2026학년도 하프문 1회 해설

제 2 교시

수학 영역

9	10	11	12	13
②	③	③	②	①
14	15	20	21	22
③	④	7	74	45

9번 : ②

서로 다른 세 실근을 갖는다는 점에 집중해보자.

결국에 우리한테 중요한건 분모에 위치한 $f(x)$이다. $f(x)$가 0이 되는데 분자는 0으로 가지 않는 상황만 존재하지 않도록 만들어야 한다. 그런데 보아하니 분자에는 $f(x+1)$이 있다. $f(x)$가 0으로 갈 때 $f(x+1)$도 0이 되는 순간이 "두 번"은 있고 나머지 한 번을 $x-4$가 처리해 줄 것이다. 따라서

$f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$, $f(6)=24$이다.

10번 : ③

$S_n - S_{n-1} = a_n$을 이용하면

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k = 3n^2 - 14n - \{3(n-1)^2 - 14(n-1)\} = 6n - 17$$

$= a_n b_n \quad \therefore \; b_n = \dfrac{6n-17}{a_n}$이다. $a_n > 0$이기에

$b_2 < 0$, $b_3 > 0$이다. b_n을 $2n+k$로 두면 (k는 정수)

$4+k<0$, $6+k>0$ 따라서 $-6<k<-4$

$k=-5$이다. $a_5 = \dfrac{13}{b_5} = \dfrac{13}{5}$

11번 : ③

모든 실수 t에 대하여 $\lim_{x\to t} \dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재하므로

$f(x)=0$일 때, $g(x)=0$이다.

함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=0$를 인수로 가지기에 따라서

$g(x)=x(x+2)$

이다. $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값도 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0-} \frac{x^2+2x}{2x^2+4x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2+2x}{kx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{k}$$

$\therefore k=4$

$f(1)+g(1)=7$

12번 : ②

$S_n \times S_{n+1} \times a_{n+1} = 16$ - ①

에서 $n-1$을 대입하면

$S_{n-1} \times S_n \times a_n = 16$ - ②

①에서 ②를 나누어주면

$$\frac{S_n \times S_{n+1} \times a_{n+1}}{S_{n-1} \times S_n \times a_n} = \frac{S_{n+1} \times a_{n+1}}{S_{n-1} \times a_n} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{S_{n-1}}{S_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

따라서

$$\sum_{n=2}^{5} \log_2 \frac{S_{n-1}}{S_{n+1}} = \sum_{n=2}^{5} \log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$= \log_2 \left(\frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \frac{a_5}{a_4} \times \frac{a_6}{a_5} \right) = \log_2 \left(\frac{a_6}{a_2} \right) = \log_2 \left(\frac{32}{a_2} \right)$$

이다. ①식에 $n=1$ 대입하면

$S_1 \times S_2 \times a_2 = 16$

$\Rightarrow a_2(a_2+2) \times 2 = 16$ ($\because \; a_1 = 2$)

$\Rightarrow a_2=2$ ($\because$수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 양수)

따라서

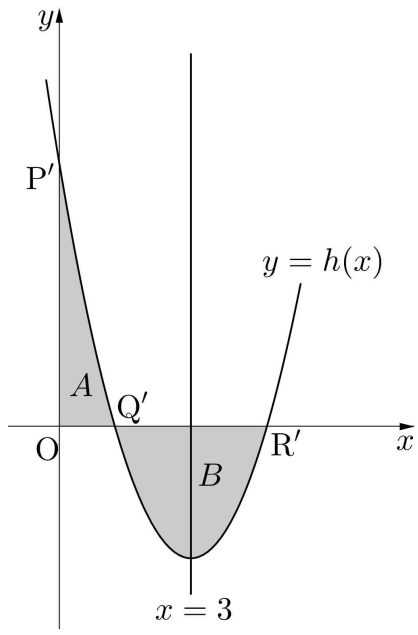
$$\sum_{n=2}^{5}\log_2\frac{S_{n-1}}{S_{n+1}}=\log_2\left(\frac{32}{2}\right)=4$$

13번: ①

곡선 $y=x^2-2x+2$와 직선 $y=kx-4$의 차함수인

$h(x)=x^2-(k+2)x+6$를 생각해보자.

조건에 의하면 $h(x)$에서 넓이는 다음과 같다.



$2A=B$, $A=\frac{1}{2}B$, 따라서 $h(x)$를 0부터 $h(x)$의

대칭축인 $\frac{k+2}{2}$까지 적분한 값은 0이다.

따라서 $\int_0^{\frac{k+2}{2}}h(x)dx=\int_0^{\frac{k+2}{2}}\{x^2-(k+2)x+6\}dx=$

$$\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{k+2}{2}x^2+6x\right|_0^{\frac{k+2}{2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{k+2}{2}\right)^3-\left(\frac{k+2}{2}\right)^3+6\left(\frac{k+2}{2}\right)=0$$

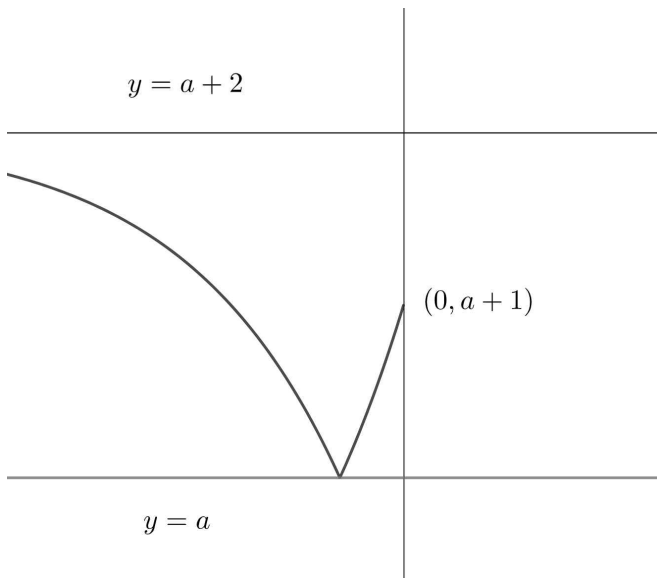
계산의 편의상 $\frac{k+2}{2}=t$로 치환시 $-\frac{2}{3}t^3+6t=0$

$t=\frac{k+2}{2}=\pm 3$,

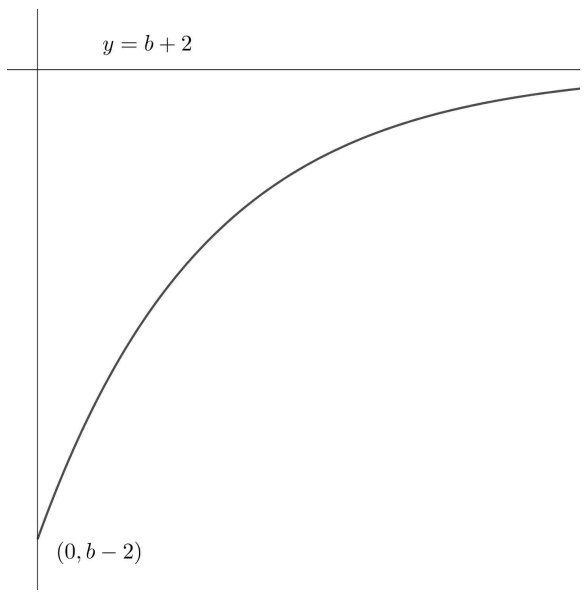
두 점 P, Q는 제 1사분면 위의 점이므로 $k=4$이다.

14번: ③

먼저 $x\le 0$에서의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



다음으로는 $x>0$에서의 그래프를 그려보자.



먼저 $x\le 0$을 생각해보자.

일단 $x\le 0$에서 y의 구간 $(a, a+1]$ 안에 정수는 무조건

존재한다. 그 구간에서 $f(x)$가 $x\le 0$ 에서만 정수 지점을 두 번

지나니 $g(n)=2$가 아니기 위해서는 $x>0$ 에서도 그 부분을

지나야만 한다. 따라서 $a\le b-2<a+1$이다.

$x\le 0$의 y의 구간 $(a+1, a+2)$에서 $f(x)$는 무조건 한 번

$y=t$를 지난다. 그런데 앞에서 구했듯 $a\le b-2<a+1$이기

때문에 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 치역에 $(a+1, a+2)$가 무조건

포함된다. 따라서 $a+1<t<a+2$인 실수 t에 대하여

$g(t)=2$이다.

그렇기에 $g(n)=2$가 불가능하기 위해선 a가

정수여야만 한다.

정수이면서 양수이면서 최소가 되기 위해서 $a=1$이 되고,

앞에서 얻은 $a \le b-2 < a+1$을 사용하면 b의 최솟값은 3,

$a+b=4$이다.

15번: ④

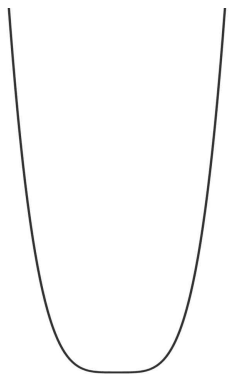
일단 함수 $|f(x)-f(t)|$의 미분불가능한 점은 아주 당연하게도

$f(x)-f(t)$가 x축을 인수 1개만을 가지고 뚫고 가는

그 지점이 되겠다.

일단 우리는 함수 $f(x)$의 개형을 모르기에 후보를 추려보자.

case 1)

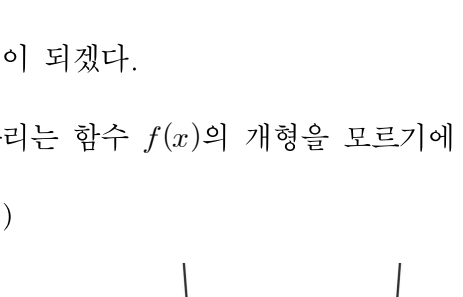


$f'(x)=0$이 되는 x가 하나밖에 없는 경우이다.

이럴 경우 $g(x)$는 0 또는 1로 가능한 $g(x)$의 값이 2개로

(가)조건을 만족시키지 못한다.

case 2)



다음과 같이 삼중근을 가지는 경우이다.

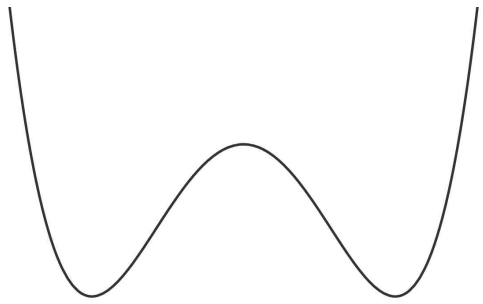
이럴 경우 치역이 $0, 1, 2$으로 (가)조건을 만족시키기 위해서는

$x=4$에서 극솟값, $f(x)=f(0)$이 삼중근과 하나의 실근을

가져야 한다. 하지만 (나)조건으로 인해 $f'(\alpha)=0$이므로

$0<\alpha<4$를 만족시키지 않는다.

case 3)



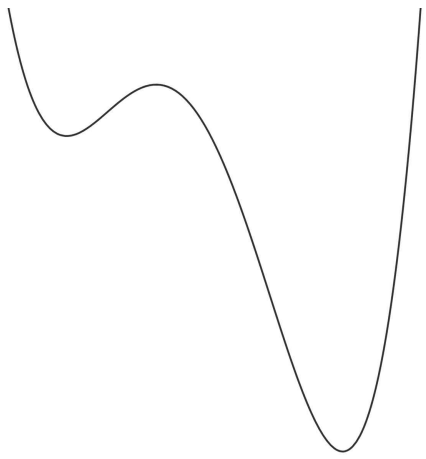
다음과 같이 두 극솟값이 같은 경우이다.

이럴 경우 $g(4)=0$, $g(0)=2$, $g(3)=4$로 $f(x)$의 극댓값이

$f(0)$이어야만 한다. 하지만 아까와 마찬가지로 $f'(\alpha)=0$이기에

$f(\alpha)<f(0)$이어서 성립하지 못한다.

case 4)



두 극솟값의 크기가 다른 경우이다.

이 경우 $g(4)=0$, $g(0)=2$, $g(3)=4$로 함수 $f(x)$는 $x=0$,

$x=4$에서 극솟값을, $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다.

또한 $f(4)<f(0)$, $f(0)<f(3)$이다.

마지막 남은 이 케이스가 유일한 정답 경우임을 알 수 있고

이제 남은 것은 $f(4)<f(0)<f(3)$을 계산하는 것이다.

$f'(x)$에 대해 거의 알고 있으니 이를 기준점으로 생각하면

$$\int_0^4 \{4x(x-\alpha)(x-4)\}dx<0,\ \int_0^3 \{4x(x-\alpha)(x-4)\}dx>0$$

이 된다 따라서 이를 계산해보자.

$$\int_0^4 \{4x(x-\alpha)(x-4)\}dx=4\int_0^4 \{x^3-(\alpha+4)x^2+4\alpha x\}dx$$

$=4\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{\alpha+4}{3}x^3+2\alpha x^2\right|_0^4<0,\ \alpha<2$ - ①

$\int_0^3\{4x(x-\alpha)(x-4)\}dx=4\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{\alpha+4}{3}x^2+2\alpha x^2\right|_0^3>0$

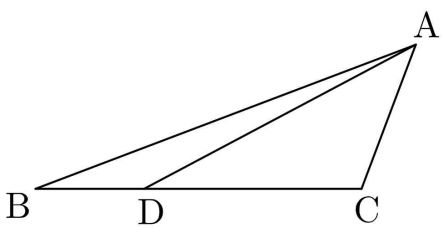
$\alpha>\frac{7}{4}$ - ②

따라서 $f'(x)=4x(x-\alpha)(x-4),\ f'(5)=100-20\alpha,$

①과 ②에 의해 $\frac{7}{4}<\alpha<2$로 $60<100-20\alpha<65$이다.

$M+m=60+65=125$

20번: 7



먼저 $\sin\angle ABC:\sin\angle ACB=2:2\sqrt{7}$이므로 사인 법칙에 의해서

$\overline{AB}:\overline{AC}=2\sqrt{7}:2$ 이다. 이후 $\sin\angle ACB:\sin\angle ADC=2\sqrt{7}:\sqrt{7}$

로 사인 법칙에 의해서 $\overline{AD}:\overline{AC}=2:1$이다.

따라서 선분 AB, AD, AC를 $\sqrt{7}k$, $2k$, k로 하면

삼각형 ABD와 삼각형 ADC에서 코사인 법칙으로 인해

$7k^2=4k^2+4-8k\cos(\angle ADB),\ k^2=4k^2+16-16\cos(\pi-\angle ADB)$

의 두 식을 얻을 수 있고 $\cos(\angle ADB)$에 대해 식을 정리하면

$\frac{4-3k^2}{8k}=-\frac{3k^2+16}{16k}=\cos\angle ADB$ 따라서

$k=2\sqrt{2},\ \cos(\angle ADB)=-\frac{5}{4\sqrt{2}},\ \sin\angle ABD=\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$

$S=2k\times2\times\frac{1}{2}\times\sin\angle ADB=\sqrt{7},\ S^2=7$이다.

21번: 74

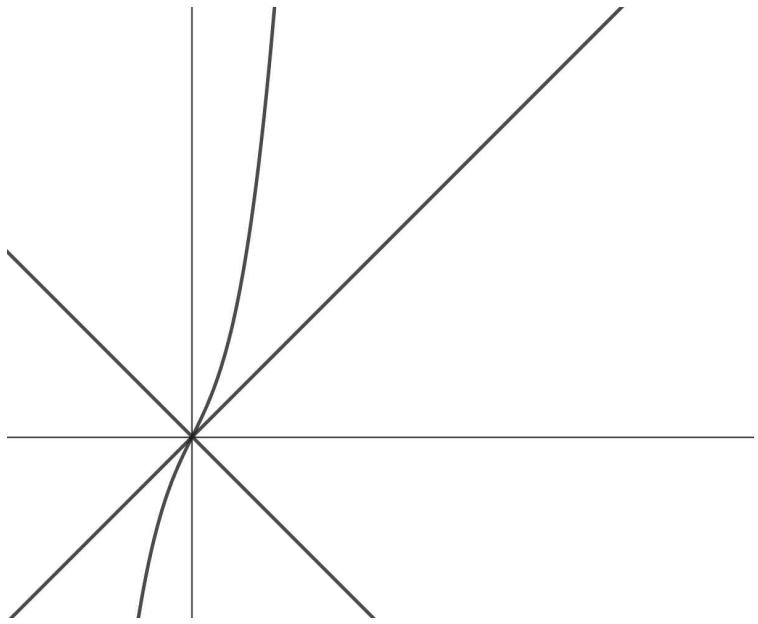
먼저 (가)조건을 분석하면 $f(x)=\pm x$의 실근의 개수는 1개

$f(x)=x$와 $f(x)=-x$의 실근 모두 최소 1개 이기 때문에

따라서 공통 근을 1개를 가져야 한다.

$x=-x$의 실근은 0이기 때문에 따라서 $f(x)=\pm x$의 근은 0만

존재한다. 따라서 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 실근이 1개만 존재하기 위해서는 $f(x)=x$의 실근이
$x=0$에서만 존재하며 $f'(0)>0$
$f(x)=x(x^2+ax+b)$로 두면 $f'(0)>0,\ b>0$ 이며
$x(x^2+ax+b)=x,\ x^2+ax+b=1$은 실근을 가지지 않으며
따라서 방정식 $x^2+ax+b-1=0$의
판별식 $D_1=a^2-4(b-1)<0$이다.

이제 (나)조건을 해석하면 일단 함수 $f(x)$는 0에서만 부호가
바뀌기에 $|f(x)|=|3x|$는 $f(x)=3x$와 같다.
$f(x)=x(x^2+ax+b)=3x,\ f(x)=x(x^2+ax+b)=3x,$
$x^2+ax+b-3=0$의 실근의 합은 2, 따라서 $x^2+ax+b-3=0$
이 중근을 가질 경우 $a=-4,\ b=7$
두 개의 서로 다른 실근을 가질 경우 $a=-2,$
판별식 $D_2=4-4(b-3)>0$이다.

먼저 $a=-4,\ b=7$일 경우 $f(2)$는 정수이기에 케이스 만족,
$f(4)=28$

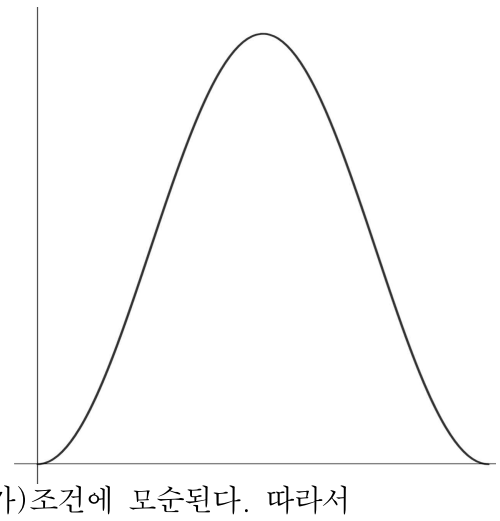
두 개의 서로 다른 실근을 가질 경우 $a=-2,$
$D_1=4-4(b-1)<0,\ D_2=4-4(b-3)>0$ 이기에 $2<b<4$
$f(2)=2b$는 정수이기에 $4<2b<8$, $2b$는 5,6,7 만 가능하다.
$f(4)=32+4b$

이 경우 $f(4)$의 최솟값은 42, 최댓값은 46이다.

따라서 $M=46$, $m=28$, $M+m=74$이다.

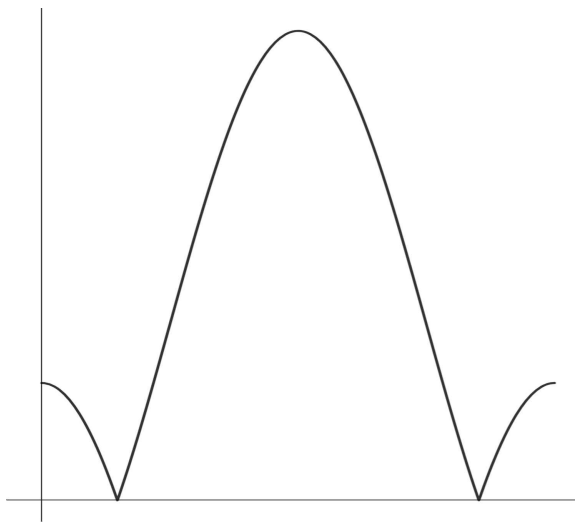
22번: 45

만약 $a=b$일 경우 다음과 같은 그래프가 그려진다.



이 때, (가)조건에 모순된다. 따라서

$a>b$이고 다음과 같은 그래프가 그려진다.



이 경우 $a>b$이고 a와 b 모두 자연수이기 때문에 $f(0)\geq 1$이고 따라서 $g(1)\geq 4$이다.

따라서 $g(9)$의 값의 후보는 5와 6이다.

먼저 $g(9)=5$일 경우를 살펴보면 $g(5)\geq 4$이다. 하지만 $g(1)=4$이기에 모순이다. 따라서 $g(9)=6$이고 따라서 최댓값은 9보다 크고 따라서 가능한 $g(5)$의 값은 4가 유일하다.

따라서 $g(9)=5$이다.

$$\Rightarrow a+b=10$$

$g(5)$의 값이 4이기에

$$a-b<5$$

(가)조건을 만족시키기 위해서 $g(9)=6$이어야 한다. 즉, $f(x)=2$의
실근의 개수가 4여야 한다. 따라서

$$a-b\geq 2$$

$a+b=10$, a와 b 모두 자연수이기 때문에 $a-b$의 값은 짝수이고
앞에서 구한 결과에 따라 $2\leq a-b<5$이기에 가능한 $a-b$의 값은
2또는 4이다.

이를 이용해 최종적으로 가능한 a, b의 순서쌍을 구하면,

$$(6,\,4),\ (7,\,3)$$

이므로 정답은 $6\times 4+7\times 3=45$이다.