m=\log_a k$이므로 $a^k+\log_a k=0$이다.

함수 $a^x+\log_a x$는 증가함수이므로 $a^t+\log_a t=0$, $a^k+\log_a k=0$에서 $t=k$임을 알 수 있다.

삼각형 ABC는 빗변이 선분 BC인 직각이등변삼각형이다.



직선 AC의 기울기가 3이므로 $\dfrac{k-(-m)}{m-k}=3$에서
$a^k=2k$임을 알 수 있다. $(m=a^k)$

$a^k=2k$, $\log_a k=-2k$이므로 $a^k=2k$, $a^{-2k}=k$이다.

$(a^{-k})^2\times a^{2k}=4k^3=1$에서 $k=2^{-\frac{2}{3}}$이다.

$a^k=2k$를 이용하면 문제에서 구하는 답인 $2k\times\log_2 a$는 $2\log_2 2k$와 같다. $2\log_2 2k=2\log_2 2^{\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3}$이다.

*** a의 값은 구할 필요가 없다.
로그와 지수의 성질을 이용하여 계산을 간단히 하도록 하자.***

14. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

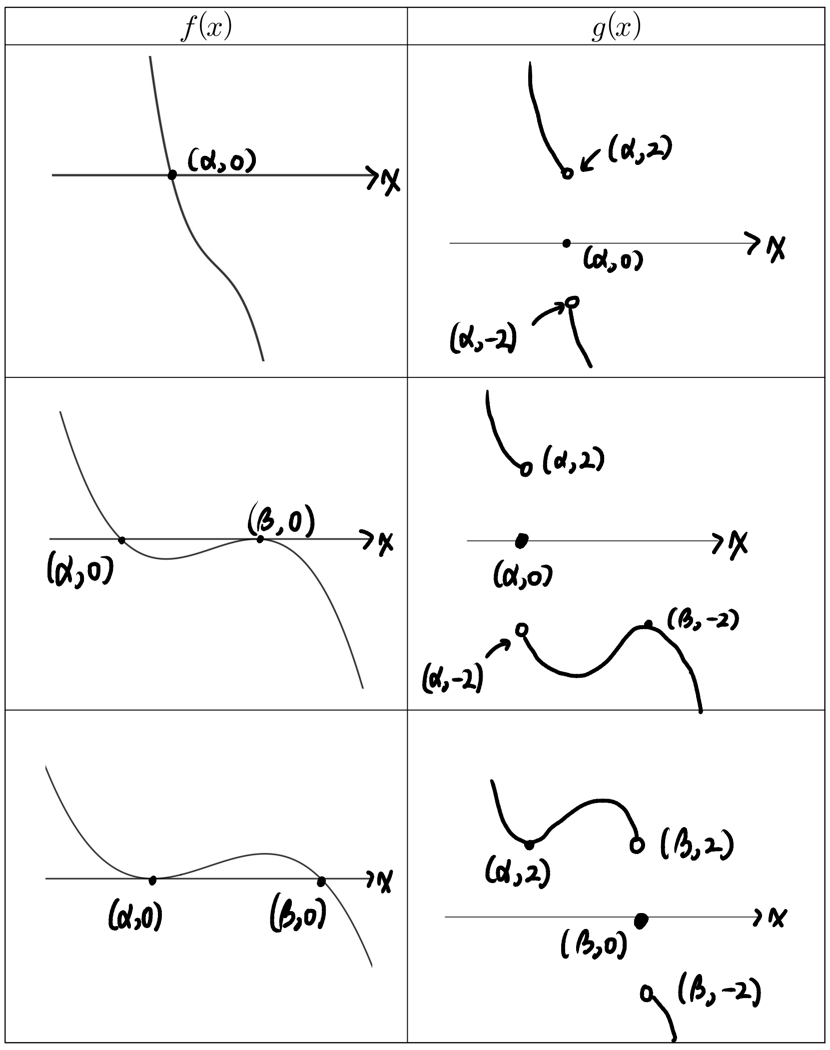
$$g(x)=f(x)+\lim_{t\to x+}\frac{f(t)}{|f(t)|}+\lim_{t\to x-}\frac{f(t)}{|f(t)|}$$

이다. 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-1)-g(5)$의 값은? [4점]

(가) : $g(0)+\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=g(2)-\lim\limits_{x\to 2+}g(x)$
(나) : $g(1)=7$

① 125　② 126　③ 127　④ 128　⑤ 129

1) 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수가 2이하일 때 조건을 만족시킬 수 없다.



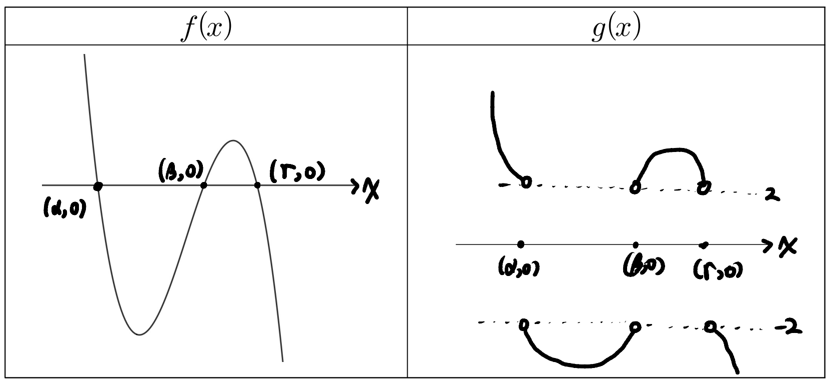
위의 그림과 같이 $f(x)$가 단조 감소하거나 극값 0을 가진다고 해보자. (극값 0을 가지는 상황과 극댓값과 극솟값의 부호가 같은 경우에도 유사하게 그려진다.)

이 경우 조건 (가)에 모순이다.

$\alpha\neq 2$이면 $g(2)-\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=0$이다. 그런데 $g(t)+\lim\limits_{x\to t+}g(x)=0$을 만족하는 실수 t의 값은 존재하지 않으므로 모순이다.

$\alpha=2$이면 $g(2)-\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=2$이다. 그런데 $t<2=\alpha$일 때, $g(t)+\lim\limits_{x\to t+}g(x)$의 값은 4보다 크므로 모순이다.

2) 따라서 $f(x)$는 극값을 가지고 x축과의 교점의 개수가 3이다. 아래 그림과 같다.



(나)에서 $1<\alpha$이면 $g(0)+\lim\limits_{x\to 0+}g(x)$의 값은 14보다 크다.

그런데 $g(2)-\lim\limits_{x\to 2+}g(x)$로 가능한 값은 0 , -2, 2이므로 모순이다.

따라서 $\beta<1<\gamma$이다.

$\gamma\neq 2$이면 $g(2)-\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=0$이다.

그런데 $g(t)+\lim\limits_{x\to t+}g(x)=0$을 만족하는 실수 t의 값은 존재하지 않으므로 모순이다. 따라서 $\gamma=2$이다. $g(2)-\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=2$

$\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$이면

$g(0)+\lim\limits_{x\to 0+}g(x)$의 값은 4보다 크거나 -4보다 작으므로 모순이다.

$\alpha=0$이면 $g(0)+\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=-2$이므로 (가)조건에 위배된다.

따라서 $\beta=0$이고 이때 $g(0)+\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=2$가 되어 성립한다.

함수 $f(x)=-(x-\alpha)x(x-2)$ $(\alpha<0)$이고, $g(1)=7$이므로 $f(1)=5$이다.

계산하면 $\alpha=-4$, $g(-1)=-2+f(-1)$이고, $g(5)=-2+f(5)$이다.

구하는 답은 $g(-1)-g(5)=f(-1)-f(5)=-9-(-135)$

$=126$이다.

15. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = n$$

이다. $a_3 = a_m$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합이 21일 때, $a_1 \times a_2$의 최솟값은? [4점]

① -3　② -4　③ -5　④ -6　⑤ -7

$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = n$에서
$a_1 + a_2 + a_3 = 1$이고 $a_{n+3} = a_n + 1$임을 알 수 있다.

$a_{3k} = a_3 + (k-1)$, $a_{3k-1} = a_2 + (k-1)$, $a_{3k-2} = a_1 + (k-1)$
(k는 자연수)

$a_3 = a_m$를 만족하는 m을 찾아보자.

$m = 3k_3$일 때 $k_3 = 1$, 즉 $m = 3$인 경우밖에 없다.

$m = 3k-1$꼴일 때 성립하지 않는다면 $m = 3k-2$꼴일 때 성립해서 자연수 m의 값의 합이 21이 되어야 하지만, $3 + (3k-2) = 21$을 만족하는 자연수 k는 없다.

$m = 3k_1 - 1$일 때 성립하고 $m = 3k_2 - 2$일 때도 성립하여 둘의 합이 18, 즉 3의 배수가 되면 된다.

$a_3 = a_m$을 만족하는 자연수 m은 모두
3, $3k_1 - 1$, $3k_2 - 2$이고, $k_1 + k_2 = 7$이다.

$a_{3k_1 - 1} = a_3$에서 $a_2 = a_3 - (k_1 - 1)$이고
$a_{3k_2 - 2} = a_3$에서 $a_1 = a_3 - (k_2 - 1)$이다.

$a_1 + a_2 + a_3 = 1$,
$a_3 - (k_1 - 1) + a_3 - (k_2 - 1) + a_3 = 1$ $\therefore$ $a_3 = 2$ $(k_1 + k_2 = 7)$

$a_1 \times a_2 = (3 - k_1)(3 - k_2) = k_1 k_2 - 18$ $(k_1 + k_2 = 7)$

$k_1 = 3$, $k_2 = 4$ 또는 $k_1 = 4$, $k_2 = 3$일 때 최소이므로
구하는 답은 $12 - 18 = -6$이다.

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x-3) = \log_4(x+3)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

우선 진수 조건에 의해 $x > 3$이다.

로그 공식에 의해 $\log_2(x-3) = \log_{2^2}(x-3)^2 = \log_4(x^2 - 6x + 9)$이고
$x^2 - 6x + 9 = x + 3$, $x^2 - 7x + 6 = 0$, $x = 6$이다.

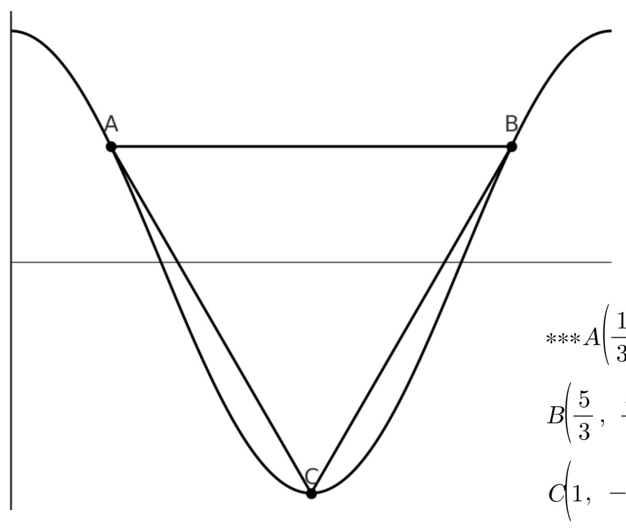
답은 6이다.

17. 함수 $f(x) = x^4 - x^2 + 3x$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = x^4 - x^2 + 3x$에서 $f'(x) = 4x^3 - 2x + 3$이고
$f'(2) = 4 \times (2)^3 - 2 \times 2 + 3 = 31$

18. 곡선 $y=a\cos\pi x(0\le x\le 2)$ 위에 세 점 A, B, C가 있다. 직선 AB가 x축과 평행하고, 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $\frac{4}{3}$인 정삼각형이다. 상수 $a(a>0)$에 대하여 $81a^2$의 값을 구하시오. [3점]

직선 AB가 x축과 평행하므로 점 A와 점 B의 y좌표가 같으므로 점 A와 점 B의 x좌표의 합이 2이고, $\overline{AB}=\frac{4}{3}$이므로 $A\left(\frac{1}{3},\ \frac{a}{2}\right)$, $B\left(\frac{5}{3},\ \frac{a}{2}\right)$이다. $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 점 C의 좌표는 $(1,\ -a)$이다. (점 A, 점 C의 x좌표 차이가 점 B, 점 C의 x좌표 차이와 같다.)



$A\left(\frac{1}{3},\ \frac{4\sqrt{3}}{18}\right)$, $B\left(\frac{5}{3},\ \frac{4\sqrt{3}}{18}\right)$, $C\left(1,\ -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$

정삼각형의 한변의 길이가 $\frac{4}{3}$이므로 정삼각형의 높이는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다. 따라서 $a=\frac{4\sqrt{3}}{9}$이고 답은 $81\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^2=48$이다.

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 가속도 $a(t)$가 $a(t)=4t^2-4t$이다. 점 P가 출발한 후 운동 방향이 바뀌지 않을 때, 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리의 최솟값을 구하시오. [3점]

$a(t)=4t^2-4t$이므로 시간 t에 따른 점 P의 속도 $v(t)$는 $v(t)=\frac{4t^3}{3}-2t^2+v(0)$이다. $t\ge 0$에서 $v(t)\ge 0$이어야 하므로 $v(0)\ge\frac{2}{3}$이다.

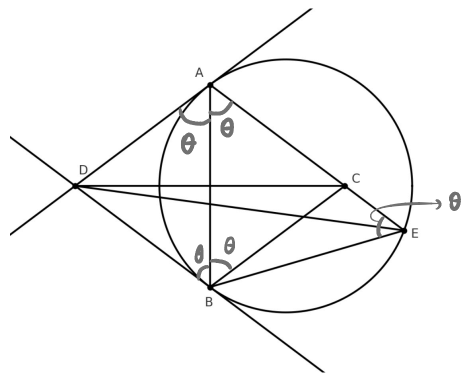
시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|v(t)|dt=\int_0^3 v(t)dt=\left[\frac{t^4}{3}-\frac{2t^3}{3}+v(0)t\right]_0^3=3v(0)+9\text{이다.}$$

$3v(0)+9\ge 11$이므로 구하는 최솟값은 11이다.

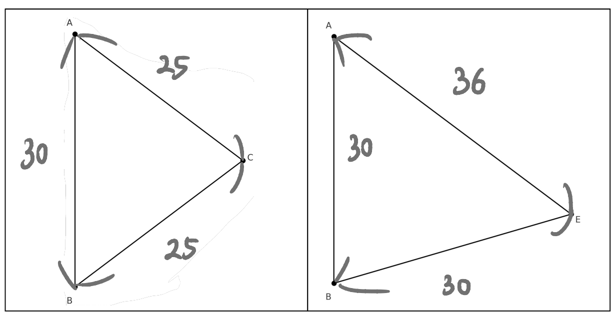
20. 그림과 같이 두 점 A, B를 지나는 반지름의 길이가 $\frac{75}{4}$인 원 O의 내부에 점 C가 있고, 점 C를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점 D가 있다. 직선 AD와 직선 BD가 원 O와 각각 점 A, B에서 접하고 $\overline{AB}=30$이다. 직선 AC가 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 구하시오. [4점]

$\angle BAD=\theta$라 하면 다음 그림과 같이 표현할 수 있다.
(접현각 : $\angle BAD=\angle ABD=\angle AEB$)



$\angle AEB=\theta$에서 사인법칙을 이용하면 $2\times\frac{75}{4}\times\sin\theta=30$이므로 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$이다.

삼각형 ABC에서 $\angle ABC=\angle BAC$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, 코사인 법칙에 의해 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\theta$, 계산하면 $\overline{AC}=\overline{BC}=25$이고



$\angle BAC=\angle EAB=\theta$는 공통이고, $\angle ABC=\angle AEB=\theta$이므로 삼각형 BAC와 삼각형 EAB는 닮음이다.
$\therefore\ \overline{AE}=36,\ \overline{CE}=36-25=11$

사각형 $ADBC$는 마름모이므로 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$, $\angle ACD=\frac{\pi}{2}-\theta$, $\overline{CD}=2\times\sqrt{25^2-15^2}=40$이다.

$\sin(\angle DCE)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$이므로

구하는 답은

$\frac{1}{2}\times\sin(\angle DCE)\times\overline{CD}\times\overline{CE}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times 40\times 11=132$이다.

21. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq x^2) \\ ax+b & (f(x)<x^2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $h(t)=\lim\limits_{x\to t}g(x)$가 있다.
두 함수 $g(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) : 함수 $h(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) : $h(2)-g(2)=4$

$f(-2)=4$, $f(0)=-4$일 때, $4\times\{h(b)-f(a)\}$의 값을 구하시오. [4점]

만약 $f(x)-x^2=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(k\neq 0,\ \alpha<\beta<\gamma)$라면,

(가)에 의해 모든 실수 t에 대하여 $\lim\limits_{x\to t}g(x)$의 값이 존재해야 한다.

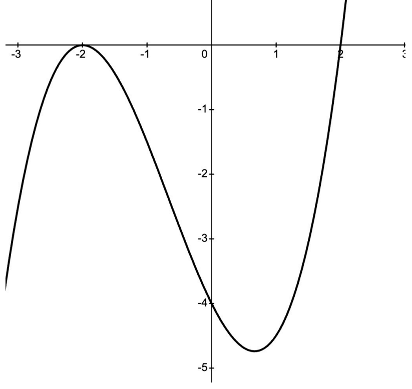
$\lim\limits_{x\to\alpha+}g(x)=\lim\limits_{x\to\alpha-}g(x)$, $\lim\limits_{x\to\beta+}g(x)=\lim\limits_{x\to\beta-}g(x)$, $\lim\limits_{x\to\gamma+}g(x)=\lim\limits_{x\to\gamma-}g(x)$

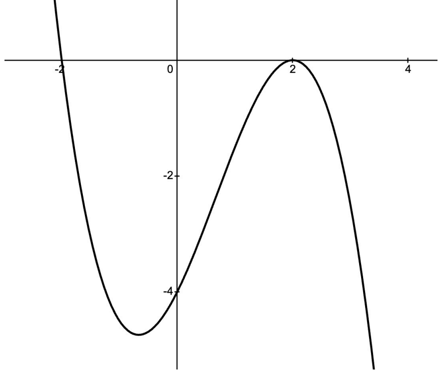
$f(\alpha)=\alpha^2=a\alpha+b$, $f(\beta)=\beta^2=a\beta+b$, $f(\gamma)=\gamma^2=a\gamma+b$에서
방정식 $x^2=ax+b$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 될 수 없으므로 모순이다.

$f(-2)=4$이고 (나)에 의해 $g(2)\neq\lim\limits_{x\to 2}g(x)$이므로 $f(2)=4$이다.

$\therefore$ $f(x)-x^2=k(x+2)^2(x-2)$ 또는 $f(x)-x^2=k(x+2)(x-2)^2$ $(k\neq 0)$

$f(0)-0^2=-4<0$이므로 $y=f(x)-x^2$의 개형은
다음 두 가지다.





왼쪽 그림의 경우,
$x\geq 2$, $g(x)=f(x)$이고, $-2<x<2$, $g(x)=ax+b$이다.
(가)에 의해 $f(2)=2a+b$이고 이 경우
$h(2)-g(2)=4-4=0$이므로 모순이다.

따라서 오른쪽 그림의 경우이다.
$f(x)-x^2=k(x+2)(x-2)^2$에서 $f(0)=-4$이므로
$f(x)=x^2-\dfrac{(x+2)(x-2)^2}{2}$이다.

$g(2)=f(2)=4$, $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=\lim\limits_{x\to 2}(ax+b)=2a+b$ 이므로
$h(2)-g(2)=\lim\limits_{x\to 2}g(x)-g(2)=(2a+b)-4=4$에서
$2a+b=8$임을 알 수 있다.

$\lim\limits_{x\to -2+}g(x)=\lim\limits_{x\to -2-}g(x)$이므로 $-2a+b=f(-2)=4$이다.
$2a+b=8$과 연립하면 $a=1$, $b=6$임을 알 수 있다.

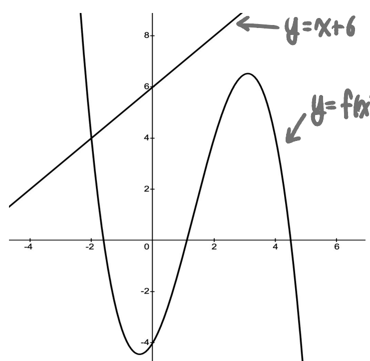
$f(a)=f(1)=-\dfrac{1}{2}$이고, $h(b)=\lim\limits_{x\to 6}g(x)=\lim\limits_{x\to 6}(ax+b)=12$이다.

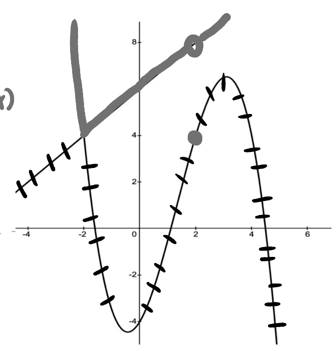
따라서 구하는 답은 $4\times\left\{12-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=50$이다.

$h(t)$가 실수 전체의 집합에서 정의되어 있다는 조건만 이용했는데 과연 연속이 맞을까?

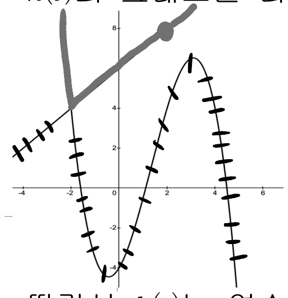
$f(x)=x^2-\dfrac{(x+2)(x-2)^2}{2}$, $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\leq -2) \\ x+6 & (-2<x<2) \\ f(2) & (x=2) \\ x+6 & (x>2) \end{cases}$

이므로 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.





$h(t)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $h(t)$는 연속이다.

22. 실수 t와 $f(3)=-15$인 이차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ f(t)(x-t+1) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\int_t^x g(a)da \leq k$이
성립하도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합이

$$\{t \mid -\alpha \leq t \leq -3 \text{ 또는 } 2 \leq t \leq \alpha\}$$

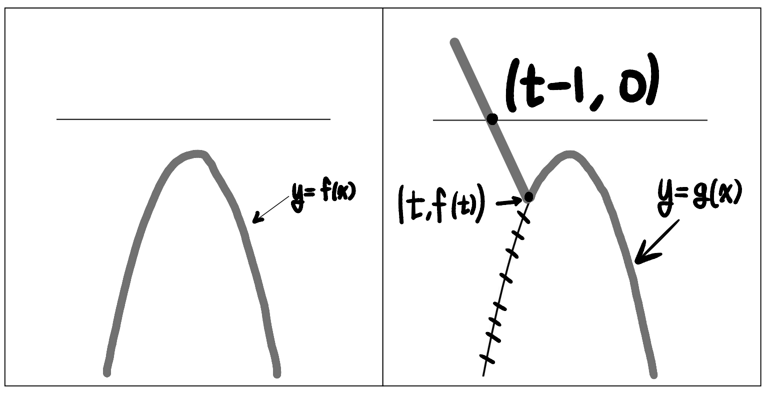
이다. 두 상수 k, α $(\alpha>3)$에 대하여 $\alpha^2+k=\frac{q}{p}$일 때,
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
[4점]

$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수라면, 모든 실수 t에
대하여 $\lim_{x\to\infty}\int_t^x g(a)da=\infty$이므로 모순이다. 따라서 $f(x)$의
최고차항의 계수는 음수이다.

$g(x)$는 $x \leq t$에서 $(t,\ f(t))$, $(t-1,\ 0)$을 지나는 직선이다.

$h(x)=\int_t^x g(a)da$라 하자.

1) $y=f(x)$가 x축과 만나지 않을 때



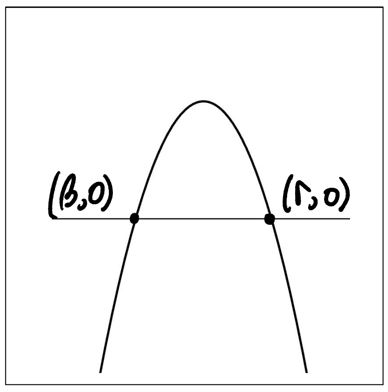
t의 값에 상관 없이
$x<t-1$에서 $g(x)>0$, $x>t-1$에서 $g(x)<0$이므로
$h(x)$는 $x=t-1$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 부등식 $h(t-1) \leq k$의 해가
$-\alpha \leq t \leq -3$ 또는 $2 \leq t \leq \alpha$이어야 한다.

$h(t-1)=\int_t^{t-1} g(a)da=\int_t^{t-1}\{f(t)(a-t+1)\}da=-\frac{f(t)}{2}$에서
$f(t) \geq -2k$의 해가 $-\alpha \leq t \leq -3$ 또는 $2 \leq t \leq \alpha$ 꼴로 나타날
수 없으므로 모순이다.

2) $y=f(x)$가 x축과 접할 때
1)과 마찬가지로 $h(t-1)$이 최댓값이므로 모순이다.

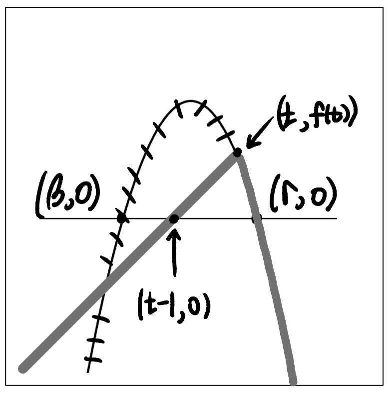
3) $y=f(x)$가 x축과 두 점에서 만날 때



x축과의 교점을 β, $\gamma(\beta<\gamma)$라 하자.

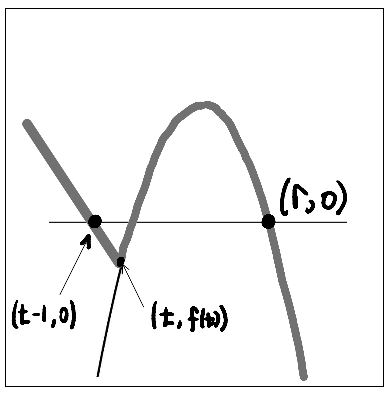
1) $t \geq \gamma$일 때 $h(x)$의 최댓값은 $h(t-1)$, $\therefore f(t) \geq -2k$

2) $\beta<t<\gamma$일 때 $g(x)$의 개형은 다음과 같다.



이때 $h(x)$는 $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\infty$이므로 불가능하다.

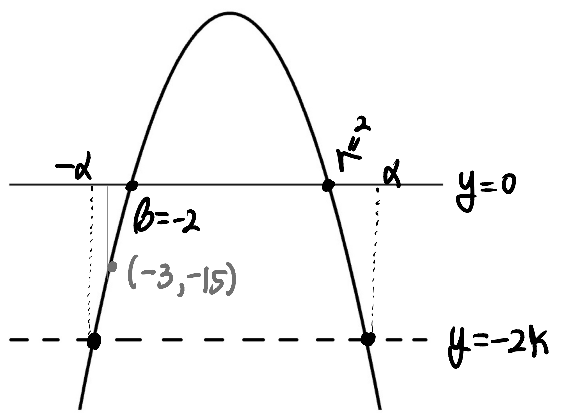
3) $t \leq \beta$일 때 $g(x)$의 개형은 다음과 같다.



$g(x)$는 $x=t-1$과 $x=\gamma$에서 부호가 $+$에서 $-$로 변하므로
$h(x)$는 $x=t-1$ 또는 $x=\gamma$에서 최댓값을 갖는다.
$f(t) \geq -2k$이고 $h(\gamma)=\int_t^{\gamma} g(a)da=\int_t^{\gamma} f(a)da \leq k$ 이어야 한다.

$k \leq 0$이면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\int_t^x g(a)da \leq k$을
만족하도록 하는 실수 t는 존재하지 않는다.

정리하면
$t \geq \gamma$일 때 $f(t) \geq -2k$이면 되고
$t \leq \beta$일 때 $f(t) \geq -2k$, $\int_t^{\gamma} f(a)da \leq k$이면 된다.



따라서 $\beta=-2$, $\gamma=2$, $f(\alpha)=f(-\alpha)=-2k$, $\int_{-3}^{2} f(a)da=k$임을 알 수 있다.

$f(x)$는 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(3,\ -15)$를 지나는 이차함수이므로
$f(x)=-3(x^2-4)$이다.

$\int_{-3}^{2} f(a)da=k$에서 $\int_{-3}^{2}\{-3(a^2-4)\}da=25$이므로 $k=25$이고
$f(\alpha)=f(-\alpha)=-2k$에서 $-3\alpha^2+12=-50$에서 $\alpha^2=\frac{62}{3}$이다.

$\alpha^2+k=\frac{137}{3}$이므로 구하는 답은 140이다.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n+5}-\sqrt{9n-1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n+5}-\sqrt{9n-1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{2}\times\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{9n+5}+\sqrt{9n-1}}=3\times\frac{1+1}{3+3}=1$$

24. $k^2\displaystyle\int_0^3 xe^{kx}dx=1$일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$k^2\displaystyle\int_0^3 xe^{kx}dx=\int_0^{3k}te^t dt=\left[(t-1)e^t\right]_0^{3k}=(3k-1)e^{3k}+1$에서

$(3k-1)e^{3k}=0$이므로 $k=\frac{1}{3}$

25. $x=\frac{\pi}{6}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$까지의 곡선 $y=\frac{2}{\cos x}$의 길이는? [3점]

① $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{3}$ ② $\frac{8\sqrt{3}-\pi}{6}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}+\pi}{3}$
④ $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}+\pi}{3}$

$f(x)=\frac{2}{\cos x}$라 하면 구하는 답은

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\frac{4\sin^2 x}{\cos^4 x}}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{\cos^4 x+4\sin^2 x}{\cos^4 x}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{\sin^4 x+2\sin^2 x+1}{\cos^4 x}}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{\sin^4 x+2\sin^2 x+1}{\cos^4 x}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x+1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2\sec^2 x-1)dx=[2\tan x-x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{8\sqrt{3}-\pi}{6}$$

26. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{\ln(x^2+1)} & (x\neq 0)\\ 2f(-1)+1 & (x=0)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)$이다.

$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(x^2+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(x^2+1)}\times\frac{f(x)}{x^2}=2f(-1)+1$에서
$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(x^2+1)}=1$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2f(-1)+1$이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$의 값이 존재하기 위해서는
$b=c=0$이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2f(-1)+1$에서 $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{x^2}=2a+1$에서 $a=-1$이다.
$f(x)=-x^2$에서 $f(2)=-4$이다.

27. 함수 $f(x)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}-a|x|\,(x\neq 0)$가 있다. 모든 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=tx$의 교점의 개수가 1 또는 2일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{8}$ ③ $-\dfrac{1}{2}$ ④ $-\dfrac{1}{4}$ ⑤ $-\dfrac{1}{8}$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=tx$의 교점의 개수는

함수 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+a & (x<0)\\[2mm] \dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}-a & (x>0)\end{cases}$ 와 직선 $y=t$의 교점의 개수와

같다.

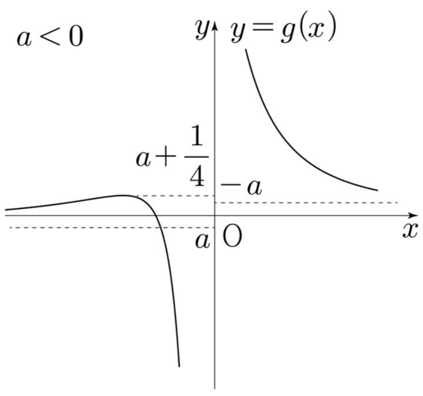
$g'(x)=-\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{12}{x^4}$이므로 $g(x)$는 $x=2$에서만 극값을 갖고

$\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-}g(x)=-\infty$이다.

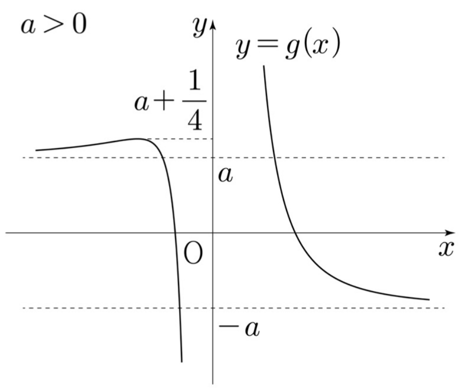
i) $a>-\dfrac{1}{8}$일 때

$g(x)$의 개형은 다음과 같다.

$a<0$

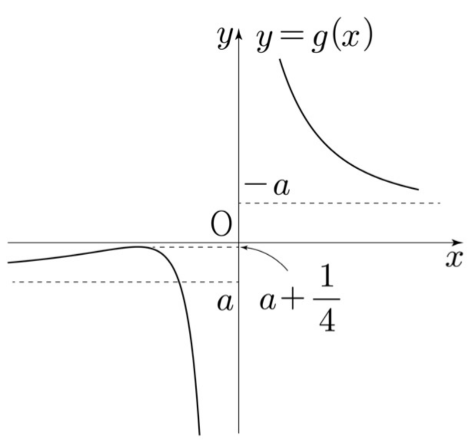


$a>0$



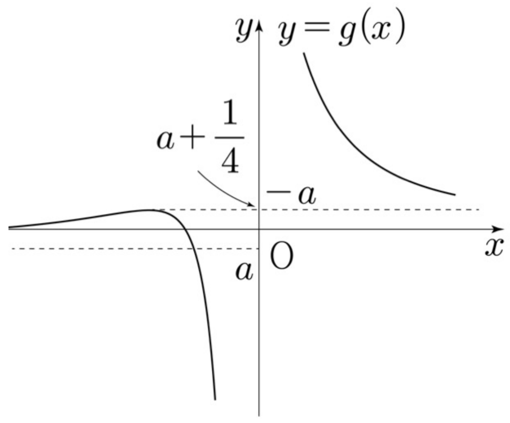
$-a<t<a+\dfrac{1}{4}$, $a<t<a+\dfrac{1}{4}$일 때 교점의 개수는 3이 되므로 모순이다.

ii) $a<-\dfrac{1}{8}$일 때



$a+\dfrac{1}{4}<t<-a$일 때 교점의 개수는 0이 되므로 모순이다.

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{8}$이다.



$t\le -\dfrac{1}{8}$일 때, 교점의 개수는 1,

$-\dfrac{1}{8}<t<\dfrac{1}{8}$일 때, 교점의 개수는 2,

$t\ge \dfrac{1}{8}$일 때, 교점의 개수는 1

28. 함수 $f(x)=8e^{2x}+e^{-x}-2x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f''(t)(x-t)+f'(t)$$

라 하자. 함수 $f(kg(x))-f(x)$의 최솟값이 0이 되도록 하는 실수 t의 개수가 2일 때, 양수 k의 값은? [4점]

① $\dfrac{\ln 2}{5+6\ln 2}$ ② $\dfrac{2\ln 2}{5+6\ln 2}$ ③ $\dfrac{3\ln 2}{5+6\ln 2}$

④ $\dfrac{2\ln 2}{5-6\ln 2}$ ⑤ $\dfrac{\ln 2}{5-6\ln 2}$

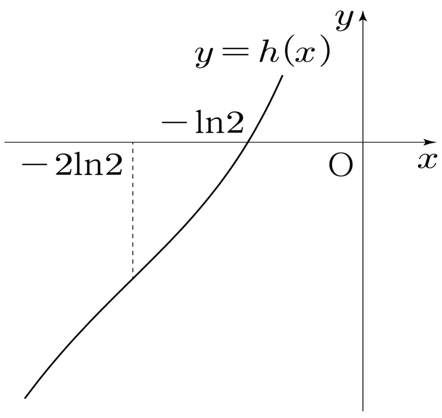
$h(x)=f'(x)=16e^{2x}-e^{-x}-2$라 하면 $g(x)$는 곡선 $y=h(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이며 $\int_x^{kg(x)} h(a)da$의 최솟값이 0이다.

$h(-\ln 2)=0$

$h'(x)=32e^{2x}+e^{-x}>0$,

$h''(x)=64e^{2x}-e^{-x}$에서 $h''(-2\ln 2)=0$

곡선 $y=h(x)$의 개형은 다음과 같다.



i) 직선 $y=kg(x)$의 기울기가 1보다 작을 때

두 직선 $y=kg(x)$, $y=x$가 만나는 점을 $(\alpha,\ \alpha)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 주어진 조건을 만족시키기 위해서는

$x<kg(x)<\alpha$인 모든 실수 x에 대하여 $\int_x^{kg(x)} h(a)da \geq 0$

$\alpha<kg(x)<x$인 모든 실수 x에 대하여 $\int_{kg(x)}^{x} h(a)da \leq 0$

이어야 한다.

x의 값이 한없이 작아지면 $h(x)<0$, $x<kg(x)<-\ln 2$이므로 모순이고, x의 값이 한없이 커질때도 마찬가지다.

ii) 직선 $y=kg(x)$의 기울기가 1일 때

$kg(x)=x+c$에서 $c\neq 0$이면 $\int_x^{x+c} h(a)da<0$을 만족시키는 실수 x가 존재한다.

따라서 $c=0$이어야 하고 그러면 모든 실수 x에 대하여

$\int_x^{kg(x)} h(a)da=0$이므로 조건을 만족시킨다.

iii) 직선 $y=kg(x)$의 기울기가 1보다 클 때

두 직선 $y=kg(x)$, $y=x$가 만나는 점을 $(\alpha,\ \alpha)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 주어진 조건을 만족시키기 위해서는

$x<kg(x)<\alpha$인 모든 실수 x에 대하여 $\int_x^{kg(x)} h(a)da \geq 0$

$\alpha<kg(x)<x$인 모든 실수 x에 대하여 $\int_{kg(x)}^{x} h(a)da \leq 0$

이어야 한다.

$x<-\ln 2$일 때 $h(x)<0$, $x>-\ln 2$일 때 $h(x)>0$이므로

$\alpha=-\ln 2$가 되어야 한다.

$\therefore\ kg(-\ln 2)=-\ln 2$이어야 하고 곡선 $y=g(x)$의 기울기는

$\dfrac{1}{k}$이상이어야 한다.

이는 $\left(-\ln 2,\ -\dfrac{\ln 2}{k}\right)$에서 곡선 $y=h(x)$에 그은 접선의 y절편이

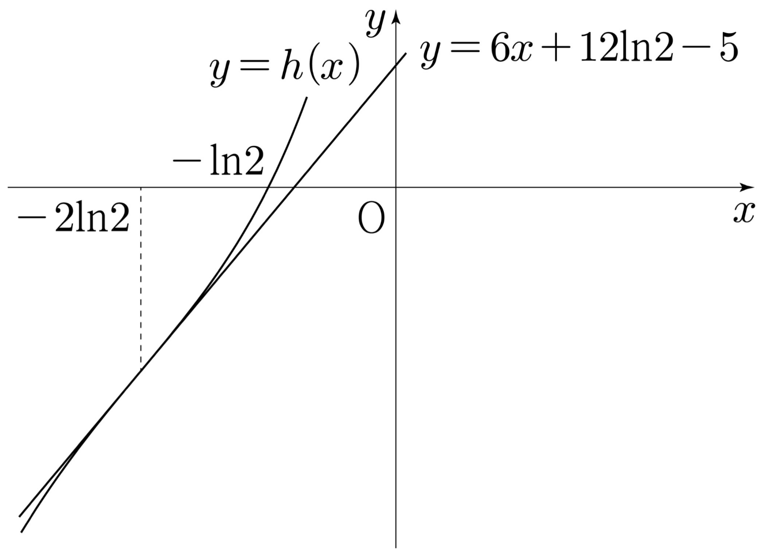
0보다 크거나 같아야 함을 의미한다.

곡선 $y=h(x)$의 변곡점의 좌표는 $(-2\ln 2,\ -5)$이고 변곡점에서의

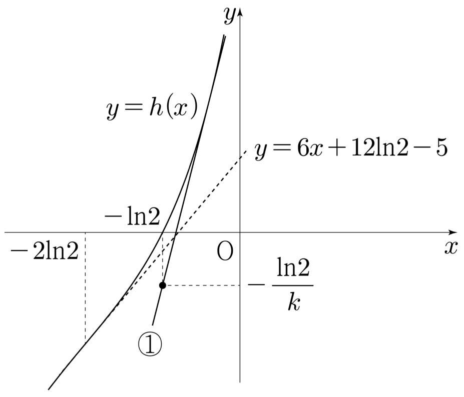
접선의 기울기는 $h'(-2\ln 2)=6$이므로

변곡접선은 $y=6x+12\ln 2-5$이다.

(y절편은 0보다 크다. $\ln 2^{12}=\ln 4^{6}>6$)

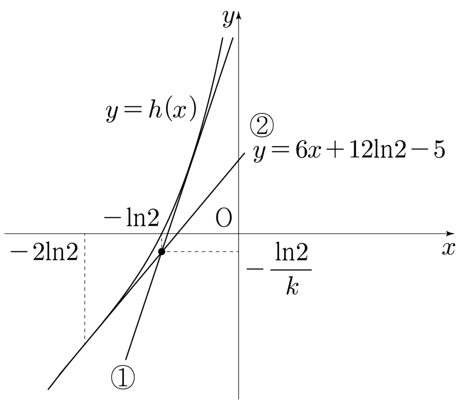


(I) $-\dfrac{\ln 2}{k}<6\ln 2-5$일 때



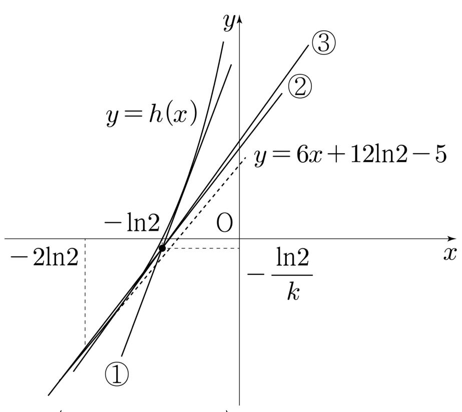
점 $\left(-\ln 2,\ -\dfrac{\ln 2}{k}\right)$에서 그을 수 있는 접선의 개수는 1이므로 모순이다.

(II) $-\dfrac{\ln 2}{k}=6\ln 2-5$일 때



점 $\left(-\ln 2,\ -\dfrac{\ln 2}{k}\right)$에서 그을 수 있는 접선의 개수는 2이고 변곡접선 외에 다른 접선은 변곡접선보다 기울기가 크므로 조건을 만족시킨다.

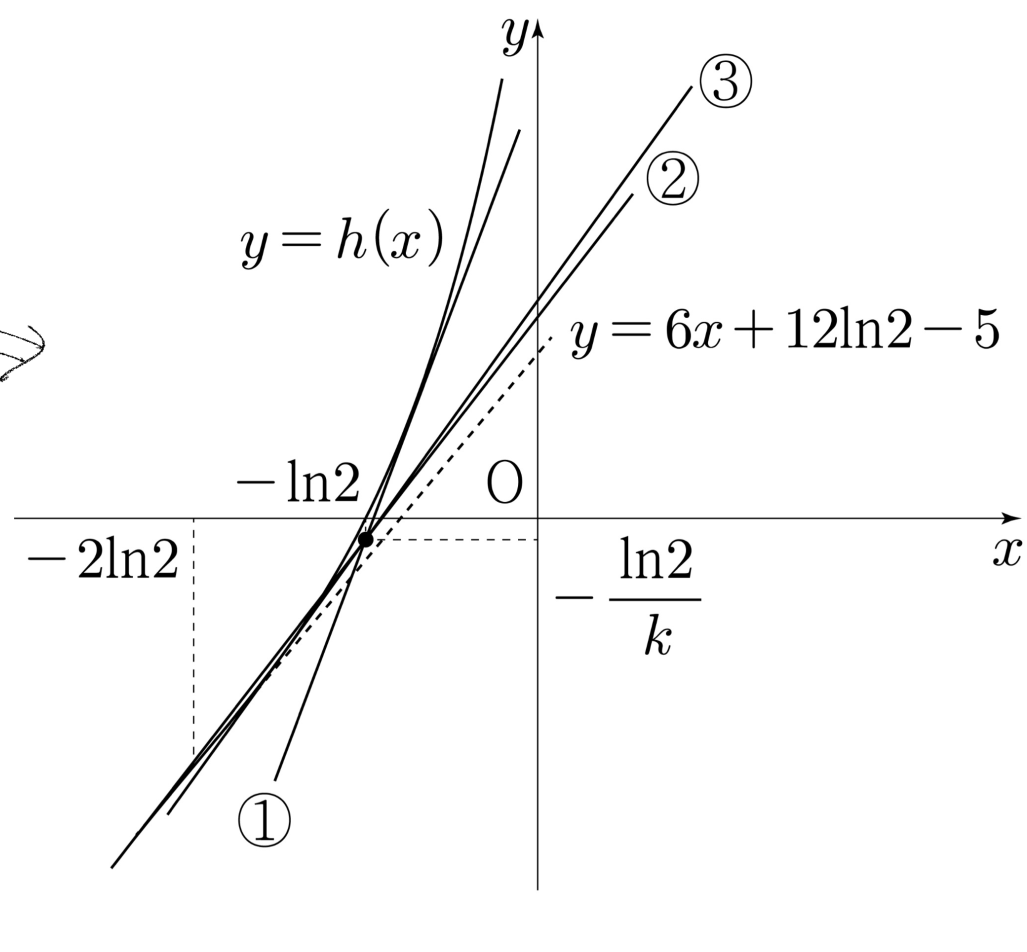
(III) $-\dfrac{\ln 2}{k}>6\ln 2-5$일 때



점 $\left(-\ln 2,\ -\dfrac{\ln 2}{k}\right)$에서 그을 수 있는 접선의 개수는 3이고 이때 모두 y절편이 1보다 크므로 모순이다.

따라서 (II)의 경우만 가능하므로 구하는 k의 값은 $\dfrac{\ln 2}{5-6\ln 2}$이다.

확대



단답형

29. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{k\pi}{x^2+1}$가 있다. 함수

$$g(x)=\int_0^x \{f'(t)\cos f(t)\}^3 dt$$

가 $x=\alpha$에서 극값을 갖도록 하는 모든 α를 작은 수부터 차례대로 나열하면 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$이다.
$\sin^2(k\pi)-\alpha_7=1,\ \sin^2(k\pi)-f'(\alpha_7)=1$일 때, $2\times k\times m$의 값을 구하시오. [4점]

$g(x)$가 극값을 갖는 지점과 $g'(x)$의 부호가 변하는 지점은 일대일 대응이다.

$g'(x)=\{f'(x)\cos f(x)\}^3$의 부호가 변하는 지점과 $f'(x)\cos f(x)$의 부호가 변하는 지점은 일대일 대응이다.

$\sin^2(k\pi)-\alpha_7=1,\ \sin^2(k\pi)-f'(\alpha_7)=1$에서 $\alpha_7=f'(\alpha_7)$,
$f(x)=\dfrac{k\pi}{x^2+1},\ f'(x)=-\dfrac{2k\pi x}{(x^2+1)^2}$에서 $x=f'(x)$의 해는 $x=0$뿐이다.
$\therefore\ \alpha_7=0,\ \sin(k\pi)=\pm1$

x의 값이 $(-\infty,\ 0)$에서 증가할 때 $f'(x)$의 부호는 $(+)$로 일정하므로 $\cos f(x)$의 부호 변화가 6번 있어야 한다.
x의 값이 $(-\infty,\ 0)$에서 증가할 때 $f(x)$의 값은 $(0,\ k\pi)$까지 증가하고 $\cos(k\pi)=0$이므로 $k=\dfrac{13}{2}\pi$이다.

$f(\alpha_1)=\dfrac{\pi}{2},\ f(\alpha_2)=\dfrac{3\pi}{2},\ \cdots\ ,\ f(\alpha_7)=\dfrac{13\pi}{2}$

$f'(x)\cos f(x)$는 기함수이므로 $\alpha_7=0$에서 $m=13$임을 알 수 있다.
$f(\alpha_8)=\dfrac{11\pi}{2},\ f(\alpha_9)=\dfrac{9\pi}{2},\ \cdots\ ,\ f(\alpha_{13})=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 구하는 답은 $2\times\dfrac{13}{2}\times13=169$이다.

30. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 극한

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(S_{n+1})^k-(3a_n)^{k+1}}{(3a_n)^k+(S_{n+1})^{k+1}}$$

이 존재하고, 그 극한값을 b_n이라 하자. $b_4=0$일 때, $120\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값을 구하시오. [4점]

$|S_{n+1}|>|3a_n|$일 때, $\lim_{k\to\infty}\dfrac{(S_{n+1})^k-(3a_n)^{k+1}}{(3a_n)^k+(S_{n+1})^{k+1}}=\dfrac{1}{S_{n+1}}$

$|S_{n+1}|<|3a_n|$일 때, $\lim_{k\to\infty}\dfrac{(S_{n+1})^k-(3a_n)^{k+1}}{(3a_n)^k+(S_{n+1})^{k+1}}=-3a_n$

$S_{n+1}=3a_n\neq0$일 때, $\lim_{k\to\infty}\dfrac{(S_{n+1})^k-(3a_n)^{k+1}}{(3a_n)^k+(S_{n+1})^{k+1}}=\dfrac{1-3a_n}{1+3a_n}$

$S_{n+1}=-3a_n\neq0$일 때, $\lim_{k\to\infty}\dfrac{(S_{n+1})^k-(3a_n)^{k+1}}{(3a_n)^k+(S_{n+1})^{k+1}}$의 값은 존재하지 않는다.

$b_4=0$에서 $a_4=\dfrac{1}{3}$, $S_5=1$이므로 $\therefore\ a_n=\dfrac{2n-3}{15},\ S_{n+1}=\dfrac{n^2-1}{15}$

$S_2=0,\ 3a_1=-\dfrac{1}{5}$에서 $b_1=\dfrac{1}{5}$　　　$S_3=3a_2=\dfrac{1}{5}$에서 $b_2=\dfrac{2}{3}$

$S_4=\dfrac{8}{15},\ 3a_3=\dfrac{3}{5}$에서 $b_3=-\dfrac{3}{5}$　　　$b_4=0$

$n\geq5$에서 $S_{n+1}>3a_n$이므로 $b_n=\dfrac{15}{n^2-1}$

급수를 계산하면
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)+(0)+\sum_{n=5}^{\infty}\frac{15}{n^2-1}$$

$$=\frac{4}{15}+\frac{15}{2}\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{4}{15}+\frac{15}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-0-0\right)=\frac{32}{120}+\frac{405}{120}=\frac{437}{120}$$

따라서 구하는 답은 437이다.