1.

[정답] 121

[출제 의도] 이항분포와 조건부확률을 이용하여 확률을 구한다.

점 A가 x 축의 음의 방향으로 1만큼 이동할 확률은 $\frac{1}{4}$ 이고,

점 A가 x 축의 음의 방향으로 2만큼 이동할 확률은 $\frac{1}{4}$ 이고,

점 B가 y 축의 음의 방향으로 1만큼 이동할 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

5번의 시행 이후에 두 점 A, B 사이의 거리가 자연수인 경우는 점 B가 평행이동된 횟수를 기준으로 다섯 가지로 나눌 수 있다.

(i) 점 B가 평행이동된 횟수가 0인 경우

점 A가 평행이동된 횟수가 5여야 한다.

이때 점 A는 한 번 평행이동할 때마다 x 축의 음의 방향으로 최소 1만큼 평행이동하므로, 점 A의 x 좌표는 -1 보다 작다.

이때 점 A의 x 좌표는 -3 일 경우만이,

$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ 이므로 $\overline{AB}$ 의 값은 자연수이다.

C의 x 좌표가 -3 이 되기 위해서는 점 A가 x 축의 음의 방향으로 1만큼 네 번, x 축의 음의 방향으로 2만큼 한 번 평행이동해야 한다.

따라서, (i)의 확률은 $\frac{5!}{1! \times 4!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{5}{4^5}$ 이다.

(ii) 점 B가 평행이동된 횟수가 1인 경우

이 경우 점 A의 x 좌표는 -4 일 경우만이,

$\overline{AB} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$ 이므로 $\overline{AB}$ 의 값은 자연수이다.

점 A의 x 좌표가 -4 가 되기 위해서는 점 A가 x 축의 음의 방향으로 1만큼 한 번, x 축의 음의 방향으로 2만큼 세 번 평행이동해야 한다.

따라서, (ii)의 확률은 $\frac{5!}{1! \times 3! \times 1!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{2}{4}\right)^1 = \frac{40}{4^5}$ 이다.

(iii) 점 B가 평행이동된 횟수가 2인 경우

이 경우 점 A의 x 좌표가 0일 경우만이

$\overline{AB} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$ 이므로 $\overline{AB}$ 의 값은 자연수이다.

점 A의 x 좌표가 0이 되기 위해서는 점 A가 x 축의 음의 방향으로 1만큼 세 번 평행이동해야 한다.

따라서, (iii)의 확률은 $\frac{5!}{3! \times 2!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{40}{4^5}$ 이다.

(iv) 점 B가 평행이동된 횟수가 3인 경우

점 A의 x 좌표가 0일 경우만이

$\overline{AB} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ 이므로 $\overline{AB}$ 의 값은 자연수이다.

점 A의 x 좌표가 0이 되기 위해서는 점 A가 x 축의 음의 방향으로 1만큼 한 번, x 축의 음의 방향으로 2만큼 한 번 평행이동해야 한다.

따라서, (iv)의 확률은 $\frac{5!}{1! \times 1! \times 3!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{160}{4^5}$ 이다.

(v) 점 B가 평행이동된 횟수가 4인 경우

점 A가 평행이동된 횟수가 1이어야 한다. 이때는 점 B의 y 좌표가 0이므로, 점 A의 x 좌표의 값과 관계없이 $\overline{AB}$ 의 값은 자연수이다.

따라서, (v)의 확률은 $\frac{5!}{4! \times 1!} \times \left(\frac{2}{4}\right)^1 \times \left(\frac{2}{4}\right)^4 = \frac{160}{4^5}$ 이다.

한편, 점 B가 평행이동한 횟수가 5인 경우,

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에 의하여, $\overline{AB}$ 의 값이 자연수일 확률은

$$\frac{5 + 40 + 40 + 160 + 160}{4^5} = \frac{405}{4^5}$$

한편, (i)~(v) 중에서 점 A가 y 축 위에 있는 경우는

(iii), (iv)뿐이고, 그때의 각각의 확률의 합은 $\frac{40 + 160}{4^5} = \frac{200}{4^5}$

따라서, $\overline{AB}$ 가 자연수일 때, 점 A가 y 축 위에 있을 확률은

$$\frac{\frac{200}{4^5}}{\frac{405}{4^5}} = \frac{40}{81}$$

즉 $p = 81$, $q = 40 \therefore p + q = 81 + 40 = 121$