2028 수능 응시자를 위한 추가 문항입니다.

AX. 행렬의 뜻

AX01

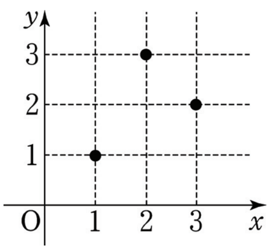
○○
(2005(예비)—나형9)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에서 X로의 함수 f를 이용하여 삼차 정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}를 다음과 같이 정의한다.

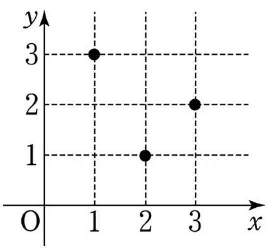
$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (f(i)=j)\\ 0 & (f(i)\neq j)\end{cases}$$

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는? [3점][1]

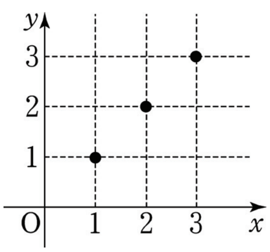
①



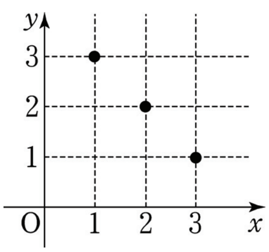
②



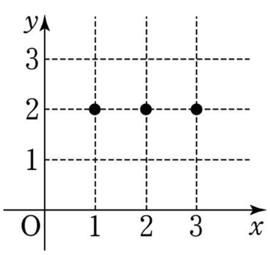
③



④



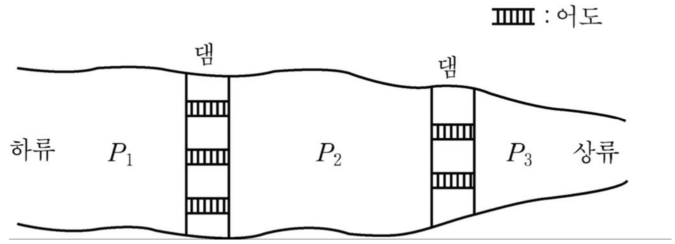
⑤



AX02

○○
(2005(6)—나형26)

수량을 조절하기 위하여 그림과 같이 강에 댐 2개를 설치하고, 물고기를 위한 통로(어도)를 상류 댐에 2개, 하류 댐에 3개를 설치하였다. 행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}를 다음과 같이 정의할 때, 행렬 A의 표현으로 옳은 것은? [3점][2]



(가) $i=j$일 때, $a_{ij}=1$ (나) $i\neq j$일 때, a_{ij}는 물고기가 수역 P_i에서 수역 P_j로 갈 수 있는 경로의 수

① $\begin{pmatrix}1&3&6\\3&1&2\\6&2&1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&6\\3&6&1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}1&3&3\\3&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}1&2&6\\2&1&3\\6&3&1\end{pmatrix}$

AX. 행렬의 연산(덧셈, 뺄셈, 실수배)

AX03
(2015(9)−B형1)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\a&0\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 10일 때, a의 값은? [2점][3)]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

AX04
(2016−A형1)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은? [2점][4)]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

AX05
(2015(9)−A형2)

행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $3A$의 모든 성분의 합은? [2점][5)]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

AX06
(2014(6)−A형2)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $2A-B$의 모든 성분의 합은? [2점][6)]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

AX07
(2014(9)−A형2/B형1)

두 행렬 A, B에 대하여 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$이고 $A+B=\begin{pmatrix}5&3\\2&0\end{pmatrix}$일 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은? [2점][7)]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

AX08
(2008−가형2/나형2)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}$에 대하여 $A=2B-X$를 만족시키는 행렬 X는? [2점][8)]

① $\begin{pmatrix}3&2\\-1&-2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}3&-2\\1&2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}-1&-2\\3&2\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}-2&-1\\2&3\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}-3&1\\-2&2\end{pmatrix}$

AX09
(2005(9)−가형2/나형2)

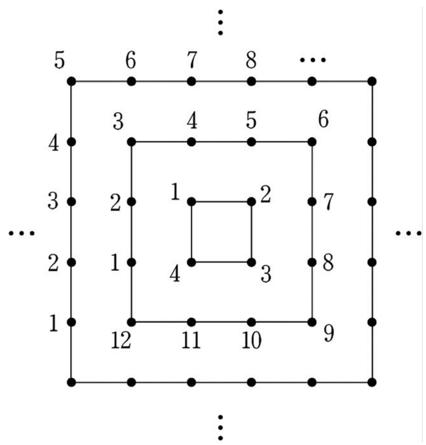
$3A+B=\begin{pmatrix}2&1\\-2&5\end{pmatrix}$, $2A-B=\begin{pmatrix}3&-1\\2&5\end{pmatrix}$를 만족하는 행렬 A, B에 대하여 행렬 $A+B$의 각 성분의 합은? [2점][9)]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

AX10

○○ (2005-나형22)

한 변의 길이가 각각 $1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots$인 정사각형의 변과 꼭짓점에 아래 그림과 같이 일정한 간격으로 자연수가 규칙적으로 배열되어 있다. 이때, 각 정사각형에서 1은 왼쪽 아래 꼭짓점 바로 위에 놓여 있다.



각 정사각형의 네 꼭짓점에 놓이는 자연수를 성분으로 하는 이차정사각행렬을 차례로 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$이라 하자. 예를 들면, $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}3&6\\12&9\end{pmatrix}$이다.

행렬 A_{15}의 모든 성분의 합을 구하시오. [4점][10)]

AX11

●●● (2010(6)-가형17/나형17)

집합 S가 $S=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점][11)]

ㄱ. 집합 S에 속하는 서로 다른 두 행렬 $A,\ B$에 대하여 행렬 $A+B$의 성분은 모두 짝수이다.

ㄴ. 집합 S에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 m개의 행렬 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m$을 선택하였을 때,

$$A_1+A_2+\cdots+A_m=\begin{pmatrix}9&9\\9&9\end{pmatrix}$$

가 되도록 하는 m이 존재한다.

ㄷ. 집합 S에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 n개의 행렬 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$을 선택하였을 때, 행렬 $\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}+A_1+A_2+\cdots+A_n$의 성분이 모두 짝수가 되도록 하는 n의 최솟값은 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

AX. 행렬의 연산(단위행렬)

AX12

(2011(6)-가형2/나형2)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B가 $A+B=2E$를 만족시킬 때, 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.) [2점][12)]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

AX. 행렬의 연산(곱)

AX13

(2012(9)-나형24)

이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}와 이차정사각행렬 B의 $(i,\ j)$성분 b_{ij}를 각각

$$a_{ij}=i-j+1,$$
$$b_{ij}=i+j+1\ (i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$$

라 할 때, 행렬 AB의 $(2,\ 2)$성분을 구하시오. [3점][13)]

AX14

(2011(6)-나형26)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 AB의 모든 성분의 합은? [3점][14)]

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

AX15

(2000-인문4)

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$일 때, A^2B-A는? [2점][15)]

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

AX16

(1995−인문예체능3/자연3)

이차정사각행렬 A, B에 대하여

$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$일 때,

행렬 $\frac{1}{3}AB-BA$는? [1점][16)]

① $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

AX17

(2006−가형2/나형2)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여

$2A+X=AB$를 만족시키는 행렬 X는? [2점][17)]

① $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

AX18

(2006(6)−가형2/나형2)

두 행렬 X, Y에 대하여 $X+Y=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$X-Y=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$일 때, X^2+XY는? [2점][18)]

① $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

[19~20] 두 행렬 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하라.

AX19

(1992(실험평가3차)−공통24)

다음 중 EA와 같은 행렬은?[19)]

① $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{31} & a_{22}+a_{32} & a_{23}+a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & a_{33}-a_{23} \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

AX20

(1992(실험평가3차)−공통25)

행렬 A에 어떤 기본변형을 하면 EA와 같아지는가?[20)]

① 행렬 A의 제 2행을 -1배 한다.

② 행렬 A의 제 3행을 -1배 한다.

③ 행렬 A의 제 3행을 제 2행에 더한다.

④ 행렬 A의 제 2행을 -1배하여 제 3행에 더한다.

⑤ 행렬 A의 제 3행을 -1배하여 제 2행에 더한다.

AX21

○
(2008(6)−나형5)

두 상수 a, b에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$가 $A^2=A$이고 $a^2+b^2=10$일 때, $(a+b)^2$의 값은? [3점][21]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

AX22

○○
(2005−나형18)

이차방정식 $x^2-4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 두 행렬의 곱 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점][22]

AX23

○○
(2005(예비)−나형20)

이차방정식 $x^2-7x-1=0$의 두 근을 α와 β라고 하자. 행렬 $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라고 할 때, $a+d$의 값을 구하시오. [3점][23]

AX24

○○
(2007−나형30)

이차정사각행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $D(X)=ad-bc$라 하자. 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix}$에 대하여

$D(A^2)=D(5A)$를 만족시키는 모든 상수 p의 합을 구하시오. [4점][24]

AX25

○○
(2006(9)−나형12)

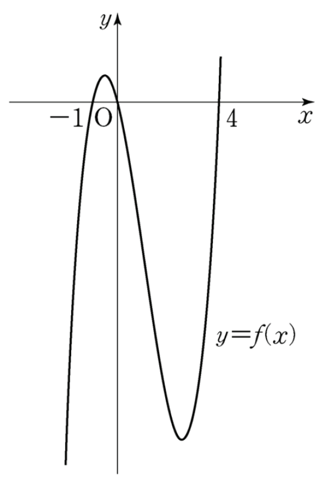
중심이 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원에 대응되는 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & r \end{pmatrix}$라 하자. 원 $(x+c-1)^2+y^2=c^2$에 대응되는 행렬이 A이고, 원 $(x-1)^2+y^2=k^2$에 대응되는 행렬이 A^2일 때, $c+k$의 값은? (단, $c>0$ 이고 $k>0$이다.) [3점][25]

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

AX26

○○
(2015−A형13)

함수 $f(x)=x(x+1)(x-4)$가 있다.



행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 $A\begin{pmatrix} 0 \\ f(a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점][26]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

AX27

○○
(2009(6)−나형7)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 이차정사각행렬 C가 $AB=CA$를 만족시킨다. $ab=4$일 때, 행렬 C의 모든 성분의 합의 최솟값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점][27)]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

AX28

○○
(1994(2차)−공통14)

모든 실수 x, y에 대하여 행렬의 곱 $(x\ \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$의 성분이 음이 아닐 때, $a^2+(b-2)^2$의 최솟값은?[28)]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ 2
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 4

AX29

○○
(2005(예비)−가형2/나형2)

이차 정사각행렬 A에 대하여 다음이 성립한다.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

이때, A의 모든 성분의 합은? [2점][29)]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

AX30

○○
(2012(9)−가형14/나형14)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$와 이차정사각행렬 B가 다음 조건을 만족시킬 때, 행렬 $A+B$의 $(1,\ 2)$성분과 $(2,\ 1)$성분의 합은? [4점][30)]

(가) $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이다.
(나) $AB=2A$이고, $BA=4B$이다.

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

AX31

○○
(1999−인문29)

모든 성분이 0 또는 1인 4×1행렬 X에 대하여 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$이라 할 때, m이 짝수이고 n이 홀수가 되도록 하는 행렬 X의 개수를 구하시오. [3점][31)]

AX. 행렬의 연산(곱) 규칙성

AX32

○
(1996-인문예체능3/자연3)

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$일 때, A^3은? [1점][32]

① $\begin{pmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}3 & -3\\0 & 3\end{pmatrix}$

AX33

○
(2008(9)-나형26)

행렬 $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\3 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{11}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$일 때, c의 값은? [3점][33]

① 0 ② $2^5\cdot 3^5$ ③ $2^5\cdot 3^6$
④ $2^6\cdot 3^5$ ⑤ $2^6\cdot 3^6$

AX34

○○
(2006(6)-나형20)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -7\\0 & -1\end{pmatrix}$

에 대하여 $A^{100}B$의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점][34]

AX35

○○
(2005(6)-나형5)

행렬 A가 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & -1\end{pmatrix}$일 때, A^{62}은? (단, O는 영행렬이고 E는 단위행렬이다.) [3점][35]

① $-E$ ② E ③ O
④ $-A$ ⑤ A

AX36

○○
(2011(9)-나형30)

행렬 $\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -4\end{pmatrix}^n$의 $(1,\ 2)$성분은 $2^4-2^5+2^6-2^7+2^8$이고 $(1,\ 1)$성분은 a이다. $a+n$의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.) [4점][36]

AX37

○○
(2009(6)-나형19)

자연수 n과 8 이하의 자연수 a에 대하여 $\begin{pmatrix}a & 3\\0 & a\end{pmatrix}^n$의 $(1,\ 1)$성분과 $(1,\ 2)$성분이 같을 때, 가능한 모든 a의 곱을 구하시오. [3점][37]

AX38

○○
(2011-나형29)

이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=i-j\ (i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$$

이다. 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}$의 $(2,\ 1)$성분은? [4점][38]

① -2010　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2010

AX39

○○○
(2010(9)-가형25/나형25)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^m=A^n$을 만족시키는 40 이하의 두 자연수 $m,\ n(m>n)$의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하시오. [4점][39]

AX40

○○
(2003-인문4/자연4)

두 행렬 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$과 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이 있다. 두 상수 a와 b가 $(E+2A)^2=aE+bA$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [2점][40]

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

AX41

○○
(2004(9)-인문5/자연5)

이차정사각행렬 A가

$$(A+2E)^2=3(A+E)$$

를 만족시킬 때, A^{49}을 간단히 하면? (단, E는 단위행렬이다.) [2점][41]

① A　② $-A$　③ E
④ $A+E$　⑤ $-A-E$

AX42

○○
(2009-나형24)

이차정사각행렬 A는 모든 성분의 합이 0이고 $A^2+A^3=-3A-3E$를 만족시킨다. 행렬 A^4+A^5의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.) [4점][42]

AX43

○○○
(2005(6)-가형13/나형13)

두 이차정사각행렬 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $A_{n+1}=A_nB(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점][43]

ㄱ. $A_2=A_5$
ㄴ. $A_{2n+2}=A_{2n}A_{2n+2}$
ㄷ. $A_{2n+1}=A_{2n}A_{2n+1}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

AX44

○○○
(2006(6)－나형10)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$을 중복을 허락하여 곱해서 얻어지는 행렬의 집합을 S라 하자. 다음은 S의 원소를 구하는 과정이다.

> $A^2=A$, $B^2=B$이므로 S의 원소는
> A, B, $(AB)^n$, $(BA)^n$, $(AB)^nA$, $(BA)^nB$
> 의 형태이다.
> 한편,
> $AB=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$이므로 $(AB)^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$
> $BA=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$이므로 $(BA)^n=\boxed{\text{(가)}}$
> 따라서 $(AB)^nA=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\boxed{\text{(나)}}$
> $(BA)^nB=\boxed{\text{(가)}}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\boxed{\text{(다)}}$
> 그러므로 S의 원소는 A, B, $2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$,
> $\boxed{\text{(가)}}$, $\boxed{\text{(나)}}$, $\boxed{\text{(다)}}$
> 의 형태이다. (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점][44]

	(가)	(나)	(다)
①	$\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}$	2^nA	2^nB
②	$\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}$	2^nA	2^nAB
③	$\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}$	2^nAB	2^nB
④	$\begin{pmatrix}2^n&0\\2^n&0\end{pmatrix}$	2^nB	2^nA
⑤	$\begin{pmatrix}2^n&0\\2^n&0\end{pmatrix}$	2^nA	2^nB

AX45

○○○
(2014(예비)－A형15/B형11)

영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A가 $A^2=3A$를 만족시킨다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 행렬 $(A-E)^n$을

$$(A-E)^n=a_nA+(-1)^nE$$

와 같이 나타낼 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (단, E는 단위행렬이다.)

> 자연수 n에 대하여
> $(A-E)^{n+1}=\{a_nA+(-1)^nE\}(A-E)$
> $=a_nA^2-a_nA+(-1)^nA+(-1)^{n+1}E$
> 이고, $A^2=3A$이므로
> $(A-E)^{n+1}=(2a_n+\boxed{\text{(가)}})A+(-1)^{n+1}E$
> 이다. 그러므로
> $a_{n+1}=2a_n+\boxed{\text{(가)}}$ $\cdots$ ㉠
> 이다. 따라서 2 이상인 자연수 n에 대하여
> $a_n+a_{n+1}=2(a_{n-1}+a_n)$
> 이다. 또한
> $a_1+a_2=1+1=2$
> 이므로 모든 자연수 n에 대하여
> $a_n+a_{n+1}=\boxed{\text{(나)}}$ $\cdots$ ㉡
> 이다. ㉠과 ㉡에 의해
> $3a_n+(-1)^n=\boxed{\text{(나)}}$
> 이다. 따라서
> $a_n=\dfrac{\boxed{\text{(나)}}+(-1)^{n+1}}{3}$
> 이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(9)\times g(5)$의 값은? [A형4점/B형3점][45]

① -32　② -16　③ 8
④ 16　⑤ 32

AX. 행렬의 연산(곱) 참, 거짓 판단

AX46

○○○
(2006−나형6)

다음 세 조건을 만족시키는 영행렬이 아닌 모든 이차정사각행렬 A, B에 대하여 B^3+2BA^3과 항상 같은 행렬은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점][46]

(가) $AB=BA$
(나) $(E-B)^2=E-B$
(다) $AB=-B$

① $2A$ ② $-A$ ③ E
④ $2B$ ⑤ $-B$

AX47

○○○
(1992(실험평가3차)−공통23)

두 개의 3차정사각행렬 A, X가

$$X^2-AX-XA+A^2=O$$

을 만족할 때 다음 보기 중 옳은 것만을 묶어 놓은 것은? (단, O은 3차 영행렬이다.)[47]

ㄱ. $X^2-2AX+A^2=O$
ㄴ. $(X-A)^2=O$
ㄷ. $X=A$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

AX48

○○○
(2004(6)−인문12)

두 이차정사각행렬 A와 B에 대하여 〈보기〉 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?
(단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.) [3점][48]

ㄱ. $A^2B=O$이면 $AB=O$이다.
ㄴ. $A^2+B=A+B$이면 $A^2B=AB$이다.
ㄷ. $(A+E)(A-E)=E$이면 $A^2B=BA^2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

AX49

○○○
(2010(6)−나형14)

행렬 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 집합 S가 $S=\{A \mid A$는 이차정사각행렬이고, $PAP=A\}$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.) [4점][49]

ㄱ. $P\in S$
ㄴ. $A\in S$이고 $B\in S$이면 $AB\in S$이다.
ㄷ. $A\in S$이고 $A^2=O$이면 $A=O$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

AX. 행렬의 연산(곱) 실생활

AX50

○
(2005(9)-나형26)

어느 공장에서 제품 A를 1개 만드는 데 강철 3톤과 알루미늄 2톤이 사용되고, 제품 B를 1개 만드는 데 강철 4톤과 알루미늄 3톤이 사용된다. 강철과 알루미늄의 톤당 구입 가격이 각각 x원, y원일 때, A를 25개, B를 15개 만드는 데 사용된 강철과 알루미늄의 총 구입 가격을 행렬의 곱으로 나타낸 것은? [3점][50)]

① $(15\ \ 25)\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ② $(15\ \ 25)\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

③ $(25\ \ 15)\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ④ $(25\ \ 15)\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25\\15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

AX51

○○
(1993(실험평가6차)-공통13)

그릇 A에는 농도 $p\%$의 소금물 300g, 그릇 B에는 농도 $q\%$의 소금물 300g이 있다. 동시에 100g씩 퍼내어 서로 교환해 섞는 시행을 n회 반복한 후, 그릇 A의 소금물의 농도를 a_n, 그릇 B의 소금물의 농도를 b_n이라 하면

$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이다. 이때, 행렬 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$는?[51)]

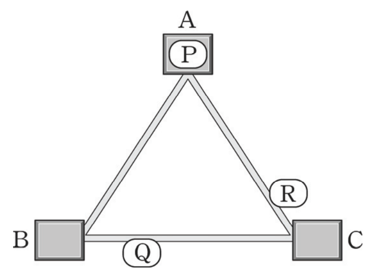
① $\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&2\\2&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

AX52

○○
(2004(9)-인문22/예체능22/자연22)

아래 그림은 인구가 각각 2000명, 3000명, 2000명이고 서로 같은 거리에 있는 세 마을 A, B, C의 위치와 도로망을 나타낸 것이다. 회사 갑은 P, Q, R지점 중 어느 한 곳에 상점을 내려고 한다. 그런데 경쟁회사인 을이 Q, R지점 중 한 곳에 같은 시기에 상점을 낼 것이라는 정보를 입수하였다. 경험적으로 사람들은 갑의 상점에 이르는 도로상의 거리와 을의 상점에 이르는 도로상의 거리를 비교하여 갑의 상점이 가깝거나 같은 경우에는 30%, 먼 경우에는 20%가 갑의 상점을 선택한다고 한다. 이때, 갑, 을 두 상점의 위치에 따른 갑의 상점이 확보할 수 있는 고객 수를 오른쪽 표로 나타내었다.



상점위치		갑의 확보 고객수
갑	을	
P	Q	1600
	R	1900
Q	Q	2100
	R	(ㄱ)
R	Q	(ㄴ)
	R	2100

표의 빈칸 (ㄱ)과 (ㄴ)에 알맞은 수와, 갑의 상점 위치에 따른 갑의 최소 확보 고객수를 가장 크게 하는 갑의 상점 위치를 순서대로 바르게 나열한 것은? [3점][52)]

① 1600, 1700, P ② 1700, 1800, Q
③ 1700, 1800, R ④ 1800, 1700, Q
⑤ 1800, 1900, R

AX53

○○
(2005-나형8)

다음은 지난해에 어느 회사에서 생산한 두 제품 ㉮와 ㉯의 제품 한 개당 제조원가와 판매 가격 및 그 해 판매량을 나타낸 표이다.

제품명 / 가격	㉮	㉯
제조원가	a_{11}	a_{12}
판매가격	a_{21}	a_{22}

판매량 / 제품명	상반기	하반기
㉮	b_{11}	b_{12}
㉯	b_{21}	b_{22}

위의 표를 각각 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$와 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$로 나타내고, 이 두 행렬의 곱 AB를 $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하자. 제품 한 개당 판매 이익금을 판매 가격에서 제조원가를 뺀 값으로 정의할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점][53)]

ㄱ. $a+b$는 지난해 상반기에 판매된 제품의 제조원가 총액이다.
ㄴ. $c+d$는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 판매 총액이다.
ㄷ. $d-b$는 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 이익금 총액이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

AX 행렬

1	①	2	①	3	④	4	⑤	5	①
6	④	7	①	8	①	9	②	10	290
11	④	12	④	13	13	14	③	15	①
16	①	17	②	18	⑤	19	⑤	20	⑤
21	①	22	16	23	53	24	25	25	①
26	③	27	③	28	③	29	④	30	③
31	4	32	①	33	③	34	93	35	①
36	37	37	18	38	④	39	180	40	④
41	①	42	18	43	④	44	①	45	①
46	⑤	47	②	48	④	49	⑤	50	③
51	④	52	③	53	④				

※ 2028 수능을 대비하시는 분들은
2026 이동훈 기출문제집에서 아래의 문제들을 제외하고 풀면 됩니다.
(삭제: 외분점, 원순열)

• 수학1 평가원 편
A077

• 수학2 평가원 편
없음

• 확률과 통계 평가원 편
J001~J007, K017

• 수학1+수학2 교사경 편
A057, A127, B033, C072

• 확률과 통계 교사경 편
J001~J008, K030

• 수학1 노베 편
A063

• 수학2 노베 편
없음

• 확률과 통계 노베 편
J001~J009

1)
AX01 ㅣ답 ①

[풀이]
주어진 행렬에 대하여

$a_{11}=1,\ a_{12}=0,\ a_{13}=0$이므로

$f(1)=1$

$a_{21}=0,\ a_{22}=0,\ a_{23}=1$이므로

$f(2)=3$

$a_{31}=0,\ a_{32}=1,\ a_{33}=0$이므로

$f(3)=2$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 ①과 같다.

답 ①

2)
AX02 ㅣ답 ①

[풀이]
조건 (가)에서

$a_{11}=1,\ a_{22}=1,\ a_{33}=1$

조건 (나)에서

$a_{12}=3,\ a_{21}=3$

$a_{23}=2,\ a_{32}=2$

$a_{13}=6,\ a_{31}=6$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

답 ①

3)
AX03 ㅣ답 ④

[풀이]
행렬의 덧셈의 정의에 의하여

$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+a & 1 \end{pmatrix}$

행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 10이므로

$6+a=10$

$\therefore\ a=4$

답 ④

4)
AX04 ㅣ답 ⑤

[풀이]
행렬의 뺄셈의 정의에 의하여

$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은 5이다.

답 ⑤

5)
AX05 ㅣ답 ①

[풀이]
행렬의 실수배의 정의에 의하여

$3A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

행렬 $3A$의 모든 성분의 합은 12이다.

답 ①

6)
AX06 ㅣ답 ④

[풀이]
행렬의 실수배의 정의와
행렬의 뺄셈의 정의에 의하여

$2A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

행렬 $2A-B$의 모든 성분의 합은 9이다.

답 ④

7)
AX07 ㅣ답 ①

[풀이]
행렬의 연산의 성질에 의하여

$B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}-A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

행렬 B의 모든 성분의 합은 7이다.

답 ①

8)
AX08 ㅣ답 ①

[풀이]
행렬의 연산의 성질에 의하여

$X=2B-A$

$=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

답 ①

9)
AX09 ㅣ답 ②

[풀이]

주어진 두 등식을 변변히 더하면

$5A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

행렬의 실수배의 정의에 의하여

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

이를 주어진 왼쪽 등식에 대입하면

$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

행렬의 덧셈의 정의에 의하여

$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 값은 0이다.

답 ②

10)

AX10 | 답 290

[풀이]

$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

행렬의 실수배의 정의에 의하여

$A_2=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=3A_1$

$A_3=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=5A_1$

$\vdots$

모든 자연수 n에 대하여

$A_n=(2n-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

행렬 $A_{15}=29\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$29(1+2+3+4)=290$

답 290

11)

AX11 | 답 ④

[풀이]

ㄱ. (거짓)

(반례)

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$라고 하자.

행렬의 덧셈의 정의에 의하여

$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

이때, 행렬 $A+B$의 성분 중에서 홀수인 것이 있다.

ㄴ. (참)

행렬의 실수배의 정의에 의하여

$\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

행렬의 덧셈의 정의에 의하여

$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 이하의 자연수 k에 대하여

$A_{4k-3}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{4k-2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{4k-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{4k}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

으로 두면

$A_1+A_2+\cdots+A_{12}=\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$

ㄷ. (참)

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$의 성분이 모두 홀수이므로

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}+A_1+A_2+\cdots+A_n$의 성분이 모두 짝수이려면

행렬 $A_1+A_2+\cdots+A_n$의 성분이 모두 홀수이어야 한다.

○ 집합 S에서 중복을 허락하여 2개의 행렬을 선택한 후, 두 행렬을 더하면

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\vdots$

두 행렬을 더해서 만들어지는 행렬의 성분 중에서 짝수는 2개 혹은 4개다.

○ 집합 S에서 중복을 허락하여 3개의 행렬을 선택한 후, 세 행렬을 더하면

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\vdots$

세 행렬을 더해서 만들어지는 행렬의 성분 중에서 짝수는 1개 혹은 3개다.

○ 집합 S에서 중복을 허락하여 4개의 행렬을 선택한 후, 네 행렬을 더하면

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\4&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\4&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$$
$\vdots$

네 행렬을 더해서 만들어지는 행렬의 성분 중에서 짝수는 0개 혹은 2개 혹은 4개다.

따라서 행렬 $A_1+A_2+\cdots+A_n$의 성분이 모두 홀수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

12)

AX12 | 답 ④

[풀이]

주어진 등식에서

$B=2E-A$

행렬의 연산의 성질에 의하여

$A-B=A-(2E-A)=2(A-E)$

$=2\begin{pmatrix}0&2\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\-4&4\end{pmatrix}$

따라서 구하는 값은 4이다.

답 ④

13)

AX13 | 답 13

[풀이1]

행렬 AB의 $(2,\ 2)$성분을 x라고 하면

$x=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=2\times4+1\times5=13$

답 13

[풀이2]

행렬 A와 B는

$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix}$

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\10&13\end{pmatrix}$

따라서 구하는 값은 13이다.

답 13

14)

AX14 | 답 ③

[풀이]

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$AB=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-3&-10\\4&6&20\end{pmatrix}$

따라서 구하는 값은 15이다.

답 ③

15)

AX15 | 답 ①

[풀이]

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$AB=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$

행렬의 뺄셈의 정의에 의하여

$AB-E=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$

행렬의 연산의 성질에 의하여

$\therefore\ A^2B-A=A(AB-E)=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$

답 ①

16)

AX16 | 답 ①

[풀이]

행렬의 연산의 성질에 의하여

$\frac{1}{3}AB-BA$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&-4\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-4\\1&2\end{pmatrix}$

답 ①

17)

AX17 | 답 ②

[풀이]

행렬의 연산의 성질에 의하여

$X=AB-2A$

$=A(B-2E)$

$=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}$

답 ②

18)
AX18 | 답 ⑤

[풀이]
주어진 두 등식을 변변히 더하면

$$2X=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

실수배의 정의에 의하여

$X=-E$

행렬의 연산의 성질에 의하여

$$\therefore\ X^2+XY=X(X+Y)$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

답 ⑤

19)
AX19 | 답 ⑤

[풀이]
행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

답 ⑤

20)
AX20 | 답 ⑤

[풀이]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$=A-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이므로, EA는 행렬 A의 제 3행을 -1배하여 제 2행에 더한 행렬이다.

답 ⑤

21)
AX21 | 답 ①

[풀이]
행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} ab+1 & a \\ b & ab+4 \end{pmatrix}$$

주어진 등식에 대입하면

$$\begin{pmatrix} ab+1 & a \\ b & ab+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$ab+1=-1$, $ab+4=2$ 즉, $ab=-2$

곱셈공식에 의하여

$$\therefore\ (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=6$$

답 ①

22)
AX22 | 답 16

[풀이]
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-1$

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\beta & \alpha^2+\beta^2 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

이 행렬의 모든 성분의 합은

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2=16$$

답 16

23)
AX23 | 답 53

[풀이]
행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$A^2=\begin{pmatrix} \alpha^2+1 & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & \beta^2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$a=\alpha^2+1$, $d=\beta^2+1$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=-1$

곱셈공식에 의하여

$$\therefore\ a+d=\alpha^2+\beta^2+2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2=53$$

답 53

24)
AX24 | 답 25

[풀이]
행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$$

$$D(A^2)=1\times p^2-(1+p)\times 0=p^2$$

행렬의 실수배의 정의에 의하여

$5A=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5p \end{pmatrix}$

$D(5A)=5\times 5p-5\times 0=25p$

주어진 등식에 대입하면

$p^2=25p$

정리하면

$p(p-25)=0$

풀면

$p=0$ 또는 $p=25$

따라서 구하는 값은 25이다.

답 25

25)

AX25

ㅣ답 ①

[풀이]

원 $(x+c-1)^2+y^2=c^2$의 중심과 반지름의 길이가 각각 $(1-c,\ 0)$, c이므로

$A=\begin{pmatrix} 1-c & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix}$

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$A^2=\begin{pmatrix} (1-c)^2 & 0 \\ 1 & c^2 \end{pmatrix}$

원 $(x-1)^2+y^2=k^2$의 중심과 반지름의 길이가 각각 $(1,\ 0)$, k이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} (1-c)^2 & 0 \\ 1 & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$(1-c)^2=1$, $c^2=k$

c는 양수이므로

$c=2$

이를 대입하면

$k=4$

$\therefore\ c+k=6$

답 ①

26)

AX26

ㅣ답 ③

[풀이]

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f(a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(a) \\ 3f(a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$f(a)=0$, $a(a+1)(a-4)=0$

풀면

$a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=4$

따라서 구하는 값은 3이다.

답 ③

27)

AX27

ㅣ답 ③

[풀이]

행렬 C를 $C=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$로 두자.

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$AB=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2b & 2 \end{pmatrix}$, $CA=\begin{pmatrix} x & 2y \\ z & 2w \end{pmatrix}$

주어진 등식에 대입하면

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2b & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 2y \\ z & 2w \end{pmatrix}$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$x=1$, $y=\dfrac{a}{2}$, $z=2b$, $w=1$

산술기하절대부등식에 의하여

(행렬 C의 모든 성분의 합)

$=2+\dfrac{a}{2}+2b\ge 2+2\sqrt{ab}=6$

(단, 등호는 $a=4$, $b=1$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

답 ③

28)

AX28

ㅣ답 ③

[풀이]

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} ax+by & bx+ay \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$=ax^2+2bxy+ay^2$

모든 실수 x, y에 대하여

$ax^2+2bxy+ay^2\ge 0$

을 만족시키는 a, b의 관계식을 구하자.

(1) $a=0$인 경우

$ax^2+2bxy+ay^2=2bxy\ge 0$

모든 실수 x, y에 대하여 성립하려면 $b=0$

$a^2+(b-2)^2=4$

(2) $a\neq 0$인 경우

$ax^2+2bxy+ay^2$

$=a\left(x+\dfrac{b}{a}y\right)^2+\dfrac{(a^2-b^2)}{a}y^2\geq 0$

모든 실수 x, y에 대하여 성립하려면

$a>0$, $a^2\geq b^2$

$a^2+(b-2)^2\geq b^2+(b-2)^2$

$=2b^2-4b+4=2(b-1)^2+2\geq 2$

(단, 등호는 $b=1$일 때 성립한다.)

$\therefore\ a^2+(b-2)^2\geq 2$

(1), (2)에서 구하는 최솟값은 2이다.

답 ③

29)

AX29

| 답 ④

[풀이1]

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$로 두자.

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$a=2$, $c=3$ …㉠

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+3b\\2c+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$2a+3b=4$, $2c+3d=3$ …㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b=0$, $d=-1$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1\end{pmatrix}$

행렬 A의 모든 성분의 합은 4이다.

답 ④

[풀이2] (교육과정 외)

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3\end{pmatrix}$

양변의 오른쪽에 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3\end{pmatrix}$의 역행렬을 곱하면

$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3\end{pmatrix}\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1\end{pmatrix}$

행렬 A의 모든 성분의 합은 4이다.

답 ④

30)

AX30

| 답 ③

[풀이]

행렬 B를 $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w\end{pmatrix}$로 두자.

조건 (가)에서

$B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\z-w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$x-y=0$, $z-w=0$

즉, $x=y$, $z=w$

행렬 B는 $B=\begin{pmatrix} x & x \\ z & z\end{pmatrix}$이다.

조건 (나)에서

$AB=\begin{pmatrix} x+z & x+z \\ ax+az & ax+az\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2a & 2a\end{pmatrix}=2A$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$x+z=2$, $ax+az=2a$

연립하면

$x+z=2$

행렬 B는 $B=\begin{pmatrix} x & x \\ 2-x & 2-x\end{pmatrix}$이다.

조건 (나)에서

$BA=\begin{pmatrix} (1+a)x & (1+a)x \\ (1+a)(2-x) & (1+a)(2-x)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4x & 4x \\ 4(2-x) & 4(2-x)\end{pmatrix}=4B$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$(1+a)x=4x$, $(1+a)(2-x)=4(2-x)$

연립하면

$a=3$

행렬의 덧셈의 정의에 의하여

$A+B=\begin{pmatrix} 1+x & 1+x \\ 5-x & 5-x\end{pmatrix}$

이 행렬의 $(1,\ 2)$성분과 $(2,\ 1)$성분의 합은 6이다.

답 ③

31)

AX31

| 답 4

[풀이]

$X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$로 두자.

(단, a, b, c, d는 0 또는 1)

주어진 등식에 대입하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$\begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$m=a+b+c+d$, $n=a+c$

n이 홀수이므로

$\begin{cases} a=1 \\ c=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=0 \\ c=1 \end{cases}$

m이 짝수이므로

$b+d=m-1$은 홀수이다.

$\begin{cases} b=1 \\ d=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} b=0 \\ d=1 \end{cases}$

X로 가능한 행렬은

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

답 4

32)

AX32 | 답 ①

[풀이]

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

답 ①

33)

AX33 | 답 ③

[풀이]

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 2\cdot 3 & 0 \\ 0 & 2\cdot 3 \end{pmatrix}$$

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 0 & 2^2\cdot 3 \\ 2\cdot 3^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 2^2\cdot 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2\cdot 3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4A=\begin{pmatrix} 0 & 2^3\cdot 3^2 \\ 2^2\cdot 3^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

모든 자연수 n에 대하여

$$A^{2n-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2^n\cdot 3^{n-1} \\ 2^{n-1}\cdot 3^n & 0 \end{pmatrix}$$

$n=6$을 대입하면

$$A^{11}=\begin{pmatrix} 0 & 2^6\cdot 3^5 \\ 2^5\cdot 3^6 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ c=2^5\cdot 3^6$

답 ③

34)

AX34 | 답 93

[풀이]

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

모든 자연수 n에 대하여

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(증명은 수학적 귀납법으로 한다.)

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$A^{100}B=\begin{pmatrix} 1 & -100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 93 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 이 행렬의 모든 성분의 합은 93이다.

답 93

35)

AX35 | 답 ①

[풀이]

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$A^2=-E$

$A^3=A^2A=-A$

$A^4=A^3A=-A^2=E$

$A^5=A^4A=A$

$\vdots$

모든 자연수 n에 대하여

$A^{4n-3}=A$

$A^{4n-2}=-E$

$A^{4n-1}=-A$

$A^{4n}=E$

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$\therefore\ A^{62}=(A^4)^{15}A^2=E(-E)=-E$

답 ①

36)

AX36 | 답 37

[풀이]

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 2^2 & 2-2^2 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}$$

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2-2^3+2^4 \\ 0 & -2^6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2^4 & 2^3-2^4+2^5-2^6 \\ 0 & 2^8 \end{pmatrix}$$

⋮

모든 자연수 n에 대하여

행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^n$의 $(1,\ 2)$성분은

$2^{n-1}-2^n+2^{n+1}-\ \cdots\ +(-1)^{n-1}\times 2^{2n-2}$

주어진 행렬의 $(1,\ 2)$성분이

$2^4-2^5+2^6-2^7+2^8$이므로 $n=5$

이때 주어진 행렬의 $(1,\ 1)$성분은 2^5이다.

즉, $a=32$

$\therefore\ a+n=37$

답 37

37)

AX37 | 답 18

[풀이]

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a^2 & 6a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} a^2 & 6a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 9a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} a^3 & 9a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & 12a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

⋮

모든 자연수 n에 대하면

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 3na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

주어진 조건에서

$a^n=3na^{n-1}$

정리하면

$a=3n$

그런데 $a\le 8$이므로

8 이하의 자연수 중에서 3의 배수는 3, 6이다.

따라서 구하는 값은 18이다.

답 18

38)

AX38 | 답 ④

[풀이]

행렬 A는

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$A^2=AA=-E$

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^4=A^3A=E$

⋮

모든 자연수 n에 대하여

$A^{4n-3}=A$

$A^{4n-2}=A^2$

$A^{4n-1}=A^3$

$A^{4n}=E$

이고, $A+A^2+A^3+A^4=O$이다.

$2010=502\times 4+2$이므로

$A+A^2+A^3+\ \cdots\ +A^{2010}$

$$=502O+A+A^2=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 값은 1이다.

답 ④

39)

AX39 | 답 180

[풀이]

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$A^2=AA=-E$

$A^3=A^2A=-A$

$A^4=A^3A=E$

$A^5=A^4A=A$

⋮

모든 자연수 k에 대하여

$A^{4k-3}=A$ …㉠

즉, $A=A^5=A^9=\cdots=A^{37}=\cdots$

$A^{4k-2}=-E$ …㉡

즉, $A^2=A^6=A^{10}=\cdots=A^{38}=\cdots$

$A^{4k-1}=-A$ …㉢

즉, $A^3=A^7=A^{11}=\cdots=A^{39}=\cdots$

$A^{4k}=E$ …㉣

즉, $A^4=A^8=A^{12}=\cdots=A^{40}=\cdots$

이때, A, $-E$, $-A$, E는 각각 서로 다른 행렬이다.

㉠을 만족시키는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

1, 5, 9, …, 37에서 서로 다른 두 수를 선택하는 조합의 수와 같다.

즉, ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$

㉡을 만족시키는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

2, 6, 10, …, 38에서 서로 다른 두 수를 선택하는 조합의 수와 같다.

즉, ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$

㉢을 만족시키는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

3, 7, 11, …, 39에서 서로 다른 두 수를 선택하는 조합의 수와 같다.

즉, ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$

㉣을 만족시키는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

4, 8, 12, …, 40에서 서로 다른 두 수를 선택하는 조합의 수와 같다.

즉, ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$

합의 법칙에서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$45+45+45+45=180$

답 180

40)

AX40 | 답 ④

[풀이]

행렬의 연산의 성질에 의하여

$E+2A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$(E+2A)^2=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$

행렬이 연산의 성질에 의하여

$aE+bA=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$

주어진 조건에서

$\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$a=5,\ b=4$

$\therefore\ a+b=9$

답 ④

41)

AX41 | 답 ①

[풀이]

주어진 등식의 양변을 전개하면

$A^2+4A+4E=3A+3E$

정리하면

$A^2+A+E=O$ …(*)

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$A^3=A^2A=(-A-E)A$

$=-A^2-A=E(\because (*))$

$A^4=A^3A=EA=A$

$A^5=A^4A=AA=A^2=-A-E(\because (*))$

$A^6=A^5A=(-A-E)A$

$=-A^2-A=E(\because (*))$

⋮

그런데 $49=6\times 8+1$이므로

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$\therefore\ A^{49}=(A^6)^8A=A$

답 ①

42)

AX42 | 답 18

[풀이]

주어진 등식의 양변에 A^2을 곱하자.

행렬의 연산의 성질에 의하여

$A^4+A^5=-3A^3-3A^2$

$=-3(A^3+A^2)=9(A+E)$

행렬 $9A$의 모든 성분의 합이 0이고, 행렬 $9E$의 모든 성분의 합이 18이므로 구하는 값은 18이다.

답 18

43)

AX43 | 답 ④

[풀이]

주어진 귀납적 정의에 의하여

$A_2=A_1B=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$

$A_3=A_2B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$

$A_4=A_3B=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$

⋮

모든 자연수 n에 대하여

$A_{2n-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $A_{2n}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$

ㄱ. (거짓)

행렬의 상등의 정의에 의하여

$A_2\neq A_5$

ㄴ. (참)

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$A_{2n}A_{2n+2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$

모든 자연수 n에 대하여

$A_{2n+2}=A_{2n}A_{2n+2}$

ㄷ. (참)

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$A_{2n}A_{2n+1}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$

모든 자연수 n에 대하여

$A_{2n+1}=A_{2n}A_{2n+1}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

44)

AX44 | 답 ①

[풀이]

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$A^2=A$, $B^2=B$

이므로 S의 원소는

A, B, $(AB)^n$, $(BA)^n$, $(AB)^nA$, $(BA)^nB$

의 형태이다.

예를 들어

$AB^3AB=ABAB=(AB)^2$

$B^3A^2BAB=BABAB=(BA)^2B$

⋮

한편,

$AB=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$이므로 $(AB)^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$이므로 $(BA)^n=\boxed{\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}}$

따라서

$(AB)^nA=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\boxed{2^nA}$

$(BA)^nB=\boxed{\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\boxed{2^nB}$

그러므로 S의 원소는

A, B, $2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\boxed{\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}}$, $\boxed{2^nA}$, $\boxed{2^nB}$

의 형태이다. (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(가): $\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}$

(나): 2^nA

(다): 2^nB

답 ①

45)

AX45 | 답 ①

[풀이]

자연수 n에 대하여

$(A-E)^{n+1}=\{a_nA+(-1)^nE\}(A-E)$

$=a_nA^2-a_nA+(-1)^nA+(-1)^{n+1}E$

이고, $A^2=3A$이므로

$(A-E)^{n+1}=(2a_n+\boxed{(-1)^n})A+(-1)^{n+1}E$

$=a_{n+1}A+(-1)^{n+1}E$

이다. 그러므로

$a_{n+1}=2a_n+\boxed{(-1)^n}$ $\cdots$㉠

이다. n의 자리에 $n-1$을 대입하면

$a_n=2a_{n-1}-(-1)^n$

위의 두 식을 변변히 더하면

2 이상인 자연수 n에 대하여

$a_n+a_{n+1}=2(a_{n-1}+a_n)$

이다. $a_{n-1}+a_n=b_n$으로 두면

$b_{n+1}=2b_n(n\geq 2)$

$b_n=b_2\times 2^{n-2}=(a_1+a_2)2^{n-2}=2^{n-1}$

($\because$ ㉠에서 $a_2=2a_1-1=1$)

즉, $a_{n-1}+a_n=2^{n-1}(n\geq 2)$

모든 자연수 n에 대하여

$a_n+a_{n+1}=\boxed{2^n}$ $\cdots$㉡

이다. ㉠과 ㉡에 의해

$2a_n+(-1)^n=a_{n+1}=\boxed{2^n}-a_n$

이다. 따라서

$$a_n=\frac{\boxed{2^n}+(-1)^{n+1}}{3}$$

이다.

$f(n)=(-1)^n$, $g(n)=2^n$이므로

$\therefore\ f(9)\times g(5)=(-1)^9\times 2^5=-32$

답 ①

46)

AX46 | 답 ⑤

[풀이]

조건 (나)에서 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$E-2B+B^2=E-B$

정리하면

$B^2=B$

행렬의 연산의 성질에 의하여

$B^3=B^2B=B^2=B$

행렬의 연산의 성질에 의하여

$2BA^3$

$=2(BA)A^2$

$=2(AB)A^2(\because$ (가))

$=2(-B)A^2(\because$ (다))

$=-2(BA)A$

$=-2(AB)A(\because$ (가))

$=-2(-B)A(\because$ (다))

$=2BA$

$=2AB(\because$ (가))

$=-2B(\because$ (다))

따라서 주어진 식을 간단히 하면

$B^3+2BA^3=B-2B=-B$

답 ⑤

47)

AX47 | 답 ②

[풀이]

ㄱ. (거짓)

문제에서 주어진 등식은

$X^2-AX-XA+A^2=O$

보기 ㄱ에서 주어진 등식은

$X^2-2AX+A^2=O$

위의 두 등식을 변변히 빼서 정리하면

$AX=XA$

그런데 일반적으로 정사각행렬의 곱셈에서 교환법칙은 성립하지 않는다.

따라서 보기 ㄱ에서 주어진 등식이 항상 성립하는 것은 아니다.

ㄴ. (참)

문제에서 주어진 등식에서

$(X-A)^2=X^2-AX-XA+A^2=O$

ㄷ. (거짓)

(반례)

$X-A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$으로 두면

$(X-A)^2=O$이지만 $X\neq A$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

48)

AX48 | 답 ④

[풀이]

ㄱ. (거짓)

(반례)

$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=E$로 두면

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$A^2=O$

행렬의 곱셈의 성질에 의하여

$A^2B=OB=O$

하지만

$AB=A\neq O$

ㄴ. (참)

행렬의 연산의 성질에 의하여

$A^2=A$

행렬의 곱셈의 성질에 의하여

$A^2B=AB$

ㄷ. (참)

행렬의 연산의 성질에 의하여

$A^2-E=E$에서 $A^2=2E$

행렬의 곱셈의 성질에 의하여

$A^2B=2EB=2B$

$BA^2=B(2E)=2B$

$\therefore\ A^2B=BA^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

49)

AX49

| 답 ⑤

[풀이]

ㄱ. (참)

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$P^2=E$

행렬의 거듭제곱의 정의에 의하여

$PPP=P^2P=P$

$\therefore\ P\in S$

ㄴ. (참)

$A\in S$이면 $PAP=A$

$B\in S$이면 $PBP=B$

행렬의 곱셈의 성질에 의하여

$PABP$

$=PAEBP$

$=PAP^2BP$

$=(PAP)(PBP)$

$=AB$

$\therefore\ AB\in S$

ㄷ. (참)

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 두자.

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$PAP=\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$

행렬 A가 집합 S의 원소이므로

$PAP=A$ 즉, $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$a=d,\ b=c$

행렬 A는 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$이다.

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$A^2=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

$A^2=O$이므로

행렬의 상등의 정의에 의하여

$a^2+b^2=0,\ 2ab=0$

$a,\ b$는 실수이므로

$a=b=0$

$\therefore\ A=O$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

50)

AX50

| 답 ③

[풀이]

제품 A를 1개 만드는 데 필요한 재료 구입가격은

$25(3x+2y)$

제품 B를 1개 만드는 데 필요한 재료 구입가격은

$15(4x+3y)$

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

(총 구입가격)$=\begin{pmatrix} 25 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

답 ③

51)

AX51

| 답 ④

[풀이]

문제에서 주어진 시행을 n회 반복한 후,

그릇 A에 담긴 물과 소금의 양은 각각

$300-3a_n,\ 3a_n$

그릇 B에 담긴 물과 소금의 양은 각각

$300-3b_n,\ 3b_n$

주어진 시행을 $(n+1)$회 반복한 후,

그릇 A에 담긴 물과 소금의 양은 각각

$300-2a_n-b_n,\ 2a_n+b_n$

그릇 B에 담긴 물과 소금의 양은 각각

$300-2b_n-a_n,\ 2b_n+a_n$

이제 농도를 구하면

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{300} \times 100 \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{300} \times 100 \end{cases}$$

정리하면

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{3}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{2}{3}b_n \end{cases}$$

행렬을 이용하여 정리하면

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

답 ④

52)

AX52 | 답 ③

[풀이]

두 마을 A와 C는 Q보다는 R에 가깝고

마을 B는 R보다는 Q에 가깝다.

(1) 갑과 을이 각각 상점을 Q, R에 내는 경우

갑의 확보 고객 수는

$$\begin{pmatrix} 2000 & 3000 & 2000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix} = 1700$$

(2) 갑과 을이 각각 상점을 R, Q에 내는 경우

갑의 확보 고객 수는

$$\begin{pmatrix} 2000 & 3000 & 2000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix} = 1800$$

갑이 상점을 P에 낼 때, 확보할 수 있는 고객의 수는

$1600 + 1900 = 3500$

갑이 상점을 Q에 낼 때, 확보할 수 있는 고객의 수는

$2100 + 1700 = 3800$

갑이 상점을 R에 낼 때, 확보할 수 있는 고객의 수는

$1800 + 2100 = 3900$

갑의 확보 고객수가 가장 큰 곳은 R이다.

답 ③

53)

AX53 | 답 ④

[풀이]

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

행렬의 상등의 정의에 의하여

$a = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$

=(지난해 상반기에 판매된 제품의 제조원가 총액)

$b = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$

=(지난해 하반기에 판매된 제품의 제조원가 총액)

$c = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$

=(지난해 상반기에 판매된 제품의 판매 총액)

$d = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$

=(지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 총액)

ㄱ. (거짓)

$a + b$는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 제조원가 총액이다.

ㄴ. (참)

$c + d$는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 판매가격 총액이다.

ㄷ. (참)

$d - b$는 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 이익금의 총액이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

2028 수능 응시자를 위한

추가 문항입니다.

BX. 모비율

BX01
○
(2005-가형29확률통계)

어느 음악 동아리에서는 금년에도 정기연주회를 준비하고 있다. 지금까지의 경험에 의하면 초대받은 사람 중 실제 참석자의 비율은 0.5라고 한다. 초대받은 사람 중에서 100명을 임의추출 하였을 때, 참석자의 비율이 0.43 이상이고 0.56 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점][1)]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.2	0.3849
1.4	0.4192
1.6	0.4452

① 0.8041 ② 0.7698 ③ 0.7605
④ 0.7262 ⑤ 0.6826

BX02
○○
(2011(9)-가형28확률통계)

어느 회사는 전체 직원의 20%가 자격증 A를 가지고 있다. 이 회사의 직원 중에서 임의로 1600명을 선택할 때, 자격증 A를 가진 직원의 비율이 a% 이상일 확률이 0.9772이다. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 a의 값은? [3점][2)]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
2.00	0.4772
2.25	0.4878
2.50	0.4938
2.75	0.4970

① 16.5 ② 17 ③ 17.5
④ 18 ⑤ 18.5

BX03
○○
(2011-가형30확률통계)

우리나라 성인을 대상으로 특정 질병에 대한 항체 보유 비율을 조사하려고 한다. 모집단의 항체 보유 비율을 p, 모집단에서 임의로 추출한 n명을 대상으로 조사한 표본의 항체 보유 비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, $\left|\hat{p}-p\right| \le 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$일 확률이 0.9544 이상이 되도록 하는 n의 최솟값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$이다.) [4점][3)]

BX. 표본비율

BX04

○
(2020(9)-가형25)

어느 고등학교에서 1인 미디어 방송을 시청한 경험이 있는 학생의 비율을 알아보기 위하여 이 고등학교 학생 중 n명을 임의추출하여 조사한 결과 90%가 시청한 경험이 있다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 고등학교 학생 전체의 1인 미디어 방송을 시청한 경험이 있는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $0.9-c \le p \le 0.9+c$이다. $c=0.0294$일 때, n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점][4]

BX05

○
(2014(9)-B형12)

어느 도시에서 시립 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 주민들의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 주민 중 100명을 임의추출하여 조사한 결과 90명이 개방 시간 연장을 희망하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 도시 주민 전체의 시립 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\hat{p}-c \le p \le \hat{p}+c$일 때, c의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$로 계산한다.) [3점][5]

① 0.0431 ② 0.0588 ③ 0.0645
④ 0.0759 ⑤ 0.0816

BX06

○
(2019(9)-나형17)

어느 지역의 고등학생 중에서 100명을 임의추출하여 조사한 결과, 최근 1년 이내에 헌혈을 한 학생이 30명이었다. 이 결과를 이용하여, 이 지역 전체 고등학생 중 최근 1년 이내에 헌혈을 한 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면

$$0.3-1.96\sqrt{a} \le p \le 0.3+1.96\sqrt{a}$$

이다. 상수 a의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$로 계산한다.) [4점][6]

① 0.0021 ② 0.0024 ③ 0.0027
④ 0.003 ⑤ 0.0033

BX07

○○
(2008-가형30확률통계)

어느 고등학교에서 오전 8시 이전에 등교하는 학생의 비율 p를 알아보기 위하여, 어느 날 이 학교 학생 중에서 300명을 임의추출하여 오전 8시 이전에 등교한 학생의 표본비율 $\hat{p}$을 구하였다. 표본비율 $\hat{p}$을 이용하여 구한 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $0.701 \le p \le 0.799$일 때, 임의추출된 300명의 학생 중에서 오전 8시 이전에 등교한 학생의 수를 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$이다.) [4점][7]

BX08

○○
(2017(9)−가형28)

어느 고등학교에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율을 알아보기 위하여 이 고등학교 학생 중 n명을 임의추출하여 조사한 결과 50%의 학생이 대중교통을 이용하여 등교하는 것으로 나타났다. 이 결과를 이용하여 구한 이 고등학교 전체 학생 중에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le p \le b$이다.
$b-a=0.14$일 때, n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점][8)]

BX09

○○
(2014−B형26)

어느 도시의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 주민 중 n명을 임의추출하여 조사한 결과 80%가 이 중앙공원을 이용한 경험이 있다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 도시 주민 전체의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le p \le b$이다. $b-a=0.098$일 때, n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점][9)]

BX10

○○
(2009−가형30확률통계)

어떤 모집단에서 임의로 100명을 추출하여 구한 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\frac{1}{10}-c \le p \le \frac{1}{10}+c$이었다. 같은 모집단에서 n명을 임의로 추출하여 구한 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이
$\frac{1}{9}-s(n) \le p \le \frac{1}{9}+s(n)$이고 $s(n)=\frac{50}{81}c$이다.
n의 값을 구하시오. [4점][10)]

BX 모비율, 표본비율

1	①	2	④	3	157	4	400	5	②
6	①	7	225	8	196	9	256	10	288

※ 2028 수능을 대비하시는 분들은
2026 이동훈 기출문제집에서 아래의 문제들을 제외하고 풀면 됩니다.
(삭제: 외분점, 원순열)

• 수학1 평가원 편
A077

• 수학2 평가원 편
없음

• 확률과 통계 평가원 편
J001~J007, K017

• 수학1+수학2 교사경 편
A057, A127, B033, C072

• 확률과 통계 교사경 편
J001~J008, K030

• 수학1 노베 편
A063

• 수학2 노베 편
없음

• 확률과 통계 노베 편
J001~J009

1)
BX01 | 답 ①

[풀이]
표본에 있는 100명의 초대받은 사람 중에서 참석자의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은
$\mathrm{P}(0.43 \le \hat{p} \le 0.56)$이다.
여기서 모비율 $p=0.5$이고 $n=100$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.5}{0.05}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$에 가까워진다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(0.43 \le \hat{p} \le 0.56)$
$=\mathrm{P}(-1.4 \le Z \le 1.2)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.4)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2)$
$=0.4192+0.3849=0.8041$
답 ①

2)
BX02 | 답 ④

[풀이]
표본에 있는 1600명의 직원 중에서 자격증 A를 가지고 있는 직원의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면

$$\mathrm{P}\left(\hat{p} \ge \frac{a}{100}\right)=0.9772$$

여기서 모비율 $p=0.2$이고 $n=1600$은 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{0.01}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$에 가까워진다.

$$\mathrm{P}\left(\hat{p} \ge \frac{a}{100}\right)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{\frac{a}{100}-0.2}{0.01}\right)$$

$$=0.5+\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{0.2-\frac{a}{100}}{0.01}\right)$$

$=0.9772$
이므로

$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{0.2-\frac{a}{100}}{0.01}\right)=0.4772$$

주어진 표준정규분포표에서

$$\frac{0.2-\frac{a}{100}}{0.01}=2$$

풀면
$a=18$
답 ④

3)
BX03 | 답 157

[풀이]
n이 충분히 크다고 할 때,

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$$

(단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)
은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$에 가까워진다.
주어진 조건에서
$\mathrm{P}\left(|\hat{p}-p| \le 0.16\sqrt{\hat{p}\hat{q}}\right)$
$=\mathrm{P}\left(|Z| \le 0.16\sqrt{n}\right)$
$=2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le 0.16\sqrt{n}\right)$
≥ 0.9544
이므로
$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le 0.16\sqrt{n}\right) \ge 0.4772$
주어진 조건에서
$0.16\sqrt{n} \ge 2$
양변을 제곱하여 풀면
$n \ge 156.25$
따라서 자연수 n의 최솟값은 157이다.
답 157

4)
BX04 | 답 400

[풀이]
1인 미디어 방송을 시청한 경험이 있는 표본비율은
$\hat{p}=0.9$
이때 n은 충분히 클 것이므로 모비율 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$0.9-1.96\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{n}} \le p$$

$$\le 0.9+1.96\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{n}}$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$c=1.96\sqrt{\dfrac{0.9\times0.1}{n}}=0.0294$

정리하면

$\sqrt{n}=\dfrac{1.96\times0.3}{0.0294}=\dfrac{196\times3}{29.4}=\dfrac{196}{9.8}=20$

$\therefore\ n=400$

답 400

5)

BX05 | 답 ②

[풀이]

표본비율 $\hat{p}=\dfrac{90}{100}=0.9$이고, $n=100$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

모비율 p에 대한 신뢰도 95%인 신뢰구간은

$\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

$\hat{p}=0.9(\hat{q}=0.1)$, $n=100$을 대입하여 c의 값을 구하면

$\therefore\ c=1.96\sqrt{\dfrac{0.9\times0.1}{100}}=0.0588$

답 ②

6)

BX06 | 답 ①

[풀이]

헌혈을 한 비율은

$\hat{p}=\dfrac{30}{100}=0.3$

$n\hat{p}=100\times0.3=30>5$,

$n\hat{q}=100\times0.7=70>5$

이므로 100은 충분히 큰 수라고 말할 수 있다.

100은 충분히 큰 수이므로 모비율 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$0.3-1.96\sqrt{\dfrac{0.3\times0.7}{100}}\le p\le0.3+1.96\sqrt{\dfrac{0.3\times0.7}{100}}$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$0.3-1.96\sqrt{a}=0.3-1.96\sqrt{\dfrac{0.3\times0.7}{100}}$

$0.3+1.96\sqrt{a}=0.3+1.96\sqrt{\dfrac{0.3\times0.7}{100}}$

풀면

$\therefore\ a=\dfrac{0.3\times0.7}{100}=0.0021$

답 ①

7)

BX07 | 답 225

[풀이]

모비율 p에 대하여 신뢰도 95%인 신뢰구간은

$\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

주어진 값 $n=300$을 대입하면

$\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{300}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{300}}$

이 신뢰구간의 길이와 신뢰구간 $0.701\le p\le0.799$의 길이가 같아야 하므로

$2\times1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{300}}=0.098$

정리하면

$\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{3}}=\dfrac{1}{4}$

$\hat{q}=1-\hat{p}$을 대입하면

$\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{3}}=\dfrac{1}{4}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(\hat{p})^2-\hat{p}+\dfrac{3}{16}=0$

좌변을 인수분해하면

$\left(\hat{p}-\dfrac{1}{4}\right)\left(\hat{p}-\dfrac{3}{4}\right)=0$

$\hat{p}=\dfrac{1}{4}$일 때, 신뢰구간은

$0.201\le p\le0.299$

이므로, 이는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$\hat{p}=\dfrac{3}{4}$일 때, 신뢰구간은

$0.701\le p\le0.799$

이므로, 주어진 조건을 만족시킨다.

$\hat{p}=\dfrac{3}{4}$이므로 구하는 값은

$300\times\dfrac{3}{4}=225$

답 225

8)

BX08 | 답 196

[풀이]

$\hat{p}=0.5$이므로 이 고등학교 전체 학생 중에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

(단, $\hat{q}=1-\hat{p}$이다.)

이므로

$$b-a=2\times1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$=2\times1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{n}}=0.14$$

정리하면

$$\sqrt{n}=\frac{1.96}{0.14}=14$$

$\therefore\ n=196$

답 196

9)

BX09 | 답 256

[풀이]

표본비율은 $\hat{p}=0.8$이고, n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

$\hat{p}=0.8(\hat{q}=0.2)$의 값을 대입하여 a, b의 값을 구하면

$$a=\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$$

$$b=\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$$

$$b-a=2\times1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.098$$

정리하면

$$\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.025$$

$$\sqrt{n}=16$$

$\therefore\ n=256$

답 256

10)

BX10 | 답 288

[풀이]

모비율의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$n=100$, $\hat{p}=\frac{1}{10}$, $\hat{q}=\frac{9}{10}$을 대입하여

c의 값을 구하면

$$c=1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}=1.96\times\frac{3}{100}$$

한편 $\hat{p}=\frac{1}{9}$, $\hat{q}=\frac{8}{9}$을 대입하여

함수 $S(n)$의 방정식을 구하면

$$s(n)=1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}}{n}}=1.96\times\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{n}}$$

주어진 조건에서

$$1.96\times\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{n}}=\frac{50}{81}\times1.96\times\frac{3}{100}$$

풀면

$\therefore\ n=288$

답 288