

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} -\int_0^x f(t)dt & (x < 0) \\ \int_0^x f(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(0) = 0$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $2 < f(1) < 4$ 일 때, 방정식 $f(x) = x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

실수 전체의 집합에서 $f(x)$ 는 연속이고, $g(x)$ 는 삼차함수이다.

“그런데, 가장 파악하기 쉬운 삼차함수 $g(x)$ 가 굳이 $f(x)$ 에 기대어 표현되고 있네.”

하지만 우리에게 익숙한 함수는 $g(x)$ 이므로, 위 식을 변형하여 $f(x)$ 를 $g(x)$ 에 기대어 표현해보자.

$$\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} -g(x) & (x < 0) \\ g(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

좌변에 $x=0$ 을 대입해보면, $g(0)=0$ 이다.

ㄱ. $f(0) = 0$

순수하게 $f(x)$ 에 대한 식을 도출하기 위해 양변을 미분해보자.

$$f(x) = \begin{cases} -g'(x) & (x < 0) \\ g'(x) & (x \geq 0) \end{cases} \dots \textcircled{7}$$

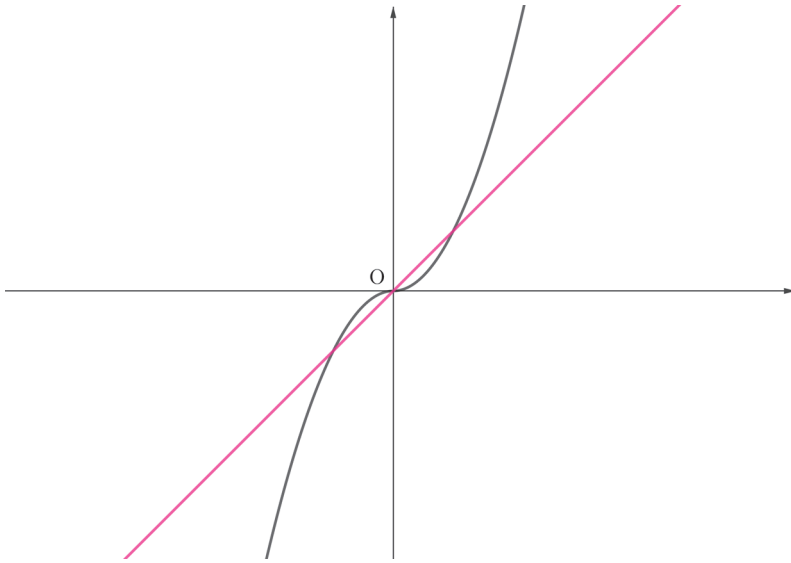
“발문에 따르면 $f(x)$ 는 연속함수이므로, $g'(0)=0$, $f(0)=0$ 이 되어야겠네.”

$\therefore f(0) = g'(0) = 0 \dots$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 극댓값을 갖는다.

찰하자.

i) $a=0$ 일 때, 교점의 개수는 3이다.



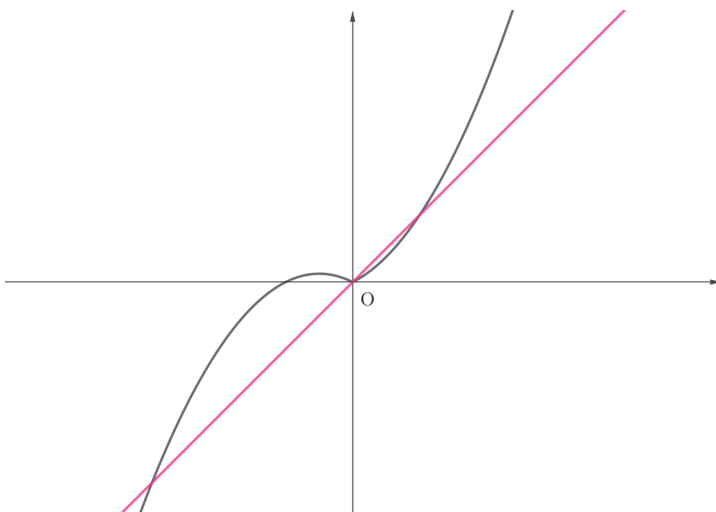
ii) $a > 0$ 일 때, 개형을 그려보자.

" $f(x)$ 를 그려보면 $x=0$ 에서 우미분계수에 따라 교점의 개수가 달라질 것 같은데.."

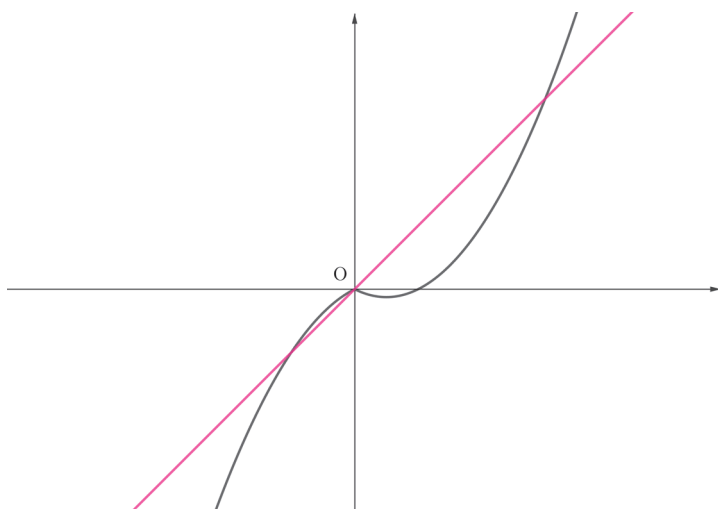
$f'(0+) = a$ 이고, $\ominus$ 에 대입하면 $-1 < f'(0+) < 1$ 이다.

"아, $2 < f(1) < 4$ 가 결국에는 $x=0$ 부근의 $f(x)$ 의 기울기 조건을 포장해놓은 것이구나..!"

따라서, 이때 $f(x)$ 의 기울기가 $y=x$ 보다 낮고, 개형을 그려보면 교점의 개수는 3이다.



iii) $a > 0$ 일 때, 개형을 그려보자.



ii)와 비슷한 논리로 이번엔 **좌미분계수**에 따라 교점의 개수가 달라진다.

$f'(0-) = -a$ 이고, ㉔에 대입하면 $-1 < f'(0-) < 1$ 이므로,

이때 $f(x)$ 가 $y=x$ 보다 덜 가파르다. 따라서 교점의 개수는 3이다.

따라서 ㄷ은 참이다. ... (참)

답: ④

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 주어진 식을 $f(x)$ 에 대한 식으로 변형한 뒤, 이를 통해 $f(x)$ 의 개형을 파악할 수 있는가?

2. $2 < f(1) < 4$ 를 수식적으로 풀어 이를 통해 $x=0$ 에서 $y=f(x)$ 의 좌미분계수와 우미분계수의 범위를 파악하고, 이를 통해 각각의 개형에서 $y=x$ 와의 교점의 개수를 파악할 수 있는가?

| 무엇으로 학생들을 변별했는가?

1. (나)에서 $g(x)$ 와 $G(x)$ 를 미지수로 두고, 항등식을 이용하여 계수를 비교할 수 있는가?

| NOTES

- (나)에서 $g(x)$ 가 이차식일 때에도, 좌변이 사차식이 되더라도
“사차항들끼리 계산하여 소거되면 삼차식이 되지 않을까?”라는 생각이 들 수도 있다.

하지만, $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수이고, 그 적분식인 $F(x)$ 의 최고차항의 계수도 양수이기 때문에
그러한 경우는 절대 성립할 수 없다.

또한, $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수라고 하더라도 $G(x)$ 의 최고차항의 계수도 음수가 되므로
 $f(x)G(x)+g(x)F(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수가 될 뿐, 절대로 소거가 되어 사차식이 삼차식이 될 수는 없다.

- 미적분 선택자라면, (나)를 다음과 같이 접근할 수도 있다.
(문제풀이에 걸리는 시간은 풀이의 방법과 큰 차이 없다.)

“곱함수의 미분결과 비슷하게 생겼네..? 한번 양변을 부정적분해보자.”

$$F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C_3 \cdots \textcircled{L}$$

“ $F(x) = 2x^2 - x + C_1$ 이고, $g(x)$ 는 다항함수이므로 $\textcircled{L}$ 과 비교해보면, $G(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수네.”

“두 함수 $F(x)$, $G(x)$ 을 구해야하니, $G(x) = x^2 + ax + C_2$ 라고 하고 $F(x)G(x)$ 에 대한 식을 세워,
 $\textcircled{L}$ 과 계수를 비교해보자.”

$$F(x)G(x) = (2x^2 - x + C_1)(x^2 + ax + C_2) = 2x^4 + (2a - 1)x^3 + (C_1 + 2C_2 - a)x^2 + (aC_1 - C_2)x + C_1C_2$$
$$F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C_3$$

이후 두 식의 계수를 비교하면 답이 나온다.