해설	

1.

[정답] ②

[출제 의도] 주기성 함수로 주어진 두 수열의 관계를 파악하고 등비수열 합 공식을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있다.

구간 $[-1, 1]$에서 $f(x)=|x|$인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로 정수 z에 대해 $f(x+2z)=f(x)$이다.

1) $n<k\,(k-n>0)$이면

$b_n=\frac{1}{2}\times 4^{k-n}$은 2보다 크거나 같은 짝수이며

함수 $f(x)$의 주기가 2이므로 $f(n+b_n)=f(n)$이다.

따라서 $n<k\,(n\le k-1)$일 때

$a_n=\frac{f(n+b_n)-f(n)}{(b_n)^2}=\frac{0}{(b_n)^2}=0$

이다.

2) $n\ge k\,(k-n\le 0)$이면

$0<b_n=\frac{1}{2}\times 4^{k-n}\le\frac{1}{2}$이므로

k 이상의 자연수 n에 대해 $n\le n+b_n\le n+1$

이에 함수 $f(x)$의 그래프에서 n과 $n+b_n$은 같은 선형 상에 있다.

$\therefore$ n이 홀수이면 $f(n+b_n)-f(n)=-b_n$이고

$a_n=\frac{f(n+b_n)-f(n)}{(b_n)^2}=\frac{-b_n}{(b_n)^2}=-\frac{1}{b_n}=-2\times 4^{n-k}$

n이 짝수이면 $f(n+b_n)-f(n)=b_n$이고

$a_n=\frac{f(n+b_n)-f(n)}{(b_n)^2}=\frac{b_n}{(b_n)^2}=\frac{1}{b_n}=2\times 4^{n-k}$

$a_{2k}b_8=2a_{k+1}$에서,

$0<a_{2k}b_8=2a_{k+1}$이므로 $k+1$은 짝수이다.

이에 $a_{k+1}=2\times 4^{(k+1)-k}=8$이고,

$2\times 4^k\times\frac{1}{2}\times 4^{k-8}=2\times 8$, $k=5$이다.

이제 구하는 값은

$\sum_{n=1}^{10}f\left(\frac{a_n}{a_8}\right)=\sum_{n=1}^{4}f\left(\frac{a_n}{a_8}\right)+\sum_{n=5}^{10}f\left(\frac{a_n}{a_8}\right)$

이때 $n<5$이면 $a_n=0$이므로 $\sum_{n=1}^{4}f\left(\frac{a_k}{a_8}\right)=\sum_{n=1}^{4}f(0)=\sum_{n=1}^{4}0=0$

$n\ge 5$이면 $a_n=\begin{cases}-2\times 4^{n-5} & (n:odd)\\ 2\times 4^{n-5} & (n:even)\end{cases}$이므로

$\sum_{n=5}^{10}f\left(\frac{a_n}{a_8}\right)=f(-4^{-3})+f(4^{-2})+f(-4^{-1})+f(1)+f(-4)+f(4^2)$

이때, 주기성에 의해 $f(-4)=f(4^2)=0$이므로

$\sum_{n=5}^{10}f\left(\frac{a_n}{a_8}\right)=4^{-3}+4^{-2}+4^{-1}+1+0+0=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^8}\right)$

따라서 구하는 값은

$\sum_{n=1}^{10}f\left(\frac{a_n}{a_8}\right)=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^8}\right)$