해설

1.

[정답] ⑤ 136

[출제 의도] 주어진 방정식과 조건을 활용하여 함수를 추론한다.

주어진 방정식은 삼차함수 $y=f(x)$와 직선 $y=-f'(t)(x-t)+f(t)$의 교점의 x좌표를 해로 갖는 방정식이다.
삼차함수와 직선 사이의 교점의 개수는 1, 2, 3중 하나이므로, 함수 $g(t)$는 1, 2, 3중 하나의 값을 가진다.
이때 $g(t)=2$이면, 직선 $y=-f'(t)(x-t)+f(t)$가 $y=f(x)$에 접해야 한다.
$g(t)=2$인 경우를 파악하기 위해 직선의 기울기 $f'(t)$를 기준으로 살펴보자.

(i) $f'(t)=0$일 때, 직선이 $y=f(x)$에 접하므로 $g(t)=2$가 성립한다.

(ii) $f'(t)\neq 0$일 때, 직선과 $y=f(x)$의 교점 중 $x\neq t$인 점이 존재하고, 해당 교점에서 직선이 $y=f(x)$에 접할 때 $g(t)=2$가 성립한다.

따라서 조건 (i) 또는 (ii)를 만족해야만 $g(t)=2$가 성립한다.
주어진 조건식 $\lim_{t\to 1-}g(t)+\lim_{y\to 1+}g(t)=4$를 살펴보자.

함수 $g(t)$가 1, 2, 3중 하나의 값을 가지므로, $\lim_{t\to 1-}g(t)$와 $\lim_{t\to 1+}g(t)$가 가질 수 있는 값의 순서쌍은 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ 뿐이다.
만약 $\lim_{t\to 1-}g(t)=\lim_{t\to 1+}g(t)=2$이면, $t=1$의 좌극한과 우극한에서 조건 (i) 또는 (ii)를 만족해야 한다.
그러나 그러한 조건을 만족하는 상황이 존재하지 않으므로, $\lim_{t\to 1-}g(t)=\lim_{t\to 1+}g(t)=2$는 성립하지 않는다.
따라서 $\lim_{t\to 1-}g(t)$와 $\lim_{t\to 1+}g(t)$가 가질 수 있는 값의 순서쌍은 $(1, 3)$, $(3, 1)$ 뿐이다.
한편 $t=1$ 전후로 $g(t)$의 값이 변하므로, $g(1)=2$임을 알 수 있다.
만약 $t=1$일 때 조건 (i)가 성립한다면, $\lim_{t\to 1-}g(t)=\lim_{t\to 1+}g(t)=3$이 되어 모순이 발생한다.
따라서 조건 (ii)가 성립해야 한다.
즉, 직선 $y=-f'(1)(x-1)+f(1)$이 $x\neq 1$인 지점에서 $y=f(x)$와 접해야 한다.
이때의 접점의 좌표를 k로 두자(단, $k\neq 1$).
$f'(x)=3x^2+2x+a$이고, 이때 $-f'(1)=f'(k)$가 성립하므로 $f'(1)+f'(k)=0$이다.
이로부터 k에 대한 방정식 $3k^2+2k+(2a+5)=0$을 얻는다. …… ㉠
또한 직선 $y=-f'(1)(x-1)+f(1)$가 점 $(k, f(k))$를 지나므로, 대입하면 k에 대한 방정식 $k^2+2k+(2a+7)=0$을 얻는다. …… ㉡
㉠에서 ㉡을 빼면 k에 대한 새로운 방정식 $2k^2-2=0$을 얻고, 이로부터 $k=1$ 또는 $k=-1$임을 알 수 있다.
이때 $k\neq 1$이므로, $k=-1$이다.
한편, 위에서 구한 식 $f'(1)+f'(k)=0$에 $k=-1$을 대입하면 방정식 $2a+6=0$을 얻는다. 따라서 $a=-3$이다.
주어진 조건식 $f(-2)+g(-2)=4$로부터 $f(-2)$의 값을 구하기 위해 $g(-2)$의 값을 구하자. $f'(x)=3x^2+2x-3$이므로, $f'(-2)=5$이다.
이로부터 주어진 방정식을 $f(x)-f(-2)=-5(x+2)$와 같이 나타낼 수 있다.
방정식을 풀면
$(x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(x-2)-3(x+2)=-5(x+2)$
$(x+2)(x^2-x+4)=0$
을 얻는다.
$x^2-x+4=0$의 실근이 존재하지 않으므로,
주어진 방정식의 실근은 $x=-2$뿐이다.
따라서 $g(-2)=1$을 얻고, $f(-2)=3$을 얻는다.
주어진 식에 대입하면, $f(-2)=2+b=3$ 이므로 $b=1$을 얻는다.
따라서 함수 $f(x)$는
$f(x)=x^3+x^2-3x+1$이다.
구하는 값은 $f(5)=125+25-15+1=136$이다.

[다른 풀이] 삼차방정식의 근과 계수 관계를 이용하여 접점의 x좌표 k를 구할 수 있다.
직선 $y=-f'(1)(x-1)+f(1)$는 x좌표가 1인 지점에서 삼차함수 $y=f(x)$를 지나고, x좌표가 k인 지점에서 삼차함수 $y=f(x)$와 접한다.
$f(x)$의 삼차항의 계수가 1이고 이차항의 계수가 1이므로, $1+k+k=-1$이 성립한다. 따라서 $k=-1$을 얻는다.