23. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 6)$, $\vec{b}=(k,\ -6)$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합이 4일 때, k의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

눈풀 문제입니다. $(2+k,\ 6-6)=(2+k,\ 0)$이라서 $2+k=4$가 나오므로 $k=2$가 되게 됩니다.

24. 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $(3,\ 6)$에서의 접선이 점 $(1,\ a)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

접점공식을 아는지 묻는 문제였습니다. 공식을 적용하면 $6y=6(x+3)$이 되므로 $a=4$임을 알 수 있습니다.

25. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ -4)$에 대하여 점 A를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$인 직선의 y절편은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

법선벡터의 개념을 아는지를 묻고 있습니다. 직선 AB의 기울기는 $\frac{0-(-4)}{4-2}=2$입니다. 따라서 법선벡터면 이와 수직인 기울기를 가져야 합니다. 따라서 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$가 되게 됩니다. 직선의 방정식을 세워보면 $y=-\frac{1}{2}(x-4)$이므로 y절편은 2임을 알 수 있습니다.

26. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=\frac{1}{2}x$이다. 쌍곡선이 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선과 쌍곡선 위의 점 Q에서의 접선이 서로 수직일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① 15 ② $\frac{35}{2}$ ③ 20 ④ $\frac{45}{2}$ ⑤ 25

3점임에도 오히려 뒤쪽 4점보다 더 당황했을 법한 문제라고 생각합니다. 우선 한 점근선의 방정식이 $y=\frac{1}{2}x$라는 것을 보고 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$임을 알 수 있습니다. 또한 $y=1$과 쌍곡선이 만나는 두 점을 생각해 보면 쌍곡선은 $x=0$에 대해서 대칭임을 고려해 볼 수 있습니다.

따라서 P와 Q의 x좌표는 절댓값이 같은 대칭점이 나오게 됩니다. $\mathrm{P}(\alpha,\ 1)$,

$\mathrm{Q}(-\alpha,\ 1)$ $(\alpha>0)$이라고 할 수 있으므로 접점 공식을 통해서 각각의 접선의 방정식을 구해보면 $\frac{\alpha x}{4b^2}-\frac{y}{b^2}=1$, $-\frac{\alpha x}{4b^2}-\frac{y}{b^2}=1$이므로 각각의 기울기는 $\frac{\alpha}{4}$, $-\frac{\alpha}{4}$가 되게 됩니다.

저 두 직선이 수직이므로 기울기의 곱은 -1이 됩니다. 따라서 $-\frac{\alpha^2}{16}=-1 \Rightarrow \alpha=4$

따라서 대입을 통해 a, b값을 구해보면, $\frac{16}{4b^2}-\frac{1}{b^2}=1$, $b^2=3$, $a^2=12$ $\therefore\ a^2+b^2=15$

27. 삼각형 OAB에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하자.

$$|\vec{a}+\vec{b}|=6,\ |2\vec{a}-\vec{b}|=9,\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

일 때, 삼각형 OAB의 넓이는? [3점]

① $4\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $8\sqrt{2}$

복잡해 보이는 식들이 주어져 있습니다. 벡터에 대한 단서가 딱히 주어진 게 없으므로 제곱을 통해 수식으로 접근하는 것이 좋아 보입니다.

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36$, $4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=81$, $|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$는 다르게 말하면 $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$이므로 벡터 하나로 표현이 가능할 것 같습니다. 따라서 앞에 두 식을 변형해 주면

$2|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|^2\cos\theta=36$, $5|\vec{a}|^2-4|\vec{a}|^2\cos\theta=81$ 임을 알 수 있습니다.

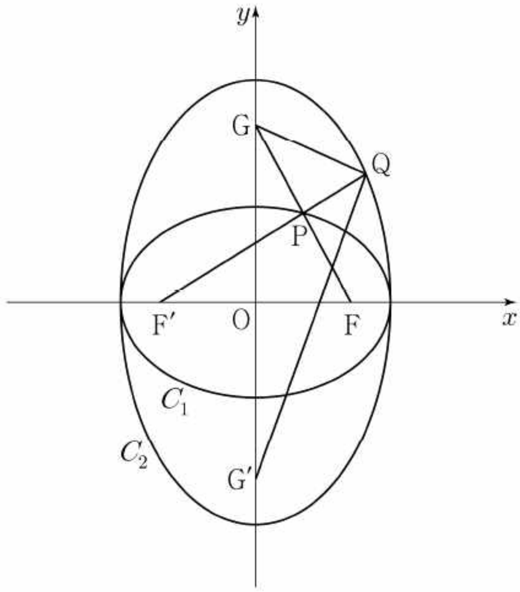
따라서 연립을 해주면 $9|\vec{a}|^2=153 \Rightarrow |\vec{a}|^2=17$

위에 식에다 다시 대입하면, $34+34\cos\theta=36 \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{17}$

구해야 할 것은 삼각형 OAB의 넓이입니다. 두 변의 길이와 끼인각을 알고 있으므로 $\frac{1}{2}absin\theta$를 사용할 수 있습니다.

$$\frac{1}{2}\times(\sqrt{17})^2\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{17}\right)^2}=6\sqrt{2}$$

28. 그림과 같이 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$과 두 점 $G(0, d)$, $G'(0, -d)(d>1)$을 초점으로 하고 타원 C_1의 두 꼭짓점을 지나는 타원 C_2가 있다. 직선 FG가 타원 C_1과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 직선 F'P가 타원 C_2와 제1사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{GP}=\overline{PF}$이고 $\overline{GP}+\overline{PF'}=2\sqrt{2}$일 때, $\overline{QG}+\overline{QG'}$의 값은? (단, a는 양수이다.) [4점]



복잡해 보이는 그림을 줬습니다. 우선 타원 두 개가 주어져 있고 a값을 결정하면 타원의 방정식을 확정 지을 수 있을 것으로 보입니다.

$\overline{GP}=\overline{PF}$, $\overline{GP}+\overline{PF'}=2\sqrt{2}$라는 두 조건을 이용해 보도록 합시다.

타원의 정의를 활용하면 $\overline{PF'}+\overline{PF}=2a$입니다. 그런데 $\overline{GP}=\overline{PF}$이므로
$\overline{GP}+\overline{PF'}=2\sqrt{2}=2a \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{2}$

따라서 타원 C_1의 방정식이 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$로 확정되었습니다. 이제 타원 C_2를 위해서는 점 G에 대해서 알아보는 것이 중요해 보입니다.

점 G를 알기 위해서 선분 GF의 중점이 점 P라는 사실을 이용해 보도록 합시다.

점 $\mathrm{P}(\frac{1}{2},\ k)$ 이므로 타원의 방정식에 대입하면 $\frac{1}{8}+k^2=1 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{\sqrt{14}}{4}$

따라서 $\mathrm{G}\left(\frac{\sqrt{14}}{2},\ 0\right)$ 임을 알 수 있습니다. 구해야 할 것은 $\overline{\mathrm{QG}}+\overline{\mathrm{QG'}}$ 입니다. 이는 다르게 말하면 타원 C_2 의 장축의 길이입니다.

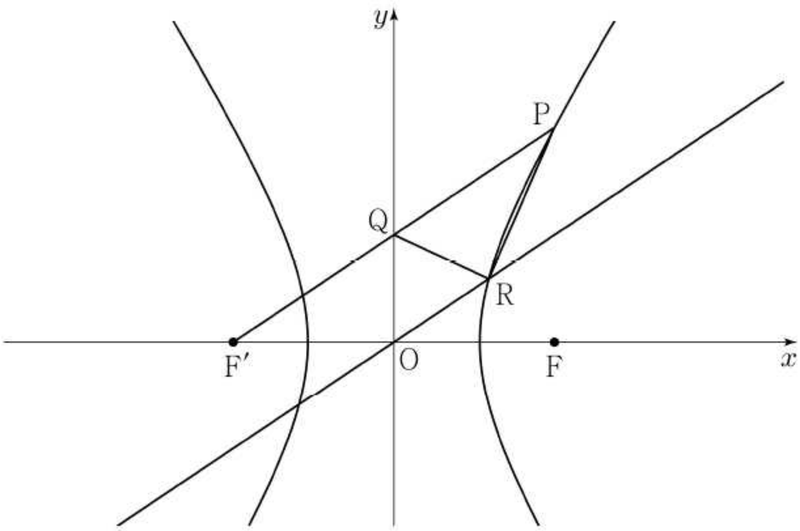
점 G를 사용하면 이를 우회적으로 구할 수 있어 보입니다.

점 G와 타원 C_1 의 x축 위의 꼭짓점과 연결하면 이는 곧 장축 길이의 절반이니까요.

따라서 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{22}}{2}$

타원의 장축 길이는 $\frac{\sqrt{22}}{2}\times 2=\sqrt{22}$

29. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 F′P가 y축과 만나는 점을 Q라 하고, 원점 O를 지나고 선분 F′P와 평행한 직선이 이 쌍곡선과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 R이라 하자.
$\overline{\mathrm{F'Q}} = \overline{\mathrm{QP}}$, $\overline{\mathrm{OQ}} = 2$이고 삼각형 PQR의 넓이가 3일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는 $p+q\sqrt{13}$이다.
p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



$\overline{\mathrm{F'Q}} = \overline{\mathrm{QP}}$라고 주어졌습니다. 그런데 쌍곡선은 y축 대칭입니다. 따라서 $\overline{\mathrm{F'Q}} = \overline{\mathrm{FQ}}$입니다.

이는 다르게 말하면 삼각형 PF′F가 직각삼각형임을 의미합니다. 따라서 삼각형 QF′O와 PF′F는 $1:2$ 닮음이므로 $\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{PF}} = 4$

구해야 할 것은 선분 PF′의 길이이므로 삼각형 PQR의 넓이와 관련지어 생각해 보도록 합시다.

우선 삼각형 PQR과 PF′F과의 관계를 생각해 봅시다. 둘은 밑변의 길이 비가 $1:2$이고 높이 비 역시 $1:2$인 삼각형입니다.

그렇다면 넓이 비는 $1:4$임을 알 수 있습니다. 즉 삼각형 PF′F의 넓이는 12입니다.

그런데 $\mathrm{PF'F}$ 은 직각삼각형이므로 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F'F}}\times\overline{\mathrm{FP}}=12$가 되게 됩니다.

즉 선분 $\overline{\mathrm{F'F}}$ 의 길이는 6 입니다. 피타고라스를 사용하면 $\overline{\mathrm{PF'}}^2=36+16 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{13}$

구해야 하는 것은 쌍곡선의 주축의 길이이므로 $2\sqrt{13}-4$ 따라서 $p=-4$, $q=2$

$\therefore p^2+q^2=20$

30. 좌표평면에 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=8$인 직사각형 ABCD와 $2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$를 만족시키는 점 E가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 Q가

$$\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB})=0$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최솟값을 구하시오. [4점]

우선 점 E에 주목해 봅시다. 점 E는 점 C, A의 1:3 외분점입니다.

따라서 점 E의 위치를 확정 지을 수 있습니다.

문제는 그다음부터인데 $\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB})=0$이라는 독특한 식을 줬습니다.

순수하게 평행이동으로 해결해 보는 방법은 바로 떠오르진 않네요.

그러면 좌표로 잡고 미는 것이 중요해 보일 듯합니다.

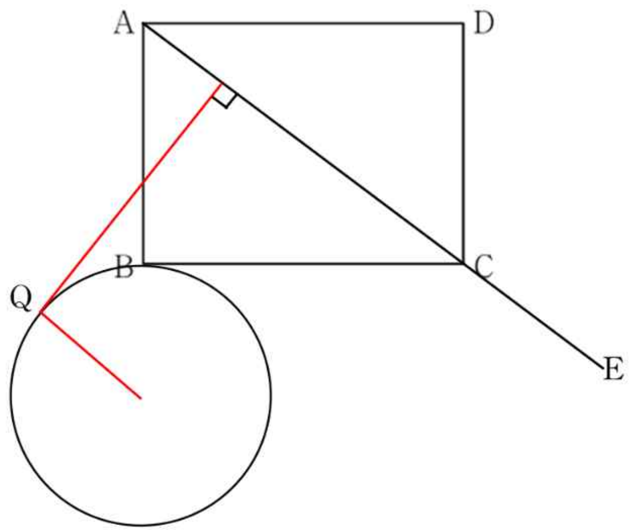
따라서 시점인 점 P를 $(0,\ 0)$으로 두고 점 Q를 $(x,\ y)$로 두어보도록 합시다.

그러면 $\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB})=(x,\ y)\cdot(x,\ y+6)=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+(y+3)^2=9$

즉 점 Q는 점 P에 따라 이동하는 원의 자취가 되게 됩니다.

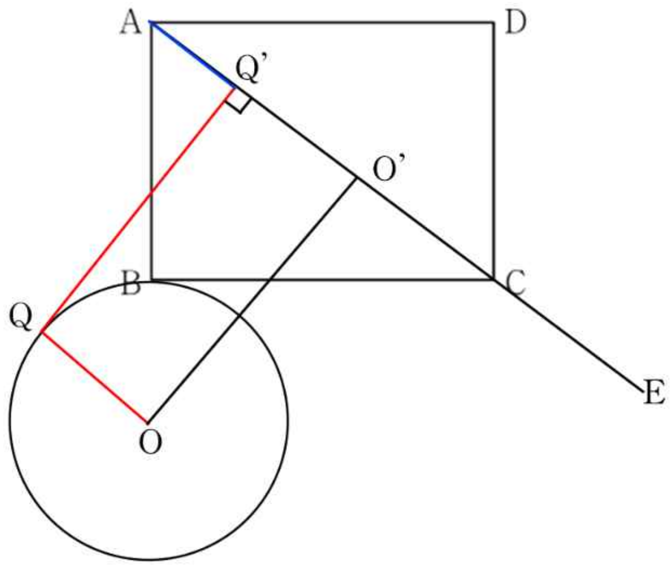
이때 구해야 할 것은 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최솟값입니다.

일단 $\overrightarrow{AE}$는 고정되어 있는 벡터입니다. 이제 따져야 할 것은 $\overrightarrow{AQ}$인데 가장 좋은 방법은 정사영을 통해서 최소가 되는 경우를 생각해 보는 겁니다.



따라서 다음과 같이 상황일 때가 최소임을 알아낼 수 있습니다.

원의 중심을 O, 점 Q, O에서 선분 AE에 내린 수선의 발을 각각 Q′, O′이라 하면



다음과 같이 선분 AQ′의 길이를 구하면 됩니다. 삼각형 AOO′은 5 : 4 : 3의 길이를 갖기 때문에 $\overline{AO'} = \overline{AO}\times\frac{3}{5} = \frac{27}{5}$ 따라서 $\overline{AQ'} = \frac{27}{5} - 3 = \frac{12}{5}$

선분 AE의 길이는 15이므로 $15\times\frac{12}{5} = 36$

23번: 벡터의 덧셈을 알고 있는가?

24번: 접점 공식을 알고 있는가?

25번: 법선벡터의 개념을 알고 있는가?

26번: 쌍곡선의 대칭성을 활용하고 식을 작성할 수 있는가?

27번: 벡터를 식의 관점에서 접근할 수 있는가?

28번: 타원의 정의를 활용할 수 있고 식까지 작성할 수 있는가?

29번: 쌍곡선이 대칭임을 파악할 수 있는가? 또한 넓이 비를 통해 길이를 이끌어 낼 수 있는가?

30번: 복잡한 벡터의 자취를 성분화를 시켜서 파악할 수 있는가?

수능 때는 공간도형이 들어오고 30번 난이도가 조금 더 올라갈 것으로 보임.

29번은 쉽게 나오는 추세지만 이차곡선에서 뇌절 올 수 있으므로 최소한의 연습은 해두도록 하자.

6평 기준 만표 차이는 3점이었으므로 공간도형이나 30번 난이도를 조절하여 격차를 줄이려는 모습을 보이지 않을까? 하는 뇌피셜