2026학년도 하프문 2회 해설

제 2 교시

수학 영역

9	10	11	12	13
②	①	④	④	②
14	15	20	21	22
④	①	31	60	53

9번 : ②

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + 3n^2 - 4n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = 3n^2 - 4n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = n(a_{1.5n+0.5}) = 3n^2 - 4n$$

$$\Rightarrow a_{1.5n+0.5} = 3n - 4$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = 8 \times a_{4.5} = 8 \times \left(3 \times \frac{4}{1.5} - 4\right)$$

$$= 32$$

$a_{1.5n+0.5}$은 문제 편의상 사용된 표현이다. 결국에 a_n이 n에 대하여 표현되는 일차함수와 마찬가지기에 이러한 사용이 가능하다:)

10번 : ①

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$|f(0)| = f(0) + 2$$
$$\therefore f(0) = -1$$

$$-f'(0) = f'(0) + 6$$
$$\therefore f'(0) = -3$$

이다. 또한 $x<0$에서 함수 $|f(x)|$가 미분가능해야하므로

함수 $f(x)$는 $x<0$에서 x축을 뚫고 지나가는 순간이 없다.

따라서

$$f(x) = ax^2 - 3x - 1 \quad (\because f(0) = -1,\ f'(0) = -3)$$

에서 판별식을 써본다면

$$\frac{D}{4} = 9 + 4a \le 0$$

으로

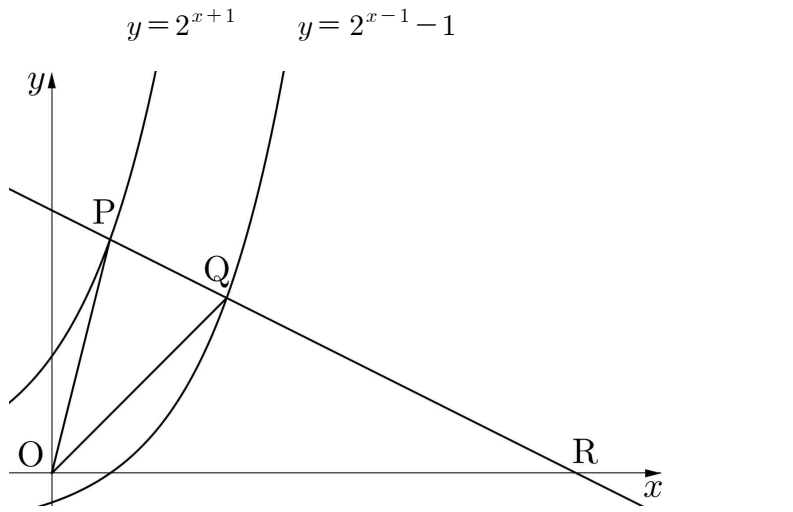
$$a \le -\frac{9}{4} \quad - ①$$

이다.

$$g(2) = 14 + f(2) = 4a + 7$$

이므로 ①에 의해 $g(2)$의 최댓값은 -2이다.

11번 : ④



$y = 2^{x-1} - 1$은 $y = 2^{x+1}$을 x축으로 2만큼, y축으로 -1만큼 평행이동 시킨 그래프이다. 만나는 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이기에 점 P에서 x축으로 2, y축으로 -1만큼 평행이동 시키면 점 Q이다. 삼각형 OPR의 넓이가 삼각형 OPQ 의 넓이의 4배이기에 $\overline{PQ} : \overline{PR} = 1 : 4$이다.

(원점에서 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$ 까지의 거리를 공통 높이로 삼각형 OPR와 삼각형 OPQ가 공유하기 때문에)

점 P와 점 Q의 y좌표 차는 1, $\overline{PQ}:\overline{PR}=1:4$이기에 점 P의 y좌표는 4이다. 따라서 점 P의 x좌표는 1, 따라서 $k=\frac{9}{2}$

12번: ④

주어진 조건에 의해서 $\overline{DB}=2$이다.

$\angle ABC=\theta$라 하면

$$\overline{BE}=4\cos\theta,\ \overline{EC}=5\cos\theta$$

이다. 코사인 법칙에 의해서

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\times\overline{BC}\cos\theta$$
$$\Rightarrow\overline{AC}^2=25+81\cos^2\theta-90\cos^2\theta$$
$$\Rightarrow\overline{AC}^2=25-9\cos^2\theta\ \cdots ①$$

이다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{27}{4}\pi$이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=3\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow\overline{AC}^2=27\sin^2\theta$$
$$\Rightarrow\overline{AC}^2=27-27\cos^2\theta$$

이고 ①을 연립할 시

$$\overline{AC}^2=27-27\cos^2\theta=25-9\cos^2\theta$$

$$\cos\theta=\frac{1}{3},\ \overline{AC}=2\sqrt{6}$$

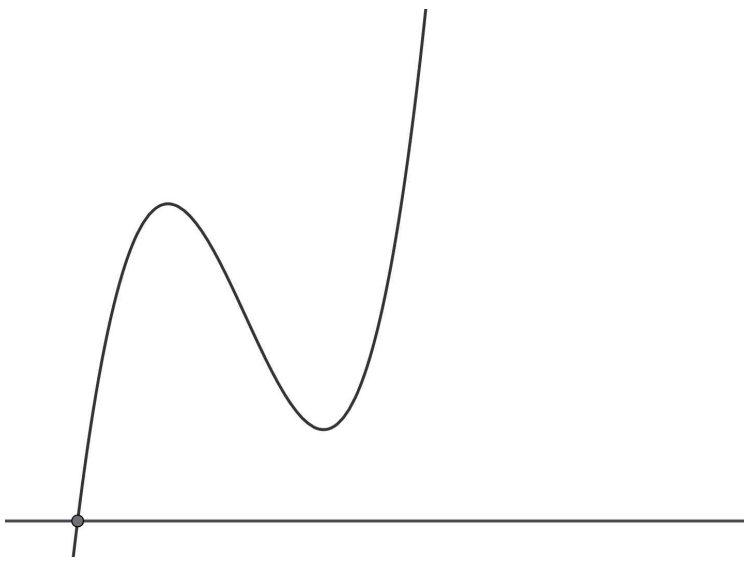
이다. 따라서

$$\overline{AC}\times\overline{BC}=2\sqrt{6}\times3=6\sqrt{6}$$

13번: ②

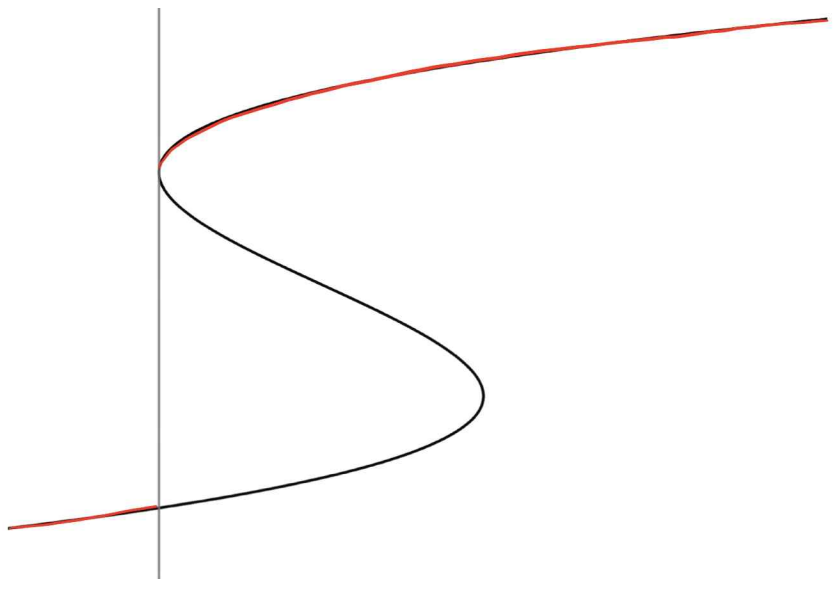
$a\le p\le q$ 모든 실수 p, q에 대하여 부등식

$\int_p^q\{f(x)-mx-k\}dx\ge0$을 만족하기 위해선 $x\ge a$에서 항상 $f(x)-mx-k\ge0$ 이어야 한다. $f(x)-mx=g(x)$로 두면 $g(x)$는 다음과 같이 그래프를 그려 볼 수 있을 것이다.



실수 a의 최솟값이 $h(k)$이기에 $g(h(k))=k$임을 알아낼 수 있다.

또한 $x\ge h(k)$에서 항상 $g(x)\ge k$이기에 $h(k)$는 다음과 같은 양상을 보인다.



따라서 $h(k)$는 $g(k)$의 부분역함수가 된다. $h(k)$가 $k=4$에서만 불연속, $\lim_{t\to 4+} h(t)=3$이기에 $g(k)$의 극솟값은 4, 이때 x좌표는 3이다. 연립해서 식을 세우면 $g(x)=(x-3)^2(x-\mathrm{A})+4$,

문제에서의 조건에 의해 $f(x)=g(x)=0$ 이기에 A는 $\frac{4}{9}$이고

$f'(0)=g'(0)+m=12$이기에

$g'(x)=2(x-3)(x-\frac{4}{9})+(x-3)^2$, $g'(0)=\frac{35}{3}=12-m$

따라서 $m=\frac{1}{3}$,

$f(x)=g(x)+mx=(x-3)^2(x-\frac{4}{9})+\frac{1}{3}x+4$

$f(6)=9\times(6-\frac{4}{9})+4+\frac{1}{3}\times 2=56$이다.

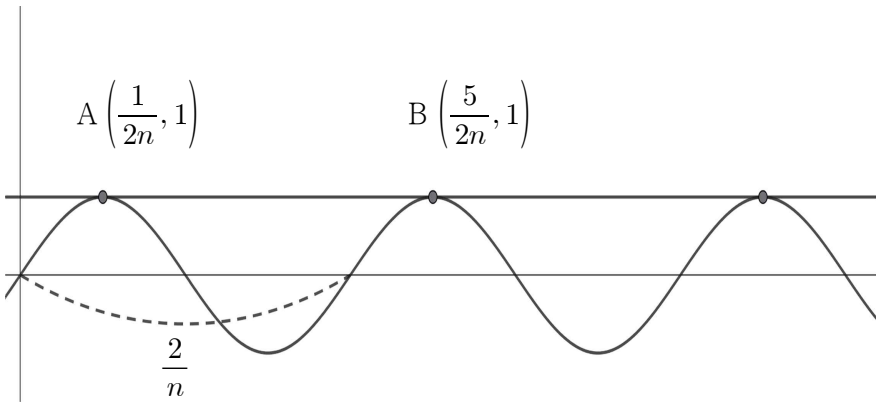
14번: ④

$f(x)=a\sin(n\pi x)$이기에 구간 $[0,2\pi]$에서 $\sin(n\pi x)$는 n번 반복됨을 알 수 있다. $a=1$일 경우 $f(x)=1$, 다시 말하면

$x=\frac{1}{2n}+\frac{2}{n}(k-1)$- ① ($k$는 자연수)

일 때만 실근을 갖는다.

참고



1) 그렇기에 $a=1$일 때 모든 근의 합을 계산하면

$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{n}k-\frac{3}{2n}\right\}=\frac{2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{3}{2n}\times n=n-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $30\le n-\frac{1}{2}\le 50$, n은 31부터 50 총 20개

2) $a=2$ 일 경우 $f(x)$는 $y=3$ 과는 만나지 않고 $y=1$과의 교점만을 갖는다. $2\sin n\pi x=1$의 근은 $\frac{1}{2n}+\frac{2}{n}(k-1)$에 대해 대칭성을 지니기에 총 근의 합은 $2\times(n-\frac{1}{2})$- ②

따라서 $30\le 2n-1\le 50$, n은 16부터 25까지 총 10개

3) $a=3$일 경우 $f(x)=3$의 근의 합은 ① 식을 이용해 $n-\frac{1}{2}$, $f(x)=1$의 근의 합은 ②에 따라 $2n-1$, 따라서

총 근의 합은 $3n-\frac{3}{2}$이다.

따라서 $30\le 3n-\frac{3}{2}\le 50$, n은 11부터 17까지 총 7개

4) $a=4$일 경우 $f(x)=3$과 $f(x)=1$의 근의 합은 모두 ②에 따라 $2n-1$ 따라서 총 근의 합은 $4n-2$이다.
따라서 $30\le 4n-2\le 50$, n은 8부터 13까지 총 6개 이다.

따라서 총 순서쌍은 $20+10+7+6=43$

15번: ①

먼저 (가)조건에 의해 $(2,g(2))$에서 $g(x)$위의 점까지의 평균변화율은 항상 -1이상임을 알 수 있다.

이후 (나)조건을 관찰시 평균변화율이 -1이 되도록 하는 실수 b가 2개 존재함을 알 수 있는데

이는 (가)조건과 연립시 평균변화율이 감소하다가 b지점에서 -1이 되고 평균변화율이 증가함을 알 수 있다.

(그 외의 경우에는 평균변화율이 -1미만이 되는 시점이 존재하기때문이다.)

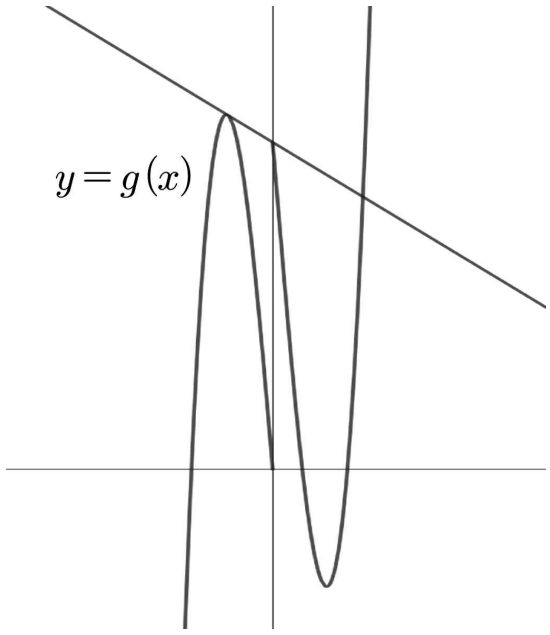
저 경우를 만족할 수 있는 점은 두 가지 케이스에서만 존재가능하다.

1) $(2,g(2))$를 지나며 기울기가 -1인 직선에 접하는 점

2) x좌표가 0이어서 $x=0$에서 평균변화율이 감소했다가 증가하는 점

두 케이스 모두 각각 최대 1개씩 존재가능하기에 두 케이스

각각 1개 씩으로 가능한 실수 b의 개수가 2임을 알 수 있고 그래프로 관찰해보면 다음과 같다.



따라서

$$f(-1)=f(0)+13,\ f'(-1)=-1,\ f(2)=f(0)-2$$

이다.

$$f(0)=A$$

라 할 때, $f(2)=f(0)-2$를 이용해 식을 세워보면

$$f(x)=ax(x-2)(x-k)-x+A$$

이고 $f'(-1)=-1$에 의해

$$f'(x)=a\{3x^2-(4+2k)x+2k\}$$
$$\Rightarrow f'(-1)=a(3+4+2k+2k)=0$$
$$\therefore k=-\frac{7}{4}$$

이다. 이제 $f(-1)=f(0)+13$를 이용하면

$$f(-1)=-a\times-3\times\frac{3}{4}+1+A=a+13$$

$$\therefore a=\frac{16}{3}$$

이다.

$$\therefore f(3)-f(0)=73$$

20번: 31

부등식에서 결국에는 부호만이 중요하다.

그렇기에 $\log\left|\frac{2}{3}n-19\right|$와 $\log\left(\frac{3}{k}n-2\right)$의 부호가 어떻게 되는지 n의 범위에 따라 생각해보자.

먼저 $\log\left|\frac{2}{3}n-19\right|$의 부호는 $8<n<11$에서 음수,

$n<8$ or $11<n$에서 양수.

$\log\left(\frac{3}{k}n-2\right)$의 부호는 $\frac{2}{3}k<n<k$에서 음수, $k<n$에서 양수.

그렇다면 이 두 개의 부호가 반대가 되는 시점을 찾아야 한다.

$\frac{2}{3}k$를 기준점으로 잡고 생각을 한다면

먼저 $\frac{2}{3}k<8$의 경우

$(\frac{2}{3}k<n<8$인 n의 개수$)+(k<n<11$인 n의 개수$)$가 4가

되도록 하는 자연수 k는 7과 8만이 존재한다.

$8\le\frac{2}{3}k<11$인 상황에서는 $(k<n<11$인 n의 개수$)$가 4가

되도록 하는 자연수 k는 16만 존재한다.

$\frac{2}{3}k>11$인 상황에서는 $(11<n<k$인 n의 개수$)$가 4가 되도록

하는 자연수 k가 존재하지 않는다.

따라서 답은 $7+8+16=31$이다.

21번: 60

$f(x)-|f(x)|$는

ⅰ) $f(x)<0$: $2f(x)$

ⅱ) $f(x)\geq 0$: 0

으로 나타나지는 함수이다. 따라서 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)-|f(x)|\leq 0$$

이다. 따라서 $x>2$에서 $\int_2^x\{f(t)-|f(t)|\}dt<0$이 되는 순간은 $f(x)<0$이 되는 순간이다.

$$0\leq\int_2^x\{f(t)-|f(t)|\}dt\leq 10$$

을 만족시키는 x의 값의 범위가 $0\leq x\leq 3$이므로

$$f(3)=0$$

이다. 이제 앞의 부등식에서

$$\int_2^x\{f(t)-|f(t)|\}dt\leq 10$$

이 되도록 하는 x의 값의 범위를 생각해보면

$$\int_2^0\{f(t)-|f(t)|\}dt=10$$

임을 알 수 있고, 이 식은 즉 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-1)(x-3)(x-k)$$

라고 했을 때, $\int_0^1 f(t)dt=-5$임을 의미한다. $(2<k)$

따라서 $\int_0^1 f(t)dt=-5$을 계산하면

$$\int_0^1(x-1)(x-3)(x-k)dt=\int_0^1\{x^3-(k+4)x^2+(4k+3)x-3k\}dt$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{k+4}{3}+2k+\frac{3}{2}-3k=-5$$

$$\therefore\ k=\frac{65}{16}$$

$$\Rightarrow 8\times f(5)=60$$

22번: 53

(가)조건을 해석하면 $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n$또는 $a_{n+1}=2a_n-8$이다.

(나)조건을 해석하면 $m>2$에서 $a_m\times a_{m+1}\leq 0$이고 $a_2\times a_3>0$

이다. a_6은 0이므로 정직하게 a_6부터 역추적 해보자.

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
0	0	0	0	–	–
			4	6	7, −12
		4	−8	–	–
	4	−8	16	12	−24, 10
			0	–	–

따라서 $|7|+|-12|+|-24|+|10|=53$이다.