2026 이동훈 기출 https://atom.ac/books/12829
오르비 https://orbi.kr/

〈 공통 〉

01

[풀이]

$4^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{2\times\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=2$

답 ②

02

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2x-1$

이므로

$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=1$

답 ①

03

[풀이]

시그마의 성질에 의하여

$\sum_{k=1}^{7}(2a_k+1)$

$=2\sum_{k=1}^{7}a_k+1\times 7=2\times 8+7=23$

답 ③

04

[풀이]

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x\to 3-}f(x)=f(3)$, 즉 $-9+a=15-a$

$\therefore\ a=12$

답 ③

05

[풀이]

$\int_0^2(6x^2-2x+1)dx$

$=\left[2x^3-x^2+x\right]_0^2$

$=14$

답 ②

06

[풀이]

함수 $f(x)$의 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi,\ b=2$

함수 $f(x)$의 최댓값이 8이므로

$a+1=8,\ a=7$

$\therefore\ a+b=9$

답 ④

07

[풀이]

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=10x+f(x)+xf'(x)$

$\therefore\ g'(3)=30+f(3)+3f'(3)$

$=30+2+3=35$

답 ⑤

08

[풀이]

삼각함수의 성질에 의하여

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta>0$

이므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

문제에서 주어진 등식의 양변을 $\cos\theta(\neq 0)$로 나누

면

$\tan\theta = 2$

이때, θ는 제1사분면의 각이므로

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤

[참고]

다음과 같이 $\cos\theta$의 값을 구해도 좋다.

문제에서 주어진 등식의 양변을 제곱하면

$4\cos^2\theta = \sin^2\theta$, 즉 $4\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta$,

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{5}$

그런데 θ는 제1사분면의 각이므로

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

09

[풀이]

문제에서 주어진 등식을 정리하면

$$\int_{-3}^{3}\{(x+1)f(x) - f(x)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{3} xf(x)dx$$

$$=\int_{-3}^{3}(x^3 + ax^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{3} ax^2 dx$$

($\because$ 함수 $y = x^3$은 원점에 대하여 대칭이고, 함수 $y = ax^2$은 y축에 대하여 대칭이다.)

$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^3 = 18a = 36$$

$\therefore\ a = 2$

답 ②

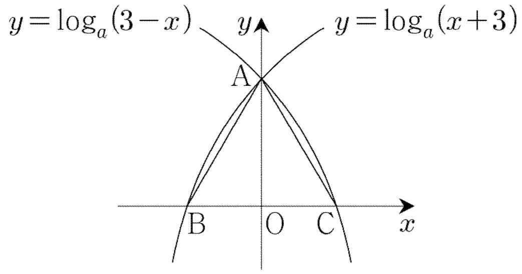
10

[풀이]

함수 $y = \log_a(x+3)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시키면

함수 $y = \log_a(-x+3)$의 그래프와 일치한다.

이때, 두 곡선은 y축 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ \log_a 3)$에서 만난다. (아래 그림)



두 함수의 방정식 각각에 $y = 0$을 대입하면

$0 = \log_a(x+3)$에서 $x = -2$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$

$0 = \log_a(-x+3)$에서 $x = 2$, $\mathrm{C}(2,\ 0)$

정삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 4$이므로

$\overline{\mathrm{AO}} = 2\sqrt{3} = \log_a 3$, $a^{2\sqrt{3}} = 3$,

$a = 3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = 3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

$\therefore\ a = 3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

답 ①

11

[풀이]

점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도와 가속도를 각각 v, a

라고 하면

$v = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 2t - 1$, $a = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 2$

ㄱ. (거짓)

$x(1) = 0$이므로 시각 $t = 1$일 때 점 P는 원점에 위치한다.

ㄴ. (참)

$v(1) = 0$

시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이다.

ㄷ. (참)

$v(t)=0 \Leftrightarrow (3t+1)(t-1)=0 \Leftrightarrow t=1$

$t=1$의 좌우에서 v의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 P는 $t=1$일 때 운동 방향이 바뀐다.

이때, 가속도는 $a(1)=4$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

12

[풀이]

(나): $a_{n+1}=a_n-3$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$

문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하면

아래의 표를 얻는다.

a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1-3	$\cancel{a_1-6}$	
		$2a_1-6$	3
		$(a_1=6)$	12
	$2a_1$	$2a_1-3$	0
		$(a_1=3)$	6
		$4a_1$	-3
		$(a_1=0)$	0

조건 (가)를 이용하면

$a_1(=a_3)$의 값은 6 또는 3 또는 0이고,

각각에 대하여 a_4의 값이 결정된다.

따라서 a_4의 최댓값은 12이다.

답 ②

13

[풀이]

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}(=g(x))$의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라고 하자.

(단, $\alpha<\beta$)

(A의 넓이)+(C의 넓이)=(B의 넓이)

이므로

$$\int_0^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{\beta}^{k}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}dx$$

정리하면

$$\int_0^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$+\int_{\beta}^{k}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^{k}\{f(x)-g(x)\}dx=0$$

이제 k의 값을 구하자.

$$\int_0^{k}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^{k}\left(3x^2-\frac{22}{3}x+\frac{8}{3}\right)dx$$

$$=\left[x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^k$$

$$=k^3-\frac{11}{3}k^2+\frac{8}{3}k=0,\ 3k^2-11k+8=0,$$

$$(3k-8)(k-1)=0$$

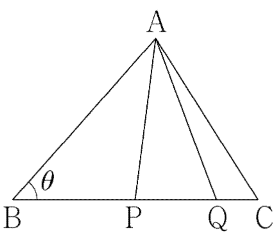
$$\therefore\ k=\frac{8}{3}$$

답 ④

14

[풀이]

$\angle \mathrm{ABC}=\theta$로 두자.



문제에서 주어진 내분점에 대한 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{BP}}=3k$, $\overline{\mathrm{PQ}}=2k$, $\overline{\mathrm{QC}}=k$ $(k>0)$
로 둘 수 있다.
삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{2}:3$
$(=\sin(\angle\mathrm{QAP}):\sin(\angle\mathrm{APQ}))$
그런데 $\overline{\mathrm{AQ}}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=2(=2k)$
$k=1$이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=3$, $\overline{\mathrm{QC}}=1$
삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{7})^2+5^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{7}\times5}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=(2\sqrt{7})^2+6^2-2\times2\sqrt{7}\times6\times\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$=22$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{22}$
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{22}}{\frac{3}{4}}=2R,\ R=\frac{2}{3}\sqrt{22}$$

따라서 구하는 외접원의 넓이는

$$\pi R^2=\frac{88}{9}\pi$$

답 ②

15

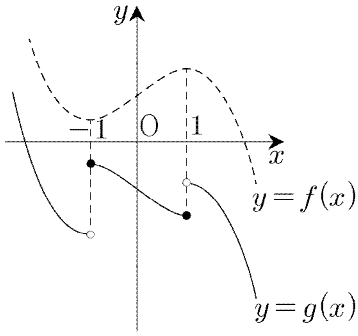
[풀이]
함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (|x|>1)\\ -f'(x) & (|x|<1)\end{cases}$$

(가): $a\neq\pm1$일 때,

$$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)\le0$$

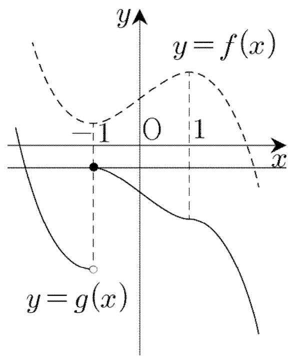
이므로
$|a|>1$: $f'(a)\le0$
$|a|<1$: $-f'(a)\le0$, 즉 $f'(a)\ge0$
즉, 구간 $(-1,\ 1)$에서 함수 $f(x)$는 증가하고,
구간 $(-\infty,\ -1)$, $(1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.
따라서 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음(−)수이고,
함수 $f(x)$는 $x=\pm1$에서 극값을 가진다.
예를 들어 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 다음과 같다고 하자.



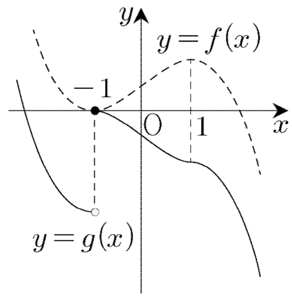
위의 그림처럼 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 불연속이면

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

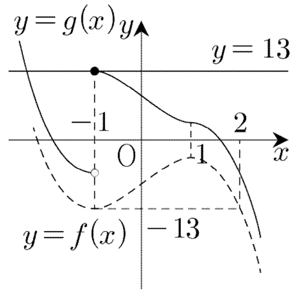
$=(x=1$에서 함수 $g(x)$의 우미분계수$)$
의 값이 존재하지 않는다. (조건 (가)를 만족하지 않음)
따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 한다.
(1) $f(-1)>0$인 경우



방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 음(−)수이다.
이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(2) $f(-1)=0$인 경우



방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 0이다.
이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(3) $f(-1)<0$인 경우
조건 (나)를 만족시키는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.
(단, $k=-2f(1)$)



삼차함수의 비율관계에 의하여
$f(x)-(-13)=p(x+1)^2(x-2)$
(단, $p<0$)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=2p(x+1)(x-2)+p(x+1)^2$
$f'(0)=-3p=6$, $p=-2$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=-2(x+1)^2(x-2)-13$
$\therefore\ k+f\left(\frac{1}{2}\right)=-2f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)$
$=\frac{15}{4}$
답 ①

16

[풀이]
진수의 조건에 의하여 $x>1$
문제에서 주어진 등식을 정리하면
$\log_5(x+1)(x-1)=\log_5 3$
$(\because \log_{25}9=\log_{5^2}3^2=\frac{2}{2}\log_5 3=\log_5 3)$
$x^2-1=3$, $x^2=4$, $\therefore\ x=2(\because x>1)$
답 2

17

[풀이]
부정적분의 정의에 의하여
$f(x)=\int f'(x)dx=x^3+2x^2+C$
(단, C는 적분상수)
$f(0)=C=3$
$\therefore\ f(1)=6$
답 6

18

[풀이]
$\sum_{k=1}^{6}(k^2+2k)$
$=\frac{6\times7\times13}{6}+2\times\frac{6\times7}{2}$
$=133$
답 133

19

[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$f(0)=a=20$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

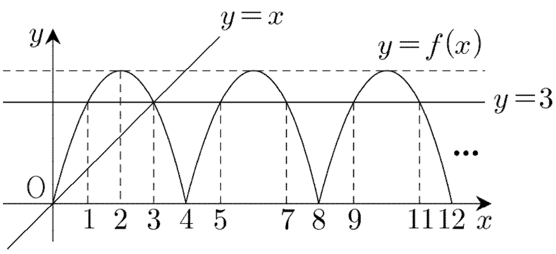
$\therefore\ f(2)=3\times8-9\times4+20=8$

답 8

20

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는



방정식 $f(x)=x$의 모든 실근이 0, 3이므로

방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근을 구하는 것은

방정식 $f(x)\times(f(x)-3)=0$의 실근을 구하는 것과 같다.

($\because f(x)=t$로 두면

$f(f(x))=f(x) \Leftrightarrow f(t)=t$

이므로 $t=0$ 또는 $t=3$, 즉

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=3$)

$0\le x<4$일 때, 방정식 $f(x)\times(f(x)-3)=0$의

모든 실근은 0, $\boxed{1}$, 3이므로

($\because f(x)=0$을 풀면 $x=0$,

$f(x)=3$을 풀면 $x=1$ 또는 $x=3$)

$a_1=0$, $a_2=\boxed{1}$, $a_3=3$

이다. 또한 모든 실수 x에 대하여

$f(x+4)=f(x)$이므로

세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은

첫째항이 각각 0, $\boxed{1}$, 3이고

공차가 모두 $\boxed{4}$인 등차수열이다.

($\because$ 수열 $\{a_n\}$을 쓰면

(0, 1, 3), (4, 5, 7), (8, 9, 11), $\cdots$)

일반항 a_{3n-2}, a_{3n-1}, a_{3n}은

$a_{3n-2}=4n-4$,

$a_{3n-1}=4n-3$,

$a_{3n}=4n-1$

따라서 $a_{20}+a_{21}+a_{22}=25+27+28=\boxed{80}$이다.

(가): $p=1$

(나): $q=4$

(다): $r=80$

$\therefore\ p+q+r=85$

답 85

21

[풀이]

$a=1$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값이 존재한다.

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times|(x-1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times\{-(x-1)(x-2)\}}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1+}\{-g(x)\}=-g(1),$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{g(x)\times|(x-1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{g(x)\times(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1-}g(x)=g(1)$$

에서 $-g(1)=g(1)$, 즉 $g(1)=0$

$a=2$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값이 존재한다.

마찬가지의 방법으로

$g(2)=0$

이제 함수 $g(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$g(x)=(x-1)(x-2)p(x)$

(단, $p(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.)

$a=1$일 때, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이 존재한다.

$$\lim_{x\to1+}\frac{|(x-1)(x-2)||p(x)-1|}{(x-1)(x-2)p(x)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{-(x-1)(x-2)|p(x)-1|}{(x-1)(x-2)p(x)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{-|p(x)-1|}{p(x)}$$

(만약 $p(1)=0$이면 극한이 존재하지 않으므로 $p(1)\neq0$)

$$=-\frac{|p(1)-1|}{p(1)},$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{|(x-1)(x-2)||p(x)-1|}{(x-1)(x-2)p(x)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x-2)|p(x)-1|}{(x-1)(x-2)p(x)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{|p(x)-1|}{p(x)}$$
$$=\frac{|p(1)-1|}{p(1)}$$

에서 $-\dfrac{|p(1)-1|}{p(1)}=\dfrac{|p(1)-1|}{p(1)}$

$p(1)=1$ …㉠

$a=2$일 때, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이 존재한다.

마찬가지의 방법으로

$p(2)=1$ …㉡

㉠, ㉡에서

$p(x)-1=(x-1)(x-2)$, 즉

$p(x)=x^2-3x+3$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

$\therefore\ g(-1)=42$

답 42

22

[풀이]

문제에서 주어진 (k가 포함된) 두 함수의 방정식을 연립하자.

$$2^x+\frac{k}{2}=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

$2^x=t(>0)$로 두면

$$t+\frac{k}{2}=\frac{k}{t}+k-2$$

양변에 $t(>0)$를 곱하여 정리하면

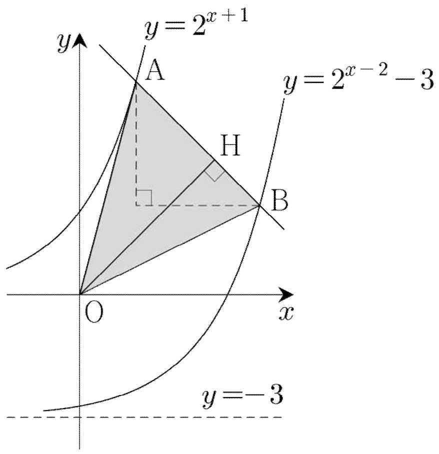
$t^2+\left(2-\dfrac{k}{2}\right)t-k=0$, $(t+2)\left(t-\dfrac{k}{2}\right)=0$,

$t=\dfrac{k}{2}(=2^x)$, $x=\log_2\dfrac{k}{2}$, $\mathrm{A}\left(\log_2\dfrac{k}{2},\ k\right)$

$\log_2\dfrac{k}{2}=x$로 두면 $k=2^{x+1}$이므로

$\mathrm{A}(x,\ 2^{x+1})$

이때, 점 A는 곡선 $y=2^{x+1}$ 위에 있다. (아래 그림)



곡선 $y=2^{x+1}$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동시키면

곡선 $y=2^{x-2}-3$과 일치한다. 이때, 점 A는 점 B로 이동한다.

위의 그림에서 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각

형의 밑변의 길이는 3이므로

$\overline{AB}=3\sqrt{2}$

점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

직선 AB의 방정식은 $x+y=\log_2 \frac{k}{2}+k$

이므로 점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{OH}=\frac{\left|k+\log_2 k-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{k+\log_2 k-1}{\sqrt{2}}$

$(\because k>1)$

$(\triangle\text{AOB의 넓이})=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\overline{OH}=16$

에서 $\overline{OH}=\frac{32}{3\sqrt{2}}$이므로

$\frac{k+\log_2 k-1}{\sqrt{2}}=\frac{32}{3\sqrt{2}}$

$\frac{q}{p}=k+\log_2 k=\frac{35}{3}$

$\therefore\ p+q=38$

답 38

〈 확률과 통계 〉

23

[풀이]

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{6!}{4!}=30$

답 ③

24

[풀이]

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$

그런데 문제에서 주어진 조건에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=1$

이므로 두 사건 A, B는 서로 여사건이다.

즉, $A^C=B\ (B^C=A)$

$\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$에서

$\mathrm{P}(B)=2(1-\mathrm{P}(B))$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

답 ④

25

[풀이]

$(2x-1)^5(x+1)$

$=\underbrace{(2x-1)^5x}_{㉠}+\underbrace{(2x-1)^5}_{㉡}$

㉠: x^3의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_2 2^2(-1)^3=-40$

㉡: x^3의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_3 2^3(-1)^2=80$

따라서 주어진 전개식에서 x^3의 계수는

$-40+80=40$

답 ③

26

[풀이]

우선 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수가 될 경우의 수를 구하자.

●○○○○○●

양 끝의 ●에 모두 홀수(1, 3, 5, 7)가 오고, ○에 나머지 수가 오면 된다.

경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2 \times 5!$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{{}_4\mathrm{P}_2 \times 5!}{7!}=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

답 ⑤

27

[풀이]

크게 다음의 두 경우를 생각할 수 있다.

• 남학생 4명, 여학생 1명을 택하는 경우

경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_4 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times 4! = 360$

• 남학생 5명을 택하는 경우

$4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$360+24=384$

답 ①

28

[풀이]

우선 모든 시행이 끝났을 때, 상자 B에 들어간 공의 개수를 생각하자.

홀+홀+홀+홀+홀=홀

홀+홀+홀+짝+짝=홀

홀+짝+짝+짝+짝=홀

이므로

$1+1+1+1+1=5$ …(경우1)

: 3의 배수가 나오지 않는다.

예를 들어 2, 4, 2, 2, 1이 가능하다.

$1+1+1+2+2=7$ …(경우2)

: 3의 배수가 오직 2개만 나온다.

예를 들어 3, 2, 6, 1, 5가 가능하다.

$1+2+2+2+2=9$ …(경우3)

: 3의 배수가 오직 4개만 나온다.

예를 들어 3, 3, 6, 5, 6가 가능하다.

(경우1) ○

모든 시행이 끝났을 때, 두 상자 A, C에 들어간 공의 개수는 각각

A: $1+1+1+1+1=5$

C: $1+1+1+1+1=5$

$5+5=10>8$이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

확률을 p라고 하면

$$p=\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

(경우2) ○

모든 시행이 끝났을 때, 두 상자 A, C에 들어간 공의 개수는 각각

A: $1+1+1+1+1=5$

C: $1+1+1+0+0=3$

$5+3=8 \geq 8$이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

확률을 q라고 하면

$$q={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

(경우3) ×

모든 시행이 끝났을 때, 두 상자 A, C에 들어간 공의 개수는 각각

A: $1+1+1+1+1=5$

C: $1+0+0+0+0=1$

$5+1=6<8$이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

확률을 r이라고 하면

$$r={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{p+q}{p+q+r}=\dfrac{56}{61}$

답 ⑤

29

[풀이]

$a+b=8$일 사건을 A,

$b\ge c$일 사건을 B라고 하자.

세 사건 A, B, $A\cap B$의 확률을 구하자.

• 사건 A가 일어날 확률

$8=2+6=6+2$

$=3+5=5+3$

$=4+4$

이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 5이다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $5\times6=30$이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{30}{6^3}$

• 사건 B가 일어날 확률

순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 6^2이고,

$b=c$일 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 6이므로

$b>c$일 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는

$\dfrac{6^2-6}{2}=15$

($\because b>c$인 경우와 $b<c$인 경우의 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 같다.)

따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$(15+6)\times6=126$이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{126}{6^3}$

• 사건 $A\cap B$가 일어날 확률

$(a,\ b)=(2,\ 6)$에 대하여 $6\ge c$인 c의 개수는 6,

$(a,\ b)=(3,\ 5)$에 대하여 $5\ge c$인 c의 개수는 5,

$(a,\ b)=(4,\ 4)$에 대하여 $4\ge c$인 c의 개수는 4,

$(a,\ b)=(5,\ 3)$에 대하여 $3\ge c$인 c의 개수는 3,

$(a,\ b)=(6,\ 2)$에 대하여 $2\ge c$인 c의 개수는 2

이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$6+5+4+3+2=20$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{20}{6^3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{30}{6^3}+\dfrac{126}{6^3}-\dfrac{20}{6^3}=\dfrac{17}{27}$

$\therefore\ p+q=44$

답 44

30

[풀이]

(가): 주어진 부등식에 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 대입하면

$f(2)+3\ge f(1)+1$

$f(3)+3\ge f(2)+2$

$f(4)+3\ge f(3)+3$

$f(5)+3\ge f(4)+4$

위의 네 부등식을 연립하면

$1\le f(1)\le f(2)+2\le f(3)+3$

$\le f(4)+3\le f(5)+2\le7$ $\cdots(*)$

(1) $f(2)=1$인 경우

(*): $1\le f(1)\le3$,

$3\le f(3)+3\le f(4)+3\le f(5)+2\le7$

즉, $f(1)=1$ 또는 2 또는 3이고,

$1\le f(3)\le f(4)\le f(5)-1\le4$

1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 세 개를 택하는 중복조합의 수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

이므로, 함수 f의 개수는

$3\times20=60$

(2) $f(2)=3$인 경우

(*): $1 \le f(1) \le 5$,

$5 \le f(3)+3 \le f(4)+3 \le f(5)+2 \le 7$

즉, $f(1)=1$ 또는 2 또는 3 또는 4 또는 5이고,

$2 \le f(3) \le f(4) \le f(5)-1 \le 4$

2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 세 개를 택하는 중복조합의 수는

${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$

이므로, 함수 f의 개수는

$5 \times 10 = 50$

(3) $f(2)=5$인 경우

(*): $1 \le f(1) \le 5 (\le 7)$,

$7 \le f(3)+3 \le f(4)+3 \le f(5)+2 \le 7$

즉, $f(1)=1$ 또는 2 또는 3 또는 4 또는 5이고,

$f(3)+3=f(4)+3=f(5)+2=7$에서

$f(3)=f(4)=4$, $f(5)=5$

이므로 함수 f의 개수는

$5 \times 1 = 5$

따라서 (1), (2), (3)에서 함수 f의 개수는

$60+50+5=115$

답 115

〈 미적분 〉

23

[풀이]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=12$$

답 ①

24

[풀이]

음함수의 미분법에 의하여

$3+y'-\sin(xy)\times(y+xy')=0$

$x=0$, $y=1$을 대입하면

$3+y'-\sin(0\times1)\times(1+0\times y')=0$,

$y'=-3$

접선의 방정식은

$y=-3x+1$

$y=0$을 대입하면

$\therefore\ x=\frac{1}{3}$

답 ②

25

[풀이]

문제에서 주어진 급수가 수렴하므로 일반항은 0에 수렴한다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$$

$=-3+a=0$, $a=3$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-3n}{n}+\frac{3n+6}{n+3}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-3+\frac{3}{n}+3-\frac{3}{n+3}\right)$$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{3}{n+3}\right)$

$=\left(\frac{3}{1}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{3}-\frac{3}{6}\right)$

$+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{7}\right)+\cdots$

$=3+\frac{3}{2}+1=\frac{11}{2}$

$\therefore\ a+S=3+\frac{11}{2}=\frac{17}{2}$

답 ④

26

[풀이]

역함수의 성질에 의하여

$g(a)=b$이면 $f(b)=a$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(a)=\frac{1}{8}$이면 $f'(b)=8$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3e^{3x}-6e^{2x}+4e^{x}$

이제 방정식 $f'(x)=8$을 풀자.

$e^{x}=t$로 두면

$3t^3-6t^2+4t-8=0$,

$(3t^2+4)(t-2)=0$, $t=2(=e^x)$

$x=\ln 2(=b)$

$a=f(b)=f(\ln 2)=8-3\times4+4\times2=4$

$\therefore\ a+f'(g(a))=4+f'(b)=4+8=12$

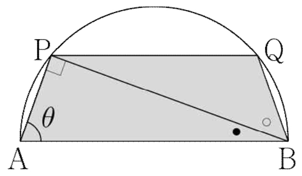
답 ②

27

[풀이]

삼각형 ABP는 문제에서 주어진 반원에 내접하므로

$\angle \mathrm{APB}=90^{\circ}$



(단, $\bullet=\frac{\pi}{2}-\theta$, $\circ=2\theta-\frac{\pi}{2}$)

직각삼각형 ABP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\theta(=\overline{\mathrm{BQ}})$, $\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$

$f(\theta)=(\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이$)+(\triangle\mathrm{PBQ}$의 넓이$)$

$=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times2\times\sin\theta$

$+\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\cos\theta\times\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$

$=2\cos\theta\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta\cos2\theta$

$=\sin2\theta-\sin2\theta\cos2\theta$

$(\because \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta)$

$=\sin2\theta-\frac{1}{2}\sin4\theta$

$(\because \sin4\theta=2\sin2\theta\cos2\theta)$

한편 직각삼각형 ABP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:3$이면 $\tan a=3$,

$\cos a=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin a=\frac{3}{\sqrt{10}}$

함수 $f(\theta)$의 도함수는

$f'(\theta)=2\cos2\theta-2\cos4\theta$

$=2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2(\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta)$

$(\because \cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$,

$\cos4\theta=\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta)$

$=2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2$

$+2\times4\times\sin^2\theta\cos^2\theta$

$(\because \cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$,

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta)$

$\therefore\ f'(a)=2\times\left(\frac{1}{10}-\frac{9}{10}\right)-2\left(\frac{1}{10}-\frac{9}{10}\right)^2$

$+8\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}$

$=-\frac{54}{25}$

답 ③

[참고]
위의 식 변형 과정에서 삼각함수의 배각공식이 사용되었다.
아래는 이 공식들에 대한 증명이다.

$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$

$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$

$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

그리고

$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta$,

$\cos 4\theta = \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta$

임을 알 수 있다.

28

[풀이1]
조건 (나)에서 사잇값 정리에 의하여
$f(\alpha)=0$이고, $-3<\alpha<3$인
α가 적어도 하나 존재한다. …(*)
조건 (가)에서

$(f(x))^5+(f(x))^3$

$= \ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)-(ax+b)$ …㉠

양변을 x에 대하여 미분하면

$5(f(x))^4 f'(x)+3(f(x))^2 f'(x)$

$= \dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}-a$ …㉡

다시 양변을 x에 대하여 미분하면

$20(f(x))^3(f'(x))^2+5(f(x))^4 f''(x)$

$+6f(x)(f'(x))^2+3(f(x))^2 f''(x)$

$= f(x)\times$

$\{20(f(x))^2(f'(x))^2+5(f(x))^3 f''(x)$

$+6(f'(x))^2+3f(x)f''(x)\}$

$= \dfrac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)^2}$ …㉢

(비로소 두 상수 a, b가 소거되었다.)
㉢에서 양변을 0으로 두면

$f(x)\times\{20(f(x))^2(f'(x))^2+5(f(x))^3 f''(x)$

$+6(f'(x))^2+3f(x)f''(x)\}=0$

$\Leftrightarrow$

$\dfrac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)^2}=0$

$\Leftrightarrow$

$x=-2$ 또는 $x=1$

이때, 방정식 $f(x)=0$의 해집합을 P라고 하면
((*)에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 적어도 한 개 이상의 실근을 갖는다.)

$-2\in P$ 또는 $1\in P$

이고, 집합 P는 -2, 1 외의 실수를 원소로 갖지 않는다.
따라서

$P=\{-2\}$ 또는 $P=\{1\}$ 또는 $P=\{-2, 1\}$

$1\in P$라고 가정하고, ㉡에 $x=1$을 대입하면

$5(f(1))^4 f'(1)+3(f(1))^2 f'(1)$

$= \dfrac{2}{3}-a$, 즉 $0=\dfrac{2}{3}-a$, $a=\dfrac{2}{3}$

㉡에 $x=2$를 대입하면

$5(f(2))^4 f'(2)+3(f(2))^2 f'(2)$

$= \underbrace{\{5(f(2))^4+3(f(2))^2\}}_{0\text{ 또는 }+}f'(2)$

$= \dfrac{10}{17}-\dfrac{2}{3}<0$에서 $f'(2)<0$

그런데 이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
따라서 $1\notin P$이고, $P=\{-2\}$
(이때, (*)의 α의 값이 유일하게 결정된다.)
㉡에 $x=-2$를 대입하면

$5(f(-2))^4 f'(-2)+3(f(-2))^2 f'(-2)$

$= -\dfrac{2}{3}-a$, 즉 $0=-\dfrac{2}{3}-a$, $a=-\dfrac{2}{3}$

이때, ㉡에 $x=2$를 대입하면 우변이 양수이므로

$f'(2)>0$임을 보일 수 있다.
㉠에 $x=-2$를 대입하면

$(f(-2))^5+(f(-2))^3=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}-b$, 즉

$0=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}-b$, $b=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}$

$\therefore\ a\times e^b=-\frac{2}{3}\times e^{\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}\times e^{-\frac{4}{3}}$

$=-3e^{-\frac{4}{3}}$

답 ①

[참고1]
집합의 포함관계, 연산의 관점에서 풀이 과정을 다시 생각해보자.

㉠: $(f(x))^3\{(f(x))^2+1\}$

$=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$

㉡: $(f(x))^2f'(x)\{5(f(x))^2+3\}$

$=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}-a$

㉢: $f(x)\times$
$\{20(f(x))^2(f'(x))^2+5(f(x))^3f''(x)$
$+6(f'(x))^2+3f(x)f''(x)\}$

$=\dfrac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}$

다음의 필요충분조건이 성립한다.

㉠: $f(x)=0$

$\Leftrightarrow\ \ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)=0$

㉡: $f(x)=0$ 또는 $f'(x)=0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}-a=0$

㉢: $f(x)=0$ 또는
$20(f(x))^2(f'(x))^2+5(f(x))^3f''(x)$
$+6(f'(x))^2+3f(x)f''(x)=0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}=0$

두 방정식
$f'(x)=0$,
$20(f(x))^2(f'(x))^2+5(f(x))^3f''(x)$
$+6(f'(x))^2+3f(x)f''(x)=0$
의 해집합을 각각 Q, R이라고 하면

㉠: $P\Leftrightarrow\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)=0$

㉡: $P\cup Q\Leftrightarrow\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}-a=0$

㉢: $P\cup R=\{-2,\ 1\}$
㉢에서 $P\subset\{-2,\ 1\}$이므로
$P=\{-2\}$ 또는 $P=\{1\}$ 또는 $P=\{-2,\ 1\}$

㉡+(나)에서 $1\not\in P$이므로 $P=\{-2\}$, $a=-\frac{2}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 $b=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}$

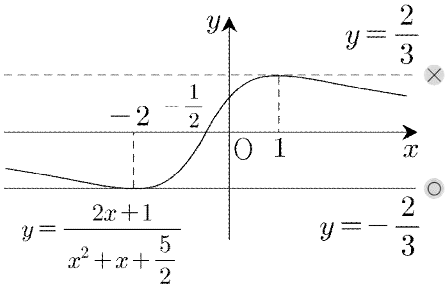
㉠, ㉡, ㉢의 오른쪽에서 주어진 세 방정식의 해집합은 모두 집합 P를 포함하고 있으므로 두 상수 a, b의 값을 구할 수 있었다. (다시 말하면 세 개의 항등식에서 미정계수의 결정을 한 것이다.) 이런 이유로 (가)에서 주어진 등식을 두 번 미분한 것이다.

[참고2]

$a=-\frac{2}{3}\left(a\neq\frac{2}{3}\right)$임을 다음과 같이 보일 수 있다.

곡선 $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$과 직선 $y=a$를 한 평면 위에 그리면 다음과 같다.

(이때, 곡선은 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.)



$a=\frac{2}{3}$이면

ⓛ: $f'(x)\underbrace{\{5(f(x))^4+3(f(x))^2\}}_{0\text{ 또는 }+}$

$=\underbrace{\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}}_{\text{곡선}}-\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{직선}}\le 0$

에서 $f'(x)\le 0$, 즉 $f'(2)\le 0$

이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a=-\frac{2}{3}$이면

ⓛ: $f'(x)\underbrace{\{5(f(x))^4+3(f(x))^2\}}_{0\text{ 또는 }+}$

$=\underbrace{\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}}_{\text{곡선}}+\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{직선}}\ge 0$

에서 $f'(x)\ge 0$

(단, 등호는 $x=-2$일 때 성립한다.)

즉, $f'(2)>0$

이는 조건 (나)를 만족시킨다.

$\therefore\ a=-\frac{2}{3}$

[풀이2]

함수 $f(x)$가 이계도함수를 가지므로

함수 $f'(x)$는 미분가능하고, 연속이다.

함수 $f'(x)$가 연속임을 이용하여 문제를 해결하자.

조건 (나)에서 사잇값 정리에 의하여

$f(\alpha)=0$이고, $-3<\alpha<3$인

α가 적어도 하나 존재한다. $\cdots(*)$

조건 (가)에서

$(f(x))^5+(f(x))^3$

$=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$ $\cdots$ ㉠

양변을 x에 대하여 미분하면

$5(f(x))^4f'(x)+3(f(x))^2f'(x)$

$=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}-a$ $\cdots$ ㉡

정리하면

$f'(x)$

$$=\begin{cases}\dfrac{-ax^2+(2-a)x+1-\frac{5}{2}a}{(f(x))^2\{5(f(x))^2+3\}\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)} & (f(x)\ne 0)\\ p & (f(x)=0)\end{cases}$$

(단, p는 상수)

(*)의 α에 대하여

$\lim_{x\to\alpha}f'(x)=p(=f'(\alpha))$

이면 함수 $f'(x)$는 $x=\alpha$에서 연속이다.

극한 $\lim_{x\to\alpha}f'(x)$이 수렴할 필요충분조건은

(분자)

$=-ax^2+(2-a)x+1-\frac{5}{2}a=-a(x-\alpha)^2$

이다.

(이때, 모든 실수 x에 대하여

$5(f(x))^2+3>0$, $x^2+x+\frac{5}{2}>0$

임을 이용한 것이다.)

이차방정식

$-ax^2+(2-a)x+1-\frac{5}{2}a=0$ $\cdots$ ㉢

은 중근을 가지므로

(판별식)$=(2-a)^2-4(-a)\left(1-\frac{5}{2}a\right)=0$

즉, $-9a^2+4=0$, $a=\pm\frac{2}{3}$

우선 $a=\frac{2}{3}$라고 가정하자.

ⓛ에 $x=2$를 대입하면

$\underbrace{\{5(f(2))^4+3(f(2))^2\}}_{0\text{ 또는 }+}f'(2)$

$=\dfrac{10}{17}-\dfrac{2}{3}<0$

에서 $f'(2)<0$이므로 이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\therefore\ a=-\dfrac{2}{3}$

마찬가지의 방법으로 ㉡에 $x=2$를 대입하면 우변이 양수이므로 $f'(2)>0$임을 보일 수 있다.

㉢에 $a=-\dfrac{2}{3}$를 대입하여 정리하면

$2x^2+8x+8=0,\quad 2(x+2)^2=0,\quad x=-2$(중근)

즉, $\alpha=-2$

(이때, (*)의 α의 값이 유일하게 결정된다.)

㉠에 $x=-2,\ a=-\dfrac{2}{3}$를 대입하면

$(f(-2))^5+(f(-2))^3=\ln\dfrac{9}{2}-\dfrac{4}{3}-b$, 즉

$0=\ln\dfrac{9}{2}-\dfrac{4}{3}-b,\ b=\ln\dfrac{9}{2}-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ a\times e^b=-\dfrac{2}{3}\times e^{\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}=-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{9}{2}\times e^{-\frac{4}{3}}$

$=-3e^{-\frac{4}{3}}$

답 ①

[풀이3]

그래프의 개형을 이용하여 문제를 해결하자.

문제에서 $a\times e^b\neq 0$라고 하였으므로 $a\neq 0$이다.

조건 (나)에서 사잇값 정리에 의하여

$f(\alpha)=0$이고, $-3<\alpha<3$인

α가 적어도 하나 존재한다. $\cdots$(*)

조건 (가)에서

$(f(x))^5+(f(x))^3$

$=(f(x))^3((f(x))^2+1)$

$=\underbrace{\ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)}_{\text{곡선}}-\underbrace{(ax+b)}_{\text{직선}}$ $\cdots$㉠

양변을 x에 대하여 미분하면

$5(f(x))^4f'(x)+3(f(x))^2f'(x)$

$=(f(x))^2f'(x)(5(f(x))^2+3)$

$=\underbrace{\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}}_{\text{곡선}}-\underbrace{a}_{\text{직선}}$ $\cdots$㉡

두 방정식 $f(x)=0,\ f'(x)=0$의 해집합을 각각 $P,\ Q$라고 하면

㉠: $P\Leftrightarrow \ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)=ax+b$

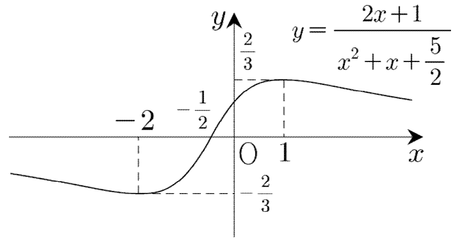
㉡: $P\cup Q\Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}=a$

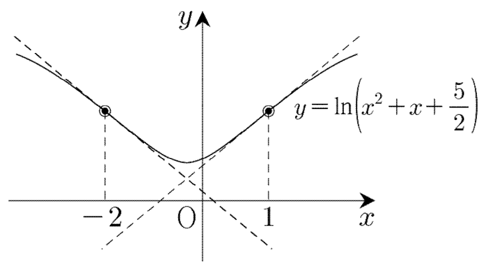
(단, $P\neq\varnothing$)

두 함수

$y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}},\ y=\ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)$

의 그래프는 다음과 같다.





(단, ◉는 변곡점이다.)

곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)$의 두 변곡점에서의 접선의 기울기는 각각 $-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}$이다.

$a\neq 0$이므로 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)$와 직선 $y=ax+b$의 교점의 개수는 1 또는 2 또는 3이다.

이때, 집합 P의 원소의 개수는 1 또는 2 또는 3이다.

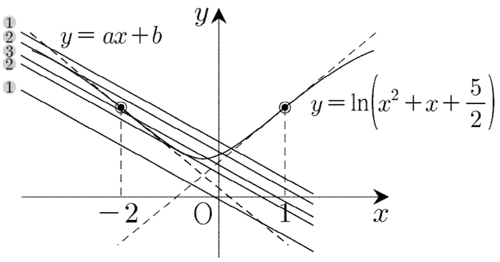
㉡에서 곡선 $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$와 직선 $y=a$ $(\neq 0)$의 교점의 개수는 1 또는 2이다.

($\because$ $P\neq\varnothing$에서 $P\cup Q\neq\varnothing$이므로 곡선과 직선이 만나지 않을 수 없다.)

이때, 집합 $P\cup Q$의 원소의 개수는 1 또는 2이므로, 집합 P의 원소의 개수는 3일 수 없다.

따라서 집합 P의 원소의 개수는 1 또는 2이다.

집합 P의 원소의 개수가 2라고 가정하자.



(위의 그림에서 5개의 직선의 기울기의 절댓값은 $\dfrac{2}{3}$ 미만이고, 0이 아니다. 그리고 기울기를 고정시킨 후에 y절편을 $-\infty$에서 ∞까지 변화시키면서 움직인 것이다.)

위의 그림처럼 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)$와 직선 $y=ax+b$의 교점의 개수가 2일 때, 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라고 하자. 즉, $P=\{\alpha,\ \beta\}$

롤의 정리에 의하여

$f'(\gamma)=0$이고, $\alpha<\gamma<\beta$인 γ가 적어도 하나 존재한다.

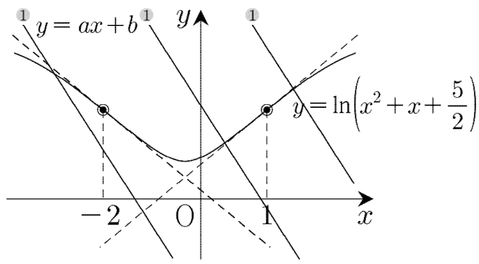
㉡: $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\subset P\cup Q$이므로

곡선 $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$과 직선 $y=a$의 교점의 개수는 3 이상이다.

이는 가정에 모순이므로 집합 P의 원소의 개수는 1이다.

즉, $P=\{\alpha\}$

이때, 직선 $y=ax+b$의 기울기의 절댓값은 $\dfrac{2}{3}$ 이상이다. (아래 그림)



즉, $a\geq\dfrac{2}{3}$ 또는 $a\leq-\dfrac{2}{3}$

그런데 $a>\dfrac{2}{3}$ 또는 $a<-\dfrac{2}{3}$이면

곡선 $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$와 직선 $y=a$의 교점의 개수는 0이다.

그런데 $n(P\cup Q)\geq 1$이므로 이는 가정의 모순이다.

따라서 $a=-\dfrac{2}{3}$ $(P=\{-2\})$ 또는

$a=\dfrac{2}{3}$ $(P=\{1\})$

그런데 $a=\dfrac{2}{3}$이면 $x=2$일 때,

직선 $y=a$이 곡선 $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$ 위쪽 방향에 있으므로

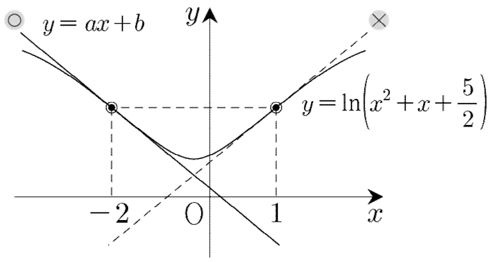
㉡에서 $f'(2)\underbrace{(f(2))^2(5(f(2))^2+3)}_{+}<0$, 즉

$f'(2)<0$

이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $a=-\dfrac{2}{3}$ $(P=\{-2\})$

곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)$과 직선 $y=ax+b$의 그래프는 다음과 같다.



(단, ◉는 변곡점이다.)

직선 $y=ax+b$는 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 변곡점 $\left(-2,\ \ln\frac{9}{2}\right)$에서의 접선이다.

즉, $y=-\frac{2}{3}x+b$이 점 $\left(-2,\ \ln\frac{9}{2}\right)$을 지나므로

$\ln\frac{9}{2}=-\frac{2}{3}(-2)+b$, $b=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}$

$\therefore\ a\times e^b=-\frac{2}{3}\times e^{\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}\times e^{-\frac{4}{3}}$

$=-3e^{-\frac{4}{3}}$

답 ①

[참고3]

곡선

$$y=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}=\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

은 곡선 $y=\frac{2x}{x^2+\frac{9}{4}}$를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

그런데 $x>0$일 때, 산술기하절대부등식에 의하여

$$\frac{2}{x+\frac{9}{4x}}\le\frac{2}{2\sqrt{x\times\frac{9}{4x}}}=\frac{2}{3}$$

(단, 등호는 $x=\frac{9}{4x}$ 즉, $x=\frac{3}{2}$일 때 성립한다.)

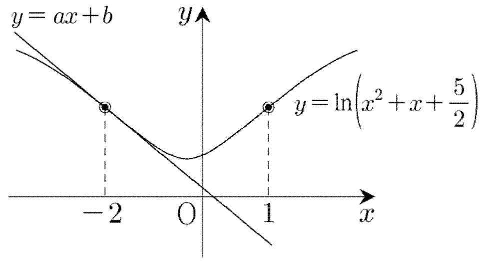
곡선 $y=\frac{2x}{x^2+\frac{9}{4}}$는 $x=\frac{3}{2}$일 때, 극댓값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

그런데 이 곡선은 원점에 대하여 대칭이므로, $x=-\frac{3}{2}$일 때, 극솟값 $-\frac{2}{3}$를 갖는다.

따라서 곡선 $y=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$는 $x=-2$일 때, 극솟값 $-\frac{2}{3}$를 갖고, $x=1$일 때, 극댓값 $\frac{2}{3}$를 갖는다. 그리고 이 곡선은 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.

[참고4]

초월함수의 근사를 이용하여 풀이를 해석해보자.



(단, ◉는 변곡점이다.)

$(f(x))^3\underbrace{((f(x))^2+1)}_{+}$

$=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$

$\approx(x+2)^3\times p(x)$

(단, 모든 실수 x에 대하여 $p(x)\neq0$)

이므로 직선 $y=ax+b$는

곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 변곡점에서의 접선이다.

(이때, 조건(나)의 $f'(2)>0$에 의하여 왼쪽 변곡점에서의 접선이다.)

29

[풀이]

수열 $\{a_n\}$을 쓰면

$(\alpha, -\beta, -\alpha, \beta)$, $(\alpha, -\beta, -\alpha, \beta)$, $\cdots$

이때, 네 수 $\alpha, -\beta, -\alpha, \beta$가 반복적으로 나온다.

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = \alpha^2\beta^2 = 4$

가능한 순서쌍 (α, β)를 모두 쓰면

$(2, 1)$($\cdots$(경우1)), $(2, -1)$($\cdots$(경우2)),

$(1, -2)$($\cdots$(경우3)), $(-1, -2)$($\cdots$(경우4))

이제 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라고 하자.

문제에서 주어진 등식을 다시 쓰면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n}) = 6 \cdots (*)$$

일반항 b_n, b_{2n}은 각각

$b_n = b_1 r^{n-1}$, $b_{2n} = b_2 r^{2n-2} = b_1 r^{2n-1}$

(*)에서 주어진 두 등비급수가 수렴하므로

$|r| < 1$

(경우1): $a_{4n-2} = -\beta = -1$, $a_{4n-3} = \alpha = 2$

(*)는 $-\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 6$,

$$-\frac{b_1}{1-r} = 2 \times \frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

그런데 $-\dfrac{b_1}{1-r} = 6$에서 $b_1 > 0$, $1-r > 0$

이므로 좌변은 음수, 우변은 양수이다.

이는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(경우2): $a_{4n-2} = 1$, $a_{4n-3} = 2$

(*)는 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 6$,

$$\frac{b_1}{1-r} = 2 \times \frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

연립하면

$$\frac{b_1 r}{1-r^2} = \frac{b_1}{1-r} \times \frac{r}{1+r} = 6 \times \frac{r}{1+r} = 3,$$

$$\frac{r}{1+r} = \frac{1}{2}, \ r = 1$$

그런데 $|r| < 1$이므로 이는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(경우3): $a_{4n-2} = 2$, $a_{4n-3} = 1$

(*)는 $2\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 6$,

$$2 \times \frac{b_1}{1-r} = \frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

연립하면

$$\frac{b_1 r}{1-r^2} = \frac{b_1}{1-r} \times \frac{r}{1+r} = 3 \times \frac{r}{1+r} = 6,$$

$$\frac{r}{1+r} = 2, \ r = -2$$

그런데 $|r| < 1$이므로 이는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(경우4): $a_{4n-2} = 2$, $a_{4n-3} = -1$

(*)는 $2\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 6$,

$$2 \times \frac{b_1}{1-r} = (-1) \times \frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

$$\frac{b_1 r}{1-r^2} = \frac{b_1}{1-r} \times \frac{r}{1+r}$$

$$= 3 \times \frac{r}{1+r} = -6, \ \frac{r}{1+r} = -2,$$

$$r = -\frac{2}{3}$$

이를 $\dfrac{b_1}{1-r} = 3$에 대입하면

$b_1 = 5$

따라서 (경우4)만이 가능하다.

$$\frac{q}{p} = b_1 \times b_3 = 5 \times \left(5 \times \frac{4}{9}\right) = \frac{100}{9}$$

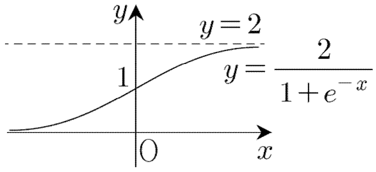
$\therefore \ p + q = 109$

답 109

30

[풀이]

함수 $y = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$의 그래프는

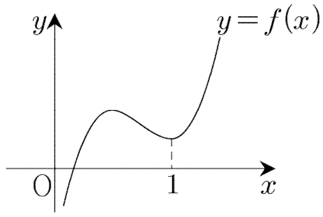


조건 (가)에서 $g(0)>0$이므로,
충분히 작은 양수 h에 대하여
구간 $(-h,\ h)$에서 $f\left(\dfrac{2}{1+e^{-x}}\right)\neq 0$이다.
이제 다음의 두 경우가 가능하다.
(경우1)
구간 $(-h,\ h)$에서 $f\left(\dfrac{2}{1+e^{-x}}\right)>0$이면

$$g(x)=f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right),$$

$$g'(x)=f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\underbrace{\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}_{+}$$

x: $0-$에서 $0+$로 변할 때,
$\dfrac{2}{1+e^{-x}}$: $1-$에서 $1+$로 바뀌므로,
$f'\left(\dfrac{2}{1+e^{-x}}\right)$: $f'(1-)$에서 $f'(1-)$로 바뀐다.
$x=0$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌어야 하므로
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가져야 한다.
함수 $f(x)$의 그래프는



구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $y=\dfrac{2}{1+e^{-x}}(>1)$는 증가하고,
구간 $(1,\ 2)$에서 함수 $y=f(x)(>0)$는 증가하므로
구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.
구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\underbrace{\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}_{+}$$

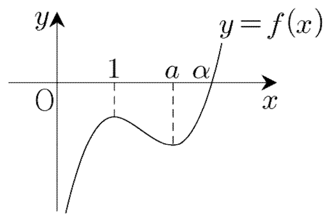
$$g'(\ln 3)=\underbrace{f'\left(\frac{3}{2}\right)}_{+}\underbrace{\frac{2e^{-\ln 3}}{(1+e^{-\ln 3})^2}}_{+}>0$$

이는 조건 (나)에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(경우2)
구간 $(-h,\ h)$에서 $f\left(\dfrac{2}{1+e^{-x}}\right)<0$이면

$$g(x)=-f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right),$$

$$g'(x)=-f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\underbrace{\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}_{+}$$

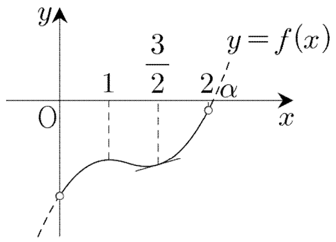
x: $0-$에서 $0+$로 변할 때,
$\dfrac{2}{1+e^{-x}}$: $1-$에서 $1+$로 바뀌므로,
$-f'\left(\dfrac{2}{1+e^{-x}}\right)$: $-f'(1-)$에서 $-f'(1+)$로 바뀐다.
$x=0$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌어야 하므로
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가져야 한다.
함수 $f(x)$의 그래프는



(단, α는 곡선 $y=f(x)$의 유일한 x절편이고, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.)
그런데 함수 $g(x)$는 실수 전체 집합에서 미분가능하므로
실수 전체의 집합에서

$$f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\leq 0$$

이어야 한다. 따라서 아래 그림에서 $2\leq\alpha$이다.



(단, $a<\frac{3}{2}$)

한편 함수 $g(x)$의 도함수는

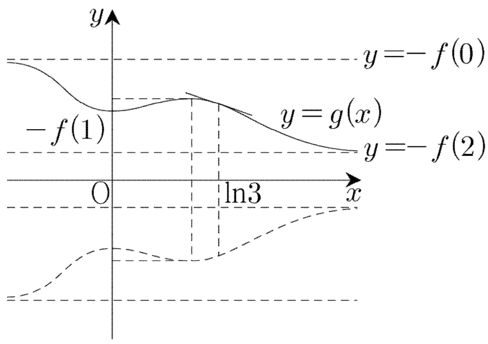
$$g'(x)=-f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\underbrace{\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}_{+}$$

조건 (나)에서

$$g'(\ln 3)=-\underbrace{f'\left(\frac{3}{2}\right)}_{+}\underbrace{\frac{3}{8}}_{+}<0$$

이므로 $f'\left(\frac{3}{2}\right)>0$ (위의 그림)

함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=3(x-1)(x-a)$

$=3x^2-3(1+a)x+3a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(1+a)x^2+3ax+C$$

(단, C는 적분상수)

(나): $g'(\ln 3)=-f'\left(\frac{3}{2}\right)\frac{3}{8}$

$$=-3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}-a\right)\times\frac{3}{8}<0,\ a<\frac{3}{2}$$

$$|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$$

$$\left|-f'\left(\frac{2}{1+e^{\ln 3}}\right)\frac{2e^{\ln 3}}{(1+e^{\ln 3})^2}\right|=-\frac{3}{8}$$

$$f\left(\frac{2}{1+e^{\ln 3}}\right)$$

정리하면

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-a\right)=-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}(1+a)-\frac{3}{2}a-C,$$

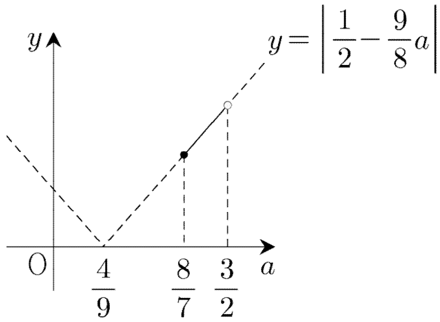
$$C=1-\frac{21}{8}a$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(1+a)x^2+3ax+1-\frac{21}{8}a$$

$f(2)\le 0$이므로

$$f(2)=3-\frac{21}{8}a\le 0,\ a\ge\frac{8}{7}$$



$$g(0)=|f(1)|=\left|\frac{1}{2}-\frac{9}{8}a\right|\ge\frac{11}{14}$$

(단, 등호는 $\alpha=\frac{8}{7}$일 때 성립한다.)

$\therefore\ p+q=11+14=25$

답 25

[참고]

함수 $y=\frac{2}{1+e^{-x}}$의 그래프를 그리는 과정은 다음과 같다.

도함수는

$$y'=\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

모든 실수 x에 대하여 $y'>0$이므로

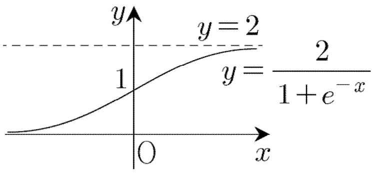
함수 $y=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$x\to-\infty$일 때, $\dfrac{2}{1+e^{-x}}\to0$,

$x\to\infty$일 때, $\dfrac{2}{1+e^{-x}}\to2$

이므로 두 직선 $y=0$, $y=2$는 점근선이다.

함수 $y=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$의 그래프는 다음과 같다.



〈 기하 〉

23

[풀이]

$\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 6)+(k,\ -6)=(k+2,\ 0)$

에서 $k+2+0=4$

$\therefore\ k=2$

답 ②

24

[풀이]

접선의 방정식은

$6y=12\times\dfrac{x+3}{2}$, 즉 $y=x+3$

이 직선이 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=1+3=4$

$\therefore\ a=4$

답 ④

25

[풀이]

$\vec{n}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2,\ -4)$

직선의 방정식은

$(-2,\ -4)\cdot(x-4,\ y-0)=0$,

$-2(x-4)-4y=0$

$x=0$을 대입하면

$-2\times(-4)-4y=0$, $\therefore\ y=2$

답 ②

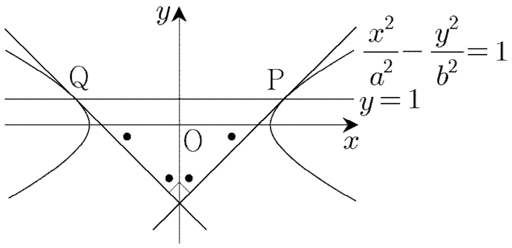
26

[풀이]

문제에서 주어진 쌍곡선의 점근선은

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$, 즉 $y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\dfrac{1}{2}x$

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$, $a=2b$ $\cdots㉠$



(단, ●$=45^\circ$)

쌍곡선은 y축에 대하여 대칭이므로

두 점 P, Q도 y축에 대하여 대칭이다.

점 P에서의 접선과 점 Q에서의 접선도 y축에 대하여 대칭이므로

위의 그림에서 ●+●$=90^\circ$, 즉 ●$=45^\circ$

점 P의 좌표를 $(p,\ 1)$로 두면

$\dfrac{px}{a^2}-\dfrac{y}{b^2}=1$, $y=\dfrac{pb^2}{a^2}x-b^2$

(기울기)$=\dfrac{pb^2}{a^2}=1$, 즉 $pb^2=a^2$ $\cdots㉡$

점 $\mathrm{P}(p,\ 1)$는 쌍곡선 위에 있으므로

$\dfrac{p^2}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1$ $\cdots㉢$

㉠, ㉡을 연립하면

$pb^2=(2b)^2$, 즉 $p=4$

㉡, ㉢을 연립하면

$\dfrac{p^2}{pb^2}-\dfrac{1}{b^2}=1$, 즉 $p-1=b^2=3$, $a^2=12$

$\therefore\ a^2+b^2=12+3=15$

답 ①

27

[풀이]

$|\vec{a}+\vec{b}|=6$에서

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36\cdots㉠$

$|2\vec{a}-\vec{b}|=9$에서

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=81\cdots㉡$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$, 즉

$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$ $\cdots㉢$

$2\times㉠+㉡$: $6|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2=153$

㉢과 연립하면

$6|\vec{a}|^2+3|\vec{a}|^2=9|\vec{a}|^2=153$,

$|\vec{a}|^2=17(=|\vec{b}|^2)$

이를 ㉠에 대입하면

$17+2\vec{a}\cdot\vec{b}+17=36$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{17}$, $\sin\theta=\dfrac{12\sqrt{2}}{17}$

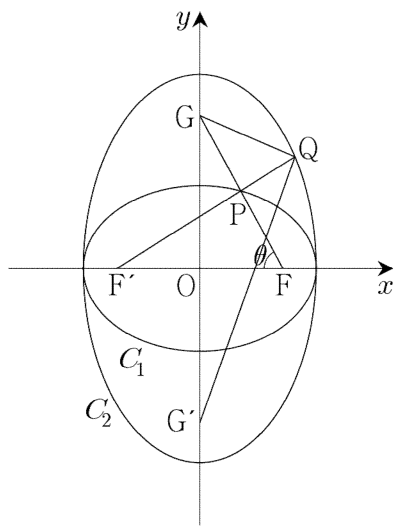
$\therefore$ ($\triangle$OAB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=6\sqrt{2}$

답 ③

28

[풀이]

$\angle\mathrm{GFF'}=\theta$, $\overline{\mathrm{GP}}=\overline{\mathrm{PF}}=k$로 두자.



문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{GP}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\sqrt{2}$

타원의 정의에 의하여

타원 C_1의 장축의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

즉, 타원 C_1의 x축 위의 두 꼭짓점은

$(-\sqrt{2},\ 0)$, $(\sqrt{2},\ 0)$이다.

그리고

$1^2+c^2=(\sqrt{2})^2$에서 $c=1$

삼각형 GOF에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\cos\theta=\frac{1}{2k}$$

삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{k^2+2^2-(2\sqrt{2}-k)^2}{2\times k\times 2}$$

위의 두 등식을 연립하면

$$\frac{k^2+2^2-(2\sqrt{2}-k)^2}{2\times k\times 2}=\frac{1}{2k},\ k=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

직각삼각형 GOF에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=1^2+d^2,\ d=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

(타원 C_2의 장축의 길이)

$$=2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{22}$$

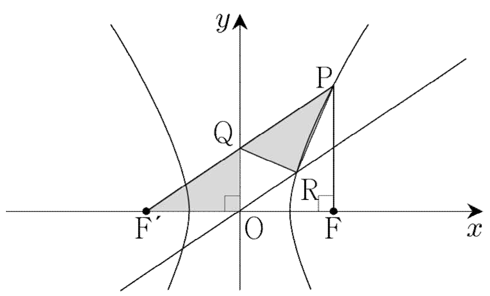
타원의 정의에 의하여

$\therefore\ \overline{QG}+\overline{QG'}=\sqrt{22}$

답 ④

29

[풀이]



$\overline{F'Q}=\overline{QP}$, $\overline{F'O}=\overline{OF}$

이므로 두 삼각형 QF′O, PF′F는 서로 닮음이다.

이때, 닮음비는 $1:2$이다.

문제에서 주어진 두 직선은 서로 평행하므로

두 삼각형 PQR, QF′O의 넓이는 서로 같다.

$(\triangle\mathrm{QF'O}$의 넓이$)=\frac{1}{2}\times c\times 2=3,\ c=3$

서로 닮음인 두 직각삼각형 QF′O, PF′F에 대하여

$\overline{PF}=2\overline{QO}=4$

직각삼각형 PF′F에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{PF'}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$

따라서

(쌍곡선의 주축의 길이)$=2\sqrt{13}-4$

$\therefore\ p^2+q^2=20$

답 20

30

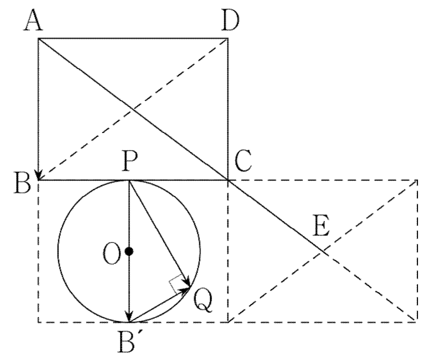
[풀이]

$\overrightarrow{BE}=\frac{3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}}{3-1}$에서

점 E는 선분 $\overline{AC}$의 $3:1$외분점이다.

아래 그림처럼 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB'}$가 되도록 점 B′를 잡자.

그리고 원의 중심을 O라고 하자. (이때, 점 O는 점 P에 따라서 움직인다.)



$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PB'}=\overrightarrow{B'Q}$

이므로

$\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{B'Q}=0$

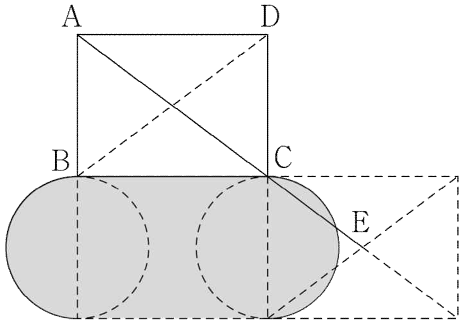
$\angle\mathrm{PQB'}=90^\circ$

이므로 원의 성질에 의하여

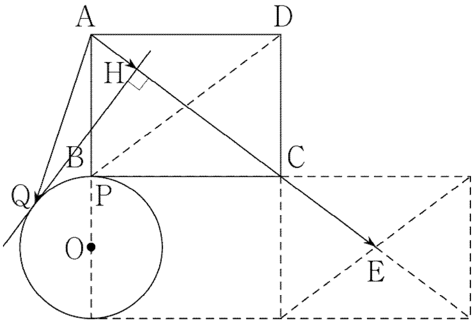
점 Q는 선분 PB′를 지름으로 하는 원 위의 점이

다.

점 Q의 자취는 다음과 같다.



점 Q에서 직선 AE에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

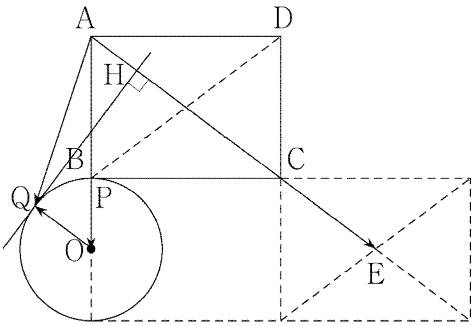


위의 그림처럼 점 O가 반직선 AB 위에 있고, '직선 AE에 평행하고, 점 O를 지나는 직선' 이 원과 만나는 두 교점 중 E에서 더 먼 점을 Q라고 할 때,

두 벡터의 내적

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ} (= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH})$

은 최솟값을 갖는다. 이때, 최솟값을 m이라고 하자.



위의 그림처럼 두 벡터의 내적

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}$

이 최소가 되도록 점 Q를 위치시키자.

$\therefore\ m = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}$

$= \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OQ})$

$= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{OQ}$

$= 15 \times 9 \times \dfrac{6}{10} - 15 \times 3$

$= 36$

답 36