

모의 논술고사 해설지 (자연계열)

[논술고사 시간 : 2시간]

모집단위	학부·과	수험번호	성명
------	------	------	----

【 수험생 유의사항 】

1. 수험번호, 성명 등 자신의 신상과 관련된 사항을 답안에 드러낼 경우 부정행위로 간주함.
2. 문제지와 답안지의 문제번호가 일치하는지 반드시 확인할 것(불일치 시 0점 처리).
3. 풀이과정을 반드시 기술할 것. 기술의 형식과 내용은 평가의 주요 요소임.



[문제 1] (85점)

1보다 큰 실수 a 에 대하여, 다음 조건을 만족하는 $f(x)$ 를 구하여라.

- (1) $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이다.
 (2) $f(0) = 0, f(a) = a^2, f(a^2) = a^4$ 이다.
 (3) 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 두 영역의 넓이가 같다.

[예시답안]

조건으로부터 $0, a, a^2$ 은 $f(x) - x^2 = 0$ 을 만족하는 서로 다른 세 개의 근이고, $f(x)$ 의 최고차항이 1이므로 $f(x) - x^2 = x(x-a)(x-a^2)$ 이다. $f(x)$ 의 최고차항이 양수이고 $0 < a < a^2$ 이므로 $y = f(x)$ 와 $y = x^2$ 로 둘러싸인 두 영역의 넓이는 각각 $\int_0^a \{f(x) - x^2\} dx$ 와 $\int_a^{a^2} \{x^2 - f(x)\} dx$ 이다.

$$\int_0^a \{f(x) - x^2\} dx = \int_a^{a^2} \{x^2 - f(x)\} dx$$

이므로

$$\int_0^a \{f(x) - x^2\} dx + \int_a^{a^2} \{f(x) - x^2\} dx = \int_0^{a^2} \{f(x) - x^2\} dx = \int_0^{a^2} x(x-a)(x-a^2) dx = 0$$

이다. 이를 계산하면

$$\begin{aligned} \int_0^{a^2} x(x-a)(x-a^2) dx &= \int_0^{a^2} \{x^3 - (a+a^2)x^2 + a^3x\} dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{(a+a^2)}{3}x^3 + \frac{a^3}{2}x^2 \right]_0^{a^2} \\ &= \left\{ \frac{1}{4}a^8 - \frac{(a+a^2)}{3}a^6 + \frac{1}{2}a^7 \right\} = \frac{1}{12}(3a^8 - 4a^7 - 4a^8 + 6a^7) = \frac{a^7(-a+2)}{12} = 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a = 2$ 이고, $f(x) = x(x-2)(x-4) + x^2 = x^3 - 5x^2 + 8x$ 이다.

[문제 2] (95점)

1부터 2^n 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 2^n 개의 카드가 들어있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼냈을 때, 꺼낸 카드에 적힌 세 숫자가 공비가 2^k (k 는 자연수)인 등비수열을 이룰 확률을 구하여라. (단, n 은 2 이상의 자연수이다.)

[예시답안]

이 상자에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼냈을 때, 가능한 모든 경우의 수는

$${}_{{2}^n}C_3 = \frac{2^n(2^n-1)(2^n-2)}{6}$$

이다. 한편, 꺼낸 카드 3장에 적힌 세 숫자가 등비수열일 때 초항이 a 이고 공비가 2^k 이면, 세 숫자는 $a, 2^k a, 2^{2k} a$ 이다. 상자 안의 카드에는 각각 1부터 2^n 까지의 자연수가 적혀 있으므로 $a \geq 1$ 이고 $2^{2k} a \leq 2^n$, 즉, $1 \leq a \leq 2^{n-2k}$ 이다. 따라서 꺼낸 3장의 카드에 적힌 세 숫자가 공비가 2^k 인 등비수열을 이루는 경우의 수는 2^{n-2k} 이다.

(i) n 이 2 이상의 짝수인 경우

n 을 어떤 자연수 m 에 대하여 $n = 2m$ 으로 나타낼 수 있다. 이때, $2k \leq n = 2m$, 즉,

$$1 \leq k \leq m$$

이어야 한다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 경우의 수는

$$\sum_{k=1}^m 2^{n-2k} = \sum_{k=1}^m 2^{2m-2k} = \frac{4^m - 1}{3} = \frac{2^n - 1}{3}$$

이고, 구하는 확률은

$$\frac{\frac{2^n - 1}{3}}{\frac{2^n(2^n-1)(2^n-2)}{6}} = \frac{2}{2^n(2^n-2)} = \frac{1}{2^n(2^{n-1}-1)}$$

이다.

(ii) n 이 2 이상의 홀수인 경우

n 을 어떤 자연수 m 에 대하여 $n = 2m+1$ 로 나타낼 수 있다. 이때, $2k \leq n = 2m+1$, 즉,

$$1 \leq k \leq m + \frac{1}{2}$$

이어야 한다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 경우의 수는

$$\sum_{k=1}^m 2^{n-2k} = \sum_{k=1}^m 2^{2m+1-2k} = \frac{2(4^m - 1)}{3} = \frac{2(2^{n-1} - 1)}{3}$$

이고, 구하는 확률은

$$\frac{\frac{2(2^{n-1} - 1)}{3}}{\frac{2^n(2^n-1)(2^n-2)}{6}} = \frac{4(2^{n-1} - 1)}{2^n(2^n-1)(2^n-2)} = \frac{1}{2^{n-1}(2^n-1)}$$

이다.

[문제 3] (105점)

자연수 n 에 대하여

$$a_n = \left\{ n \ln n - 2 \ln \frac{(2n)!}{n!} \right\} \times \ln n, \quad b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln k)^2$$

이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n + b_n}{n} \right)$ 의 값을 구하여라.

[예시답안]

자연수 n 에 대하여 자연로그의 성질을 이용하면

$$a_n = n(\ln n)^2 - 2 \ln n \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k = \sum_{k=n+1}^{2n} \{ (\ln n)^2 - 2(\ln n)(\ln k) \}$$

이므로,

$$a_n + b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln k - \ln n)^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} \left\{ \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right\}^2 = \sum_{k=1}^n \left\{ \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right\}^2$$

이다. 정적분과 급수의 합 사이의 관계로부터

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n + b_n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right\}^2 = \int_0^1 \{ \ln(1+x) \}^2 dx$$

이다. 한편 부분적분법을 이용하면

$$\int_0^1 \{ \ln(1+x) \}^2 dx = \int_1^2 (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^2 - \int_1^2 \left(x \times \frac{2 \ln x}{x} \right) dx = 2(\ln 2)^2 - 2 \int_1^2 \ln x dx$$

이고

$$\int_1^2 \ln x dx = [x \ln x - x]_1^2 = (2 \ln 2 - 2) - (-1) = 2 \ln 2 - 1$$

이므로

$$\int_0^1 \{ \ln(1+x) \}^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 4 \ln 2 + 2$$

이다. 따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n + b_n}{n} \right) = \int_0^1 \{ \ln(1+x) \}^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 4 \ln 2 + 2$$

이다.

[문제 4] (115점)

한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에 타원이 세 점에서 접하고 있다. 타원의 장축은 선분 BC와 평행하고, 장축의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다. 두 선분 AB, AC 위에 있는 접점을 각각 P, Q라 하고, 타원의 중심을 O라 하자. 세 점 P, O, Q를 지나는 포물선이 정삼각형 ABC를 나눈 두 영역의 넓이 중에서 작은 값을 구하여라.

[예시답안]

장축의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 단축의 길이를 $2b$,

타원의 중심을 원점으로 하여 평면좌표를 도입하면

$O(0, 0)$, $A(0, \sqrt{3}-b)$, $B(-1, -b)$, $C(1, -b)$ 이고 타원의

방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이다. 접점 Q의 좌표를 (x_1, y_1) 이라

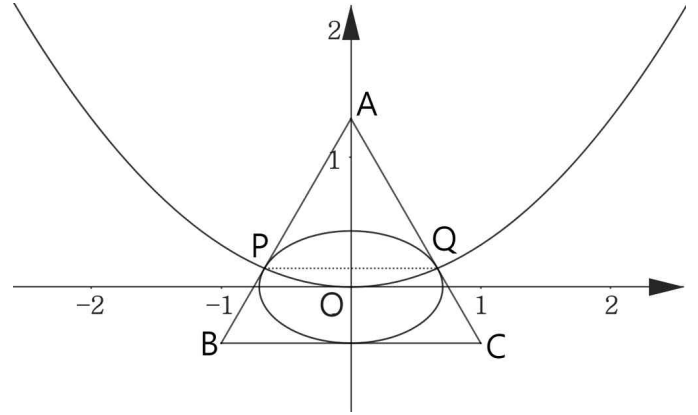
하면 Q에서의 접선의 방정식 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 은 직선 AC의

방정식 $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} - b$ 와 일치한다. 그러므로

$x_1 = \frac{\sqrt{3}a^2}{\sqrt{3}-b} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-b)}$, $y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{3}-b}$ 이다. 점 Q는 타원

위의 점이므로 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ 이다. 따라서, $b = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이다. 이때, $x_1 = \frac{2}{3}$, $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$ 이다. 도형이 y축에 대하여

대칭이므로 $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{12}\right)$ 이다.



세 점 P, O, Q를 지나는 포물선의 방정식은 $y = \frac{3\sqrt{3}}{16}x^2$ 이다. 포물선 위에 있는 삼각형 내부의 넓이 S는 삼각형

APQ의 넓이 $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ 과 직선 PQ와 포물선으로 둘러싸인 영역의 넓이

$\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{3\sqrt{3}}{16}x^2 \right) dx = \frac{2\sqrt{3}}{27}$ 의 합이다. 그러므로 $S = \frac{14\sqrt{3}}{27}$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이는 $\sqrt{3}$ 이므로 포물선

아래에 있는 삼각형 내부의 넓이는 $\sqrt{3} - S = \frac{13\sqrt{3}}{27}$ 이다. 그러므로 두 영역의 넓이 중에서 작은 값은 $\frac{13\sqrt{3}}{27}$ 이다.