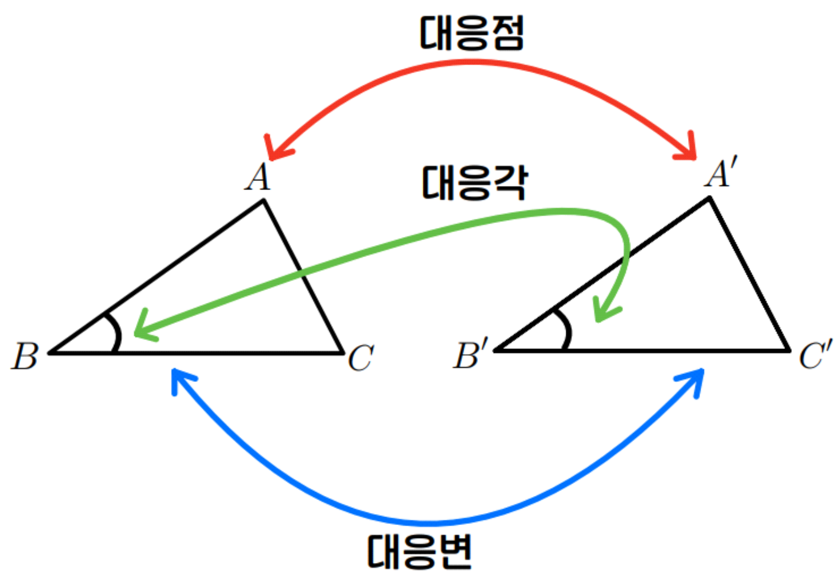
CHECK 01 **합동**

합동이란 **완벽하게 동일한 도형**을 의미합니다.
만약 합동인 도형 두 개가 존재한다면, 도형을 움직여서 완벽하게 겹칠 수 있습니다.

합동인 도형은 완벽하게 같은 도형이니까, 모든 변의 길이도 같고, 각의 크기도 같겠죠.
넓이도 둘레도 모두 같습니다.

합동인 도형에서 같은 점을 **대응점**, 같은 변을 **대응변**이라고 합니다.



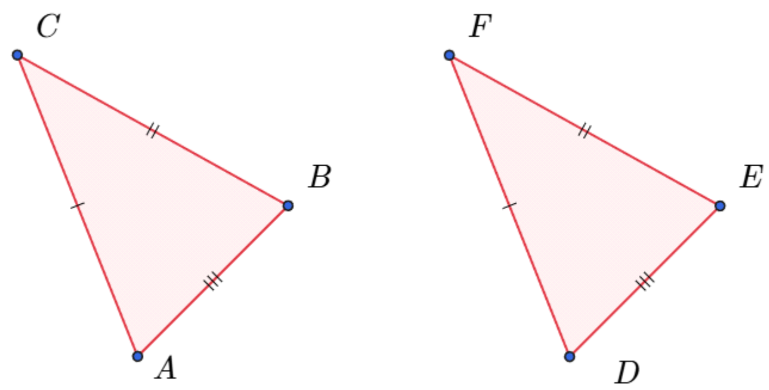
합동은 $\equiv$이라는 기호로 나타냅니다.
두 삼각형 ABC와 DEF가 합동이라면 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ 라고 쓰면 돼요.
이때 대응점 순서대로 기호를 써야 하는데요,
같은 점을 나타내도록 순서를 맞추어 쓰면 됩니다.

APOLO TIPS

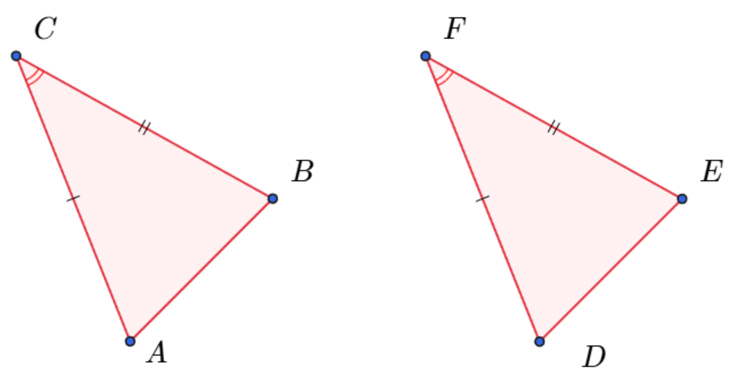
합동기호 $\equiv$와 등호 $=$, 헷갈리기 쉽죠?
$\triangle ABC = \triangle DEF$ 처럼 등호를 쓰면, '$\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이만 같다'는 의미가 됩니다.
합동이 아니니까 모양이 같은지는 다른지는 몰라요.
헷갈리지 않도록 조심하세요!

CHECK 02 삼각형의 합동조건

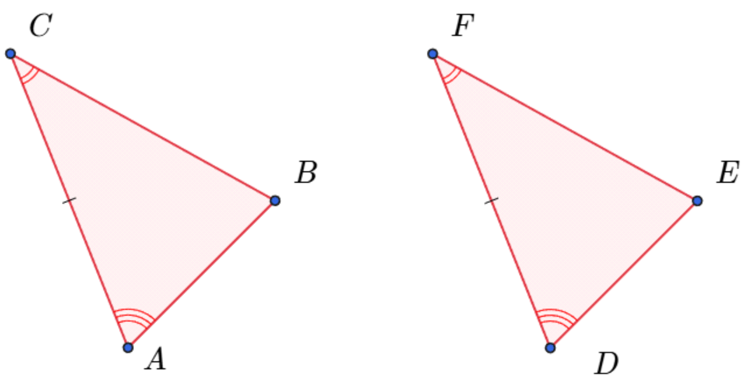
두 삼각형이 합동인지 아닌지를 어떻게 확인할까요?
삼각형이 합동이려면, 5가지 조건 중 하나를 만족시켜야 합니다.
이번 테마에서는 그중 3가지를 배워볼게요. 이 3가지는 아무 삼각형에나 적용시킬 수 있습니다.



첫 번째, **SSS 합동**입니다.
두 $\triangle ABC$ 와 $\triangle DEF$ 를 볼게요. **세 변의 길이**가 모두 같죠?
이렇듯, 세 변의 길이가 같다면 두 삼각형은 SSS 합동입니다.



다음으로는 **SAS 합동**입니다.
두 변의 길이가 각각 같고, **두 변 사이 끼인 각** ($\angle C$ 와 $\angle F$)의 크기가 같습니다.



마지막 **ASA 합동**입니다.
두 각의 크기가 각각 같고, **한 변**의 길이가 같습니다.

개념요약

1) **SSS 합동 : 세 변의 길이**가 서로 같다면, 합동이다.
2) **SAS 합동 : 두 변의 길이**와 **끼인 각**의 크기 같다면, 합동이다.
3) **ASA 합동 : 한 변의 길이**와 **두 각**이 같다면, 합동이다.

APOLO TIPS

S란 선분(Side)이라는 뜻이고, A는 각도(Angel)이라는 뜻입니다.
SAS와 ASA가 헷갈리나요? 이름을 이해하면 어렵지 않습니다.

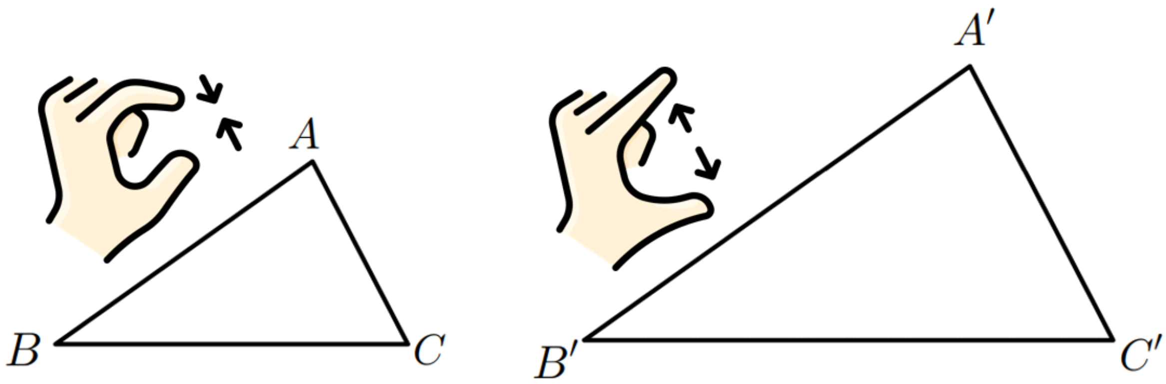
S (선분) ⟶ A (각도) ⟶ S (선분) : 두 변과 끼인 각

A (각도) ⟶ S (선분) ⟶ A (각도) : 한 변의 길이와 두 각

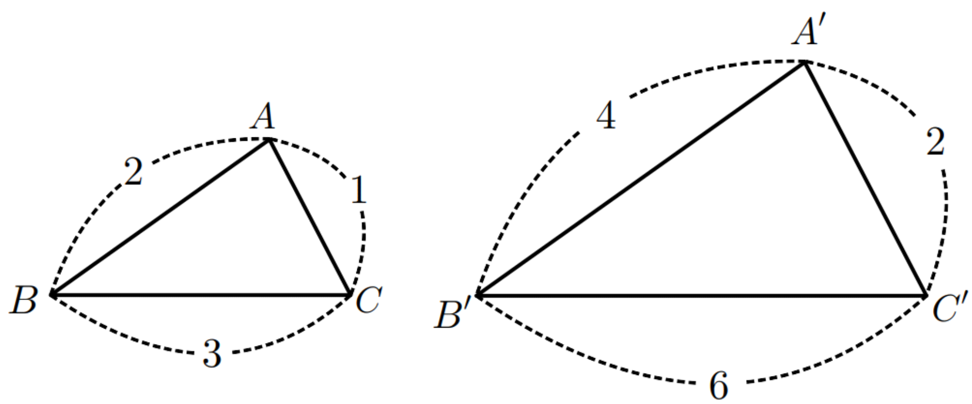
CHECK 03 닮음

합동이란 두 도형의 모양이 완벽하게 같은 거였죠? 이와 비슷한 개념이 닮음이에요.
스마트폰에서 사진 확대하거나 축소하는 거랑 같다고 보면 돼요.

어떤 도형을 줌인, 줌아웃시켜서 다른 도형과 합동으로 만들 수 있다면, 두 도형을 **닮음**이라고 불러요.

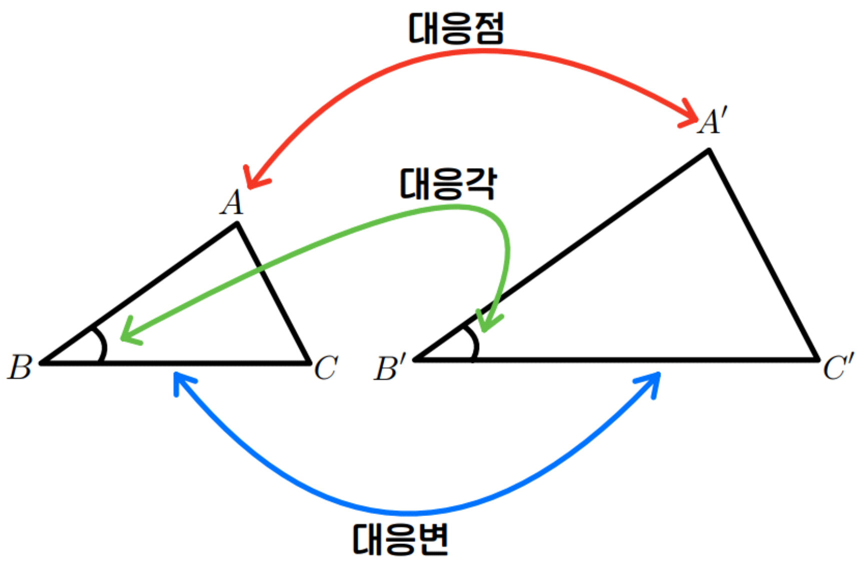


좀 더 있어보이게, 수학적인 정의를 살펴볼게요.
도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소했을 때, 합동이 되면 닮음이에요.

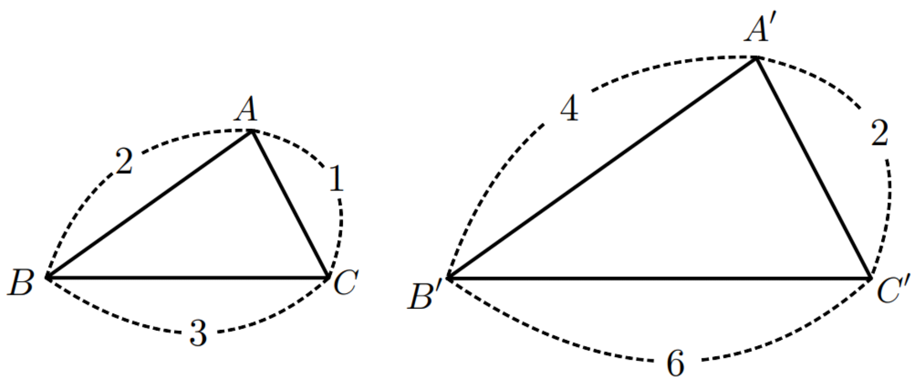


두 삼각형 $\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$ 는 서로 닮음이에요.
$\triangle ABC$를 확대하면 $\triangle A'B'C'$가 되니까요.

두 삼각형의 닮음을 수학 기호로 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$라고 씁니다.



닮음에도 **대응점**과 **대응변**이라는 개념이 있어요. 합동이랑 비슷하죠?
닮음 기호를 쓸 때는 꼭 대응점 순서대로 적어야 해요.
$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ 라고 적었다면, A는 A'에, B 는 B'에 대응하는 대응점이 돼요.
대응변도 마찬가지입니다. $\overline{AB}$ 와 $\overline{A'B'}$, $\overline{BC}$ 와 $\overline{B'C'}$이 대응변이 됩니다.
닮음인 도형에서 **대응각의 크기는 모두 같습니다.**



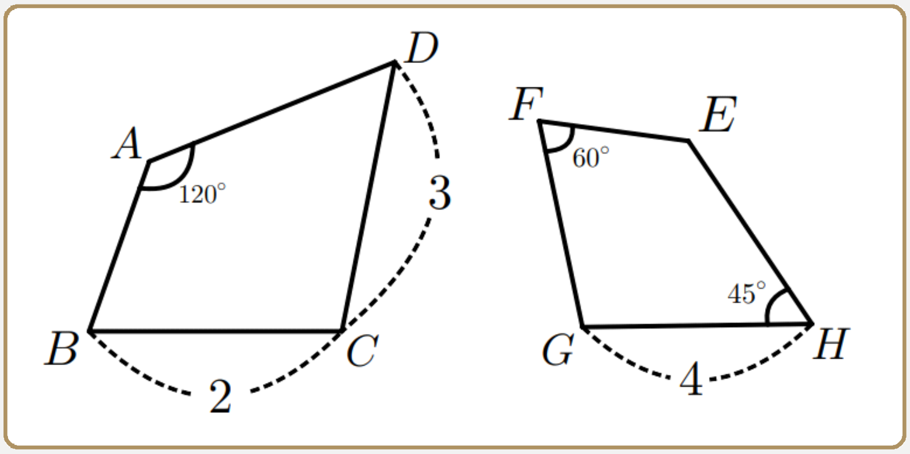
아까 이야기했던 것처럼, 닮음이란 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소하는 거예요.
일정한 비율이라는 말 때문에, 닮음인 두 도형 사이에는 **닮음비**라는 개념이 나옵니다.

$\overline{AB}$와 $\overline{A'B'}$을 보면 길이가 딱 2배 차이 나죠?
닮음인 도형에서, 모든 변의 닮음비는 같아요. 따라서 나머지 변의 길이도 2배 차이나요.
이런 도형을 **닮음비가 $1:2$이다**라고 표현합니다. 따라서 $\overline{B'C'}$의 길이는 6이 되고, $\overline{A'C'}$는 2가 됩니다.

개념요약

1) **어떤 도형을 줌인, 줌아웃시켜서 다른 도형과 합동으로 만들 수 있다면,** 두 도형을 **닮음**이라고 부른다.
2) **닮음비**: 닮은 두 도형 사이의 길이 비율
3) 닮음인 도형에서 **모든 변의 닮음비가 같다.**
4) 닮음인 도형에서 **모든 대응각의 크기가 같다.**

생각해보기



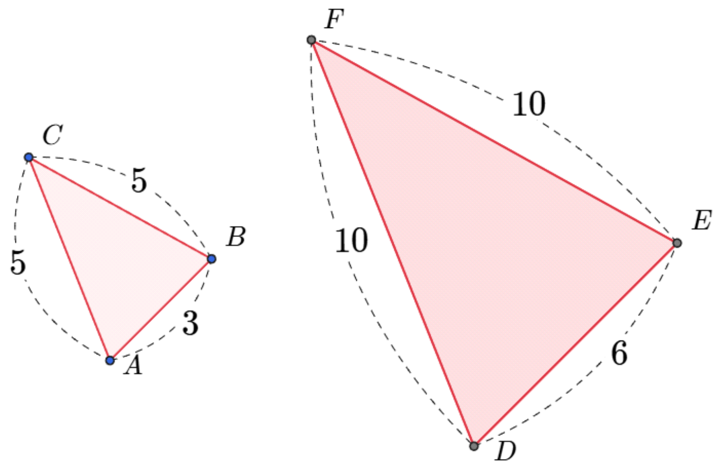
위의 두 사각형은 $\square ABCD \backsim \square EFGH$ 이에요.
작성된 순서를 잘 따라가 보면, $\overline{CD}$ 에 대응하는 변은 $\overline{GH}$ 이니까,
닮음비는 $6:4$, 즉 $3:2$가 됩니다.

만약 대응변을 헷갈리면 어떻게 될까요?
$\overline{BC}$와 $\overline{GH}$를 대응변으로 보게 되면, 닮음비가 $1:2$ 라는 잘못된 결론이 나옵니다.

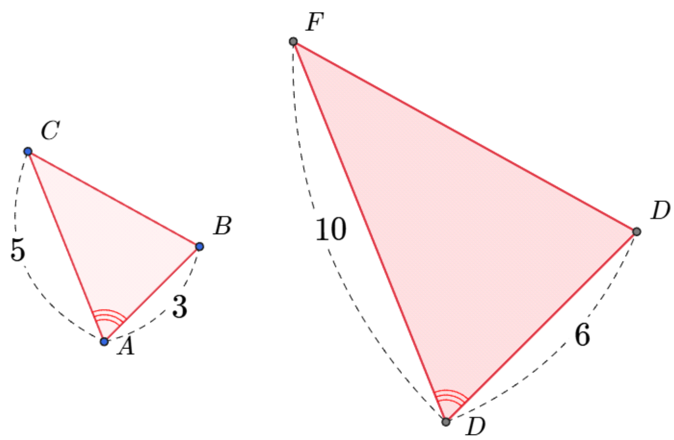
닮음을 수식으로 표현할 때의 순서는 대응점과 대응변 순서대로 적어야 해요.
비슷해 보인다고 순서를 무시하면 아예 다른 결과가 나와요.
따라서, 닮은 도형은 꼭 대응점 순서대로 적어야 해요.

CHECK 04 삼각형의 닮음조건

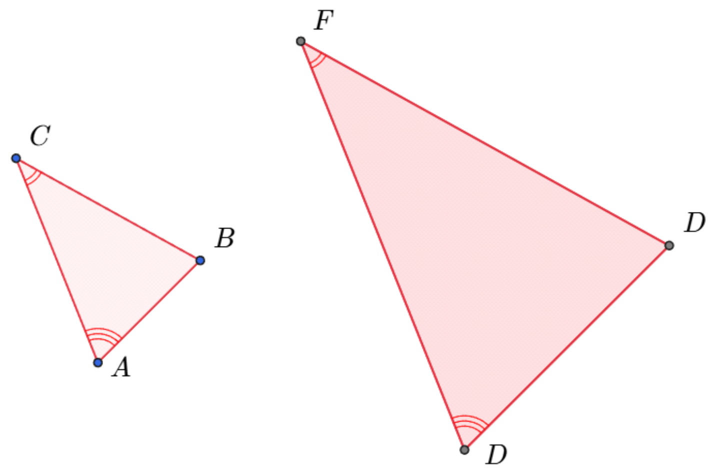
삼각형의 닮음조건에는 총 3가지가 있습니다.
하나씩 살펴볼까요?



세 대응변의 길이비가 모두 같다면, SSS **닮음**이라고 합니다.
왼쪽과 오른쪽 삼각형을 비교해 볼게요.
오른쪽 삼각형에서 모든 변이 2배 길어졌죠? 따라서 이 경우 닮음비는 $1 : 2$이에요.



두 대응변의 길이비가 같고, **끼인각**이 같다면, SAS **닮음**이라고 합니다.
마찬가지로 닮음비는 $1 : 2$가 됩니다.



2개의 대응각이 같다면 **AA 닮음**이라고 합니다.
앞으로 여러분이 가장 자주 활용하게 될 닮음조건이에요.

개념요약

1) SSS **닮음** : **세 대응변의 길이비**가 같다면, 닮음이다.
2) SAS **닮음** : **두 대응변의 길이비**와 **끼인각**이 같다면, 닮음이다.
3) AA **닮음** : **두 대응각**의 크기가 같다면, 닮음이다.

생각해보기

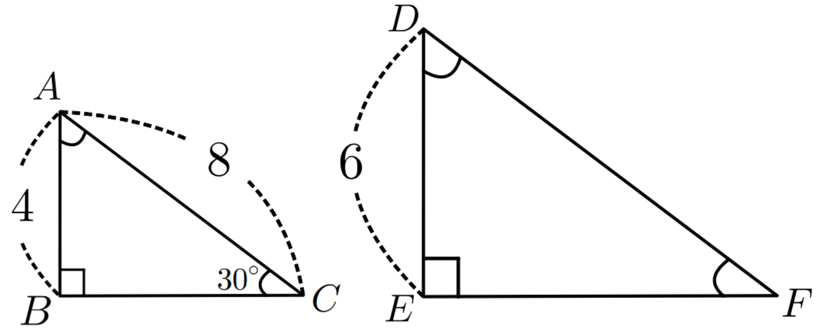
삼각형의 내각의 합은 180° 이에요.
2개의 각이 서로 같다면, 나머지 각도 같을 수 밖에 없겠죠?
그래서 AAA가 아니라 AA 닮음이라고 씁니다.

CHECK 05 **닮음의 활용**

닮은 도형에서 눈여겨봐야 할 것은 바로 닮음비입니다.
이 닮음비를 이용하면 선분의 길이를 구할 수 있어요. 이를 활용해서 예제 몇 가지를 풀어 봅시다.

EXAMPLE

$\triangle ABC$ 와 $\triangle DEF$ 는 서로 닮은 관계이다. $\overline{DF}$ 와 $\angle F$ 의 크기를 구하시오.



문제에서 두 삼각형이 닮음이라고 주어졌네요.

두 삼각형의 닮음비를 구해 봅시다. 우리가 알고 있는 대응변은 $\overline{AB}$ 와 $\overline{DE}$ 가 있습니다.

$\overline{AB}$ 와 $\overline{DE}$ 의 길이비는 $2:3$이므로, **두 도형의 닮음비도 $2:3$입니다.**

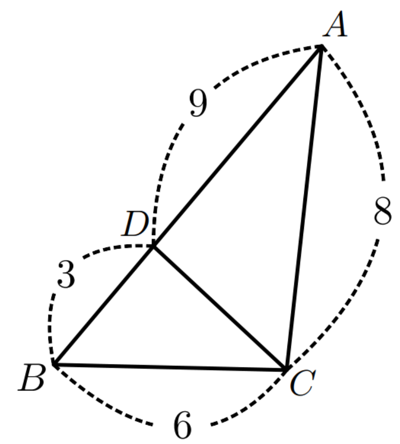
$\overline{AC}$ 와 $\overline{DF}$ 의 길이비도 $2:3$이겠네요.

$2:3=\overline{AC}:\overline{DF}$, 이 비례식을 풀면 $\overline{DF}=12$가 됩니다.

$\angle F$ 의 크기는 어떻게 구할까요?
닮은 도형은 대응각의 크기가 같습니다. 자주 쓸 성질이에요.
그래서 $\angle F$ 는 $\angle C$와 크기가 같아요. 그럼 30° 가 답이겠네요.

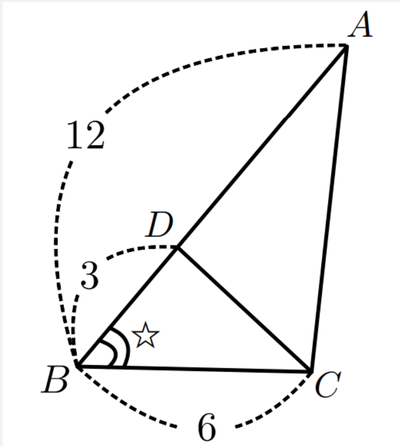
EXAMPLE

$\triangle ABC$와 닮은 삼각형을 구하시오.



이렇게 여러 삼각형이 겹쳐 있는 경우에는, **공통인 각**을 보면 **닮음의 힌트**를 얻을 수 있습니다.
$\angle A$는 $\triangle ABC$ 와 $\triangle ADC$ 가 공통으로 쓰고 있네요.
마찬가지로 $\angle B$는 $\triangle ABC$ 와 $\triangle CBD$ 가 공통으로 쓰고 있습니다.

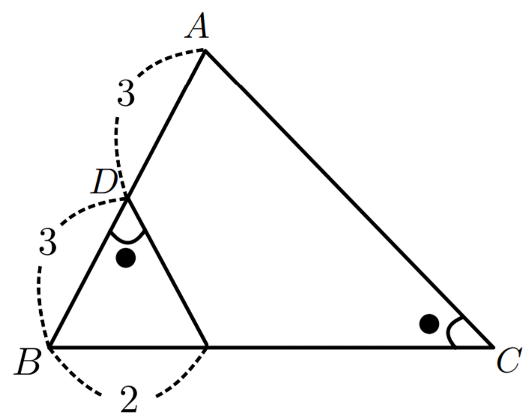
$\triangle CBD$ 를 볼까요? $\overline{CB} = 6$, $\overline{BD} = 3$이죠.
다음으로 $\triangle ABC$ 를 본다면, $\overline{AB} = 12$, $\overline{CB} = 6$이 되겠네요.
비율이 같은 거 보이시나요? $\overline{AB} : \overline{CB} = 2 : 1$이고, $\overline{CB} : \overline{DB} = 2 : 1$이네요.



두 변의 길이비가 같고 **끼인 각**이 같으니 SAS **닮음**이죠?
따라서 $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ 라는 결론이 나옵니다.
이때 대응점 순서대로 써야 한다는 점 꼭 기억합시다!

EXAMPLE

$\triangle ABC$ 와 닮은 삼각형을 구하시오. (단, $\angle ACB = \angle BDE$이다.)



마찬가지로 여러 삼각형이 겹쳐 있는 경우, **닮음의 힌트를 찾기 위해 공통인 각을 살펴봅시다.**
$\triangle BDE$ 와 $\triangle ACB$에서, $\angle B$ 는 공통이죠?

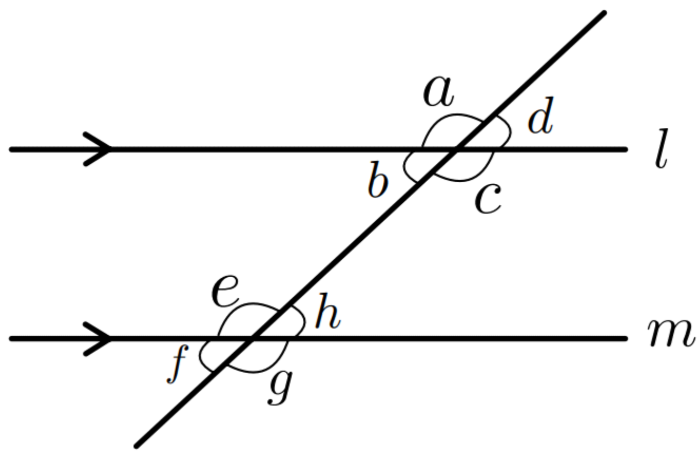
문제에서 $\angle ACB$ 와 $\angle BDE$은 크기가 같다네요.
같은 각 2개가 나왔으니 **AA 닮음** 상황이 만들어집니다.
따라서 $\triangle ABC \backsim \triangle BED$ 라는 결론이 나옵니다.

APOLO TIPS

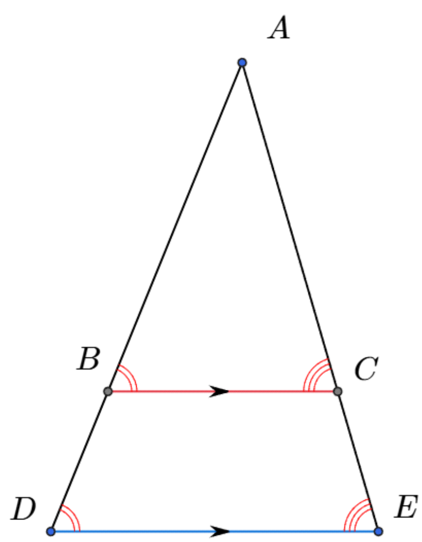
크기가 같은 각 2개만 찾으면 AA닮음 상황이 만들어지기 때문에,
다른 두 닮음조건보다 AA닮음이 자주 나와요.
SSS, SAS 닮음은 길이비를 따져야 해서 복잡하거든요.

CHECK 06 **평행선과 AA닮음**

삼각형의 **두 각이 같으면 AA 닮음** 상황이 만들어져요.
크기가 같은 각 2개만 찾으면 닮음이 되기 때문에, 여러분들이 자주 쓰게 될 성질입니다.

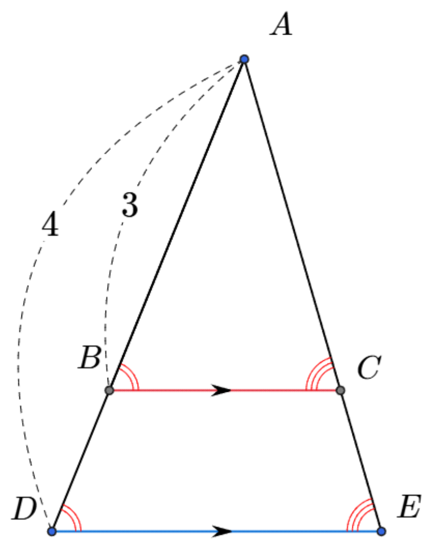


앞서 배운 평행선의 성질 기억나시나요?
우선 **맞꼭지각**은 항상 같고요, 평행선에서는 **동위각**과 **엇각**의 크기도 같습니다.
그래서 같은 각들이 엄청 많이 나와요.
이를 이용해서 **AA 닮음** 삼각형을 찾을 수 있습니다.

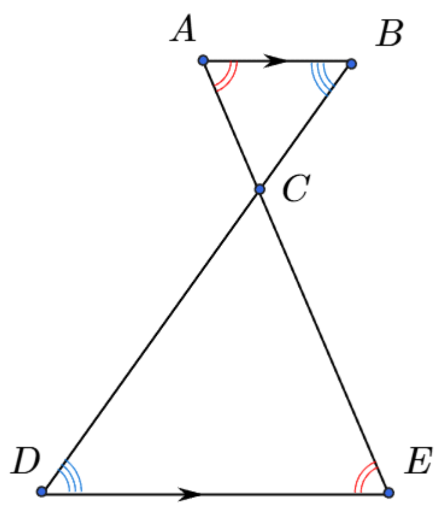


$\triangle ABC$ 와 $\triangle ADE$ 를 봅시다. $\overline{BC}$ 와 $\overline{DE}$ 는 평행이에요.
$\angle B$ 와 $\angle D$ 는 **동위각**으로 같아요.
마찬가지로 $\angle C$ 랑 $\angle E$ 도 **동위각**이라서 같습니다.

크기가 같은 각 2개가 나왔으니, **AA 닮음**을 찾을 수 있겠죠?
대응점을 고려하면 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$라고 할 수 있겠네요.



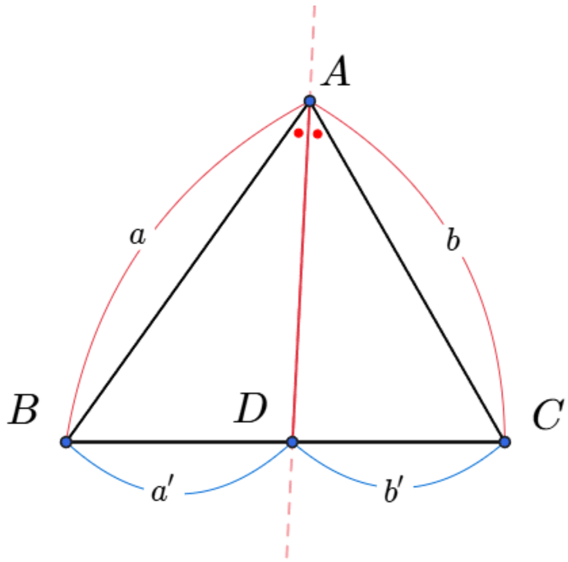
여기서 한 걸음 더 나아가서, 문제에서 이렇게 길이를 줬다면,
$\triangle ABC$ **와** $\triangle ADE$ **의 닮음비**가 $3:4$라는 것까지 파악할 수 있겠네요.



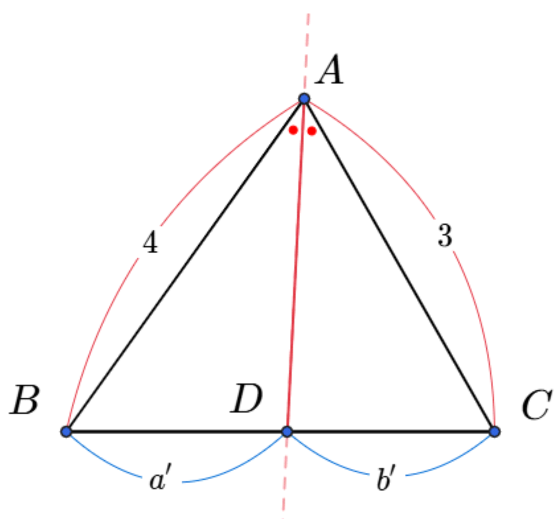
동위각을 썼으니, 이제는 **엇각** 차례입니다.
$\angle A$와 $\angle E$는 **엇각**이라서 크기가 같습니다.
$\angle B$와 $\angle D$도 크기가 같겠네요.
크기가 같은 각 2개가 나왔으니 **AA 닮음**을 찾을 수 있습니다.
대응점 순서를 생각하면 $\triangle CAB \backsim \triangle CED$라고 쓸 수 있겠네요.

CHECK 07 각의 이등분선과 비례식

닮음을 활용한 삼각형의 공식을 배워 볼게요.
각의 이등분선과 **선분의 길이**가 나온다면 이 공식을 활용하기 좋아요.



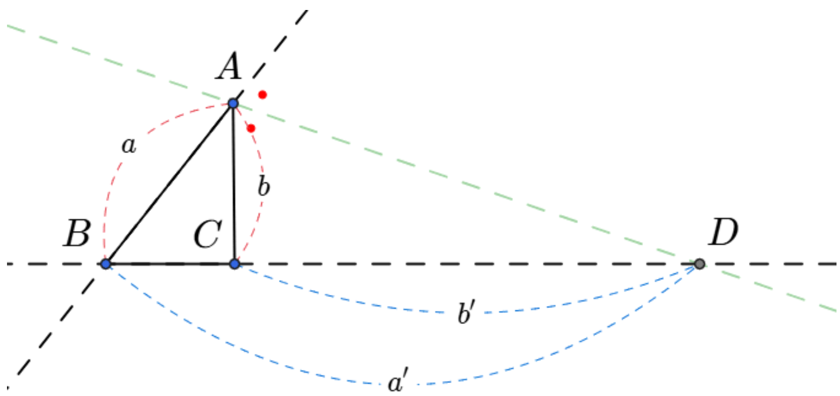
먼저 **내각의 이등분선**입니다.
$\triangle ABC$ 를 볼게요. 삼각형의 $\angle A$의 이등분선이 점선으로 나와 있네요.
이 이등분선이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 D 라고 할게요.
이때, $a : b = a' : b'$가 성립합니다.



예를 들어, 만약 $a=4$이고, $b=3$이라면,
$a' : b' = 4 : 3$이 되겠네요.

생각보다 자주 쓰는 공식입니다. 많은 학생이 이 공식을 까먹더라고요.

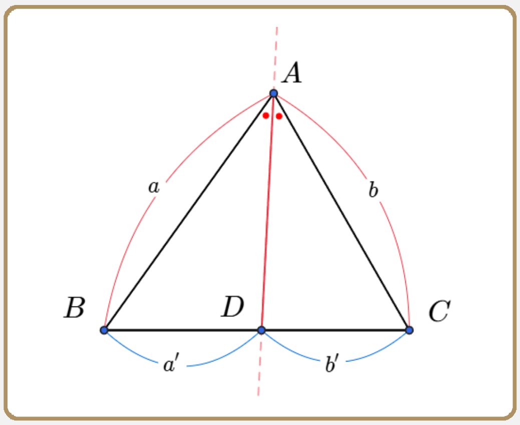
‘어, 내각의 이등분선이 나왔네. 이 공식 쓸 수 있나?’라는 생각을 떠올려보세요.

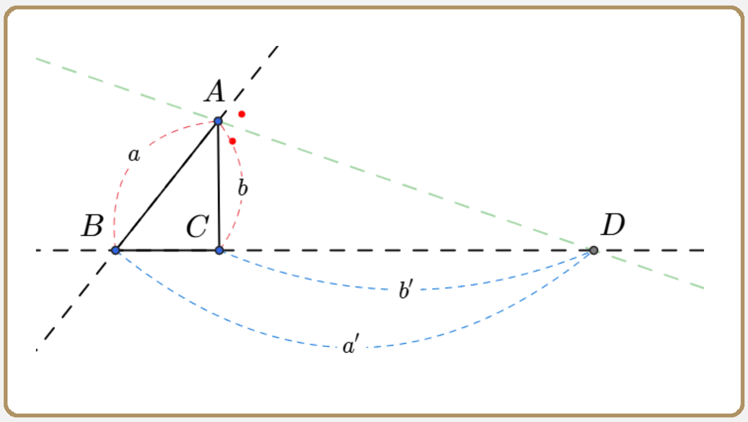


이번에는 **외각의 이등분선**을 살펴봅시다.
$\triangle ABD$ 에서 $\angle A$의 외각을 볼게요. $\angle A$의 외각을 이등분하는 선을 그어 봅시다.
점선이 $\overline{BC}$ 의 연장선과 만나는 점을 D 라고 한다면, $a : b = a' : b'$이에요.

내각 이등분선의 공식보다는 덜 자주 나오는데, 그래도 종종 나오니 기억합시다.
‘외각의 이등분선? 이 공식 쓸 수 있나?’ 라는 생각을 가져봅시다.

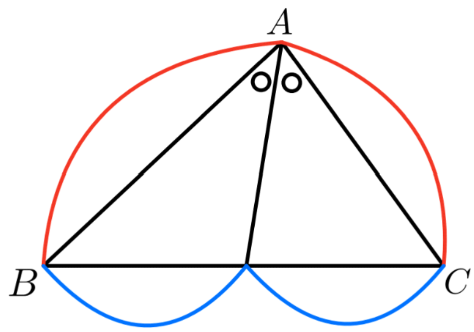
개념요약



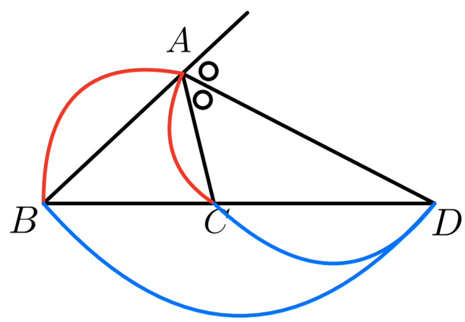


삼각형 내각이나 외각의 이등분선에서, $a : b = a' : b'$가 성립!

APOLO TIPS



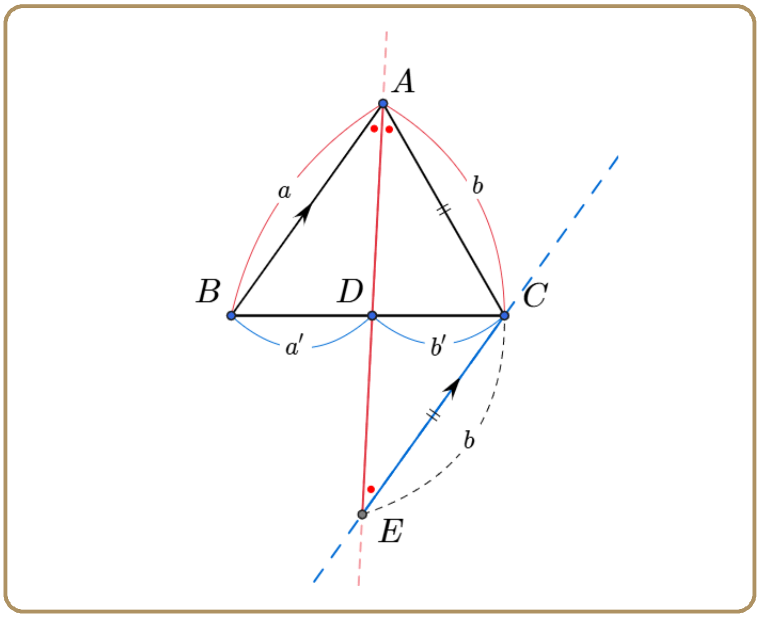
저는 내각의 이등분선 공식을 **하트 공식**이라고 부릅니다.
볼록볼록 튀어나온 녀석들이 뒤집힌 하트처럼 생겨서요.
어떤 학생은 짱구 엉덩이 공식이라고 하더라고요.



외각의 이등분선 공식은 **나이키 공식**이라고 부릅니다.
볼록볼록 그려 보면 나이키 로고처럼 생겨서요.

그믐달 공식이라고 부르는 사람도 있습니다.
마음에 드는 대로 부르시면 됩니다.

PROOF



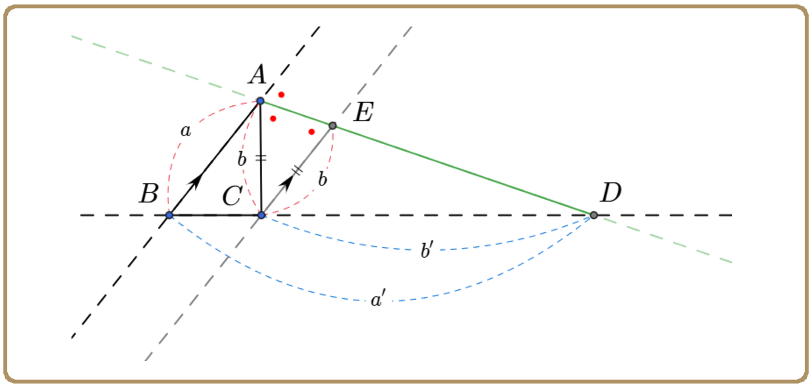
$\overline{AB}$ 와 평행이고 점 C 를 지나는 직선을 그립니다.
이 점선과, 각의 이등분선이 만나는 점을 찾습니다. 이 점을 E 라고 부를게요.

$\angle BAD$ 와 $\angle CAD$ 는 같습니다. 각이 이등분됐으니까요.
그리고 $\angle BAD$ 와 $\angle DEC$ 는 엇각으로 같습니다.
따라서, $\triangle ACE$ 는 이등변삼각형이고, $\overline{AC}$ 와 $\overline{EC}$ 의 길이는 b로 같습니다.

선분 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CE}$ 가 평행이기 때문에,
엇각의 성질에 의하여, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ECB$ 는 AA 닮음입니다.

닮음비를 활용하면 $a : b = a' : b'$가 됩니다.

PROOF



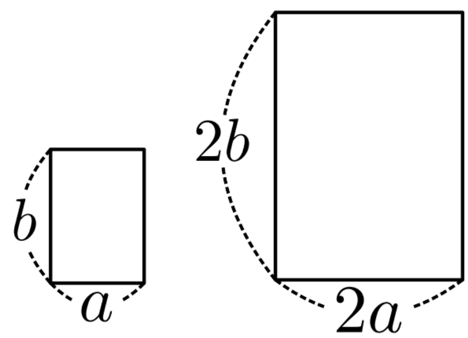
$\overline{AB}$ 에 평행이고 점 C 를 지나는 직선을 그려 봅시다. (그림에서는 회색 점선으로 표시되어 있어요.)
이 직선이 $\overline{AD}$ 와 만나는 점을 E 라고 할게요.

엇각의 성질을 사용하면 빨간 점으로 표시된 각의 크기가 모두 같아요.
그래서 $\triangle ACE$ 는 이등변삼각형이고, $\overline{AC}$ 와 $\overline{EC}$ 의 길이는 b로 같습니다.

또한, $\overline{AB}$ 와 $\overline{EC}$가 평행이므로,
$\angle B$ 와 $\angle ECD$ 의 크기는 같고, $\angle D$ 는 공통입니다.

따라서, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ECD$ 는 AA 닮음입니다.
닮음비를 활용하면 $a : b = a' : b'$가 됩니다.

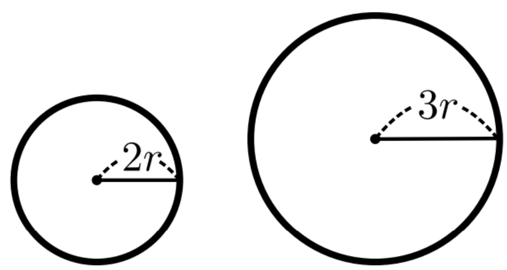
CHECK 08 닮음비와 넓이비



닮음비 $1:2$

넓이비 $ab:4ab=1:4$

닮음비가 $1:2$인 직사각형 두 개를 볼게요.
두 사각형의 넓이를 구하면 각각 ab, $4ab$입니다.



닮음비 $2:3$

넓이비 $4\pi:9\pi=4:9$

이번엔 닮음비가 $2:3$인 두 원이 있다고 해봅시다(아직 원의 넓이를 안 배웠다면 이해 안 갈 수도 있어요).
두 원의 넓이를 구하면 $4r^2$, $9r^2$ 이예요.

눈치채셨나요?
어떤 두 도형의 닮음비가 $m:n$ 이라면, 두 도형의 넓이비는 제곱인 $m^2:n^2$ 이 됩니다.
닮음비에서 숫자들을 제곱하면 넓이비가 된다고 생각하면 돼요.

개념요약

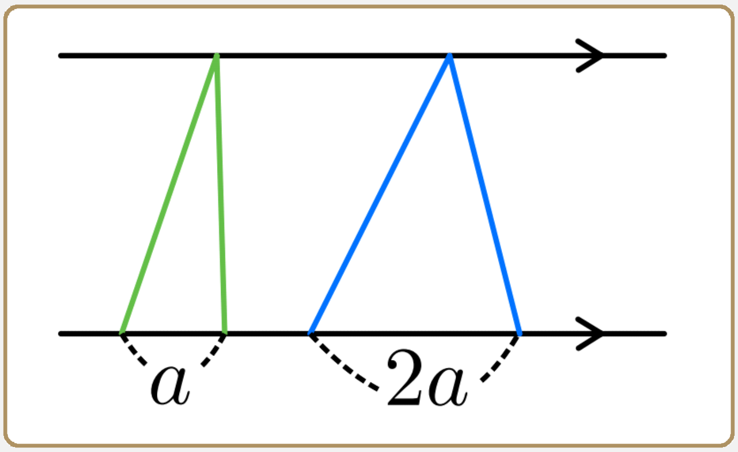
어떤 두 도형의 닮음비가 $m : n$ 이라면, 넓이비는 $m^2 : n^2$이다!

닮음비 $m : n$

$\rightarrow$ **넓이비** $m^2 : n^2$

생각해보기

넓이비 하면 떠오르는 녀석이 하나 있죠?
높이가 같은 두 삼각형에서, 밑변 길이비가 $1 : 2$이면, 넓이비도 $1 : 2$입니다.



헷갈리기 쉽습니다. 이 두 삼각형은 **닮음이 아닙니다. 밑변이 다르고 높이가 같은 삼각형**이에요.
'닮은 도형이니까 제곱해야지'라는 생각으로, 넓이비를 $1 : 4$ 라고 쓰면 틀립니다.

이 두 녀석은 닮음이랑은 관계가 없습니다.

닮은 도형에서는 길이비가 $1 : 2$라면 넓이비는 $1 : 4$지만,
위 상황에서는 길이비가 $1 : 2$라면 넓이비는 $1 : 2$입니다.
두 도형이 닮음이 아니라는 점, 헷갈리지 않도록 조심해야 해요.