[자작 문항에 대한 칼럼 - 합성함수의 극값]

2025년 6월 15일에 오르비에 공유했던 공통 범위의 자작 문항에 대해서 “공통이 맞는가?”, “미적분 범위 아닌가?”라는 등의 의견이 달려 이번 칼럼을 작성하게 되었습니다. 문제에 대해 제가 의도한 해설을 바탕으로 이야기해 보도록 하겠습니다. 문제는 그림과 같습니다.

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(g(x))$$

라 하자. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\{x \mid h(x)=g(x)\}=\{-2,\ 0,\ k\}$ (단, k는 양수이다.)
> (나) 함수 $f(x)$의 서로 다른 모든 극값의 집합을 A,
> 함수 $h(x)$의 서로 다른 모든 극값의 집합을 B라
> 하면 $A=B$이다.

$g(0)=0$일 때, $f(8)-g(8)$의 값을 구하시오. [4점]

우선, 문제의 발문을 읽어 보겠습니다. 삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$는 모두 최고차항의 계수가 1이고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대해서 $h(x)=f(g(x))$입니다. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 최솟값 m을 가진다고 생각해 보면, 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$g(a-x)=g(a+x)$$

을 만족시킴을 알 수 있습니다. 그리고 이는 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$h(m-x)=h(m+x)$$

을 만족시킴을 의미합니다. 함수 $g(x)$의 함숫값은 양의 무한대에서 시작하여 점점 작아져 m에서 최솟값을 갖고 다시 양의 무한대로 갑니다. 따라서 함수 $h(x)$의 그래프는 x의 값이 양의 무한대일 때부터 x의 값이 m이 될 때까지의 함수 $f(x)$의 그래프를 직선 $x=m$에 대하여 대칭시킨 모습이라고 이해할 수 있습니다. 그럼, 이제 조건을 살펴보겠습니다.

[조건 (가)]

$h(x)=f(g(x))$이므로, 문제에서 말하는 방정식은 $f(g(x))=g(x)$입니다. 양변에 $g(x)$가 공통으로 있으니 $g(x)=t(t \geq m)$라고 치환하겠습니다. 이제 방정식은 $f(t)=t$가 됩니다. 그럼, 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 고려해야 하는데, 방정식 $f(t)=t$을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 3이니, $f(m)=m$임을 알 수 있고, 가능한 경우의 수는 다음과 같습니다.

1. $f(m)=m$이고, $f(\alpha)=\alpha(\alpha>m)$, $f'(m)=1$인 경우
2. $f(m)=m$이고, $f(\alpha)=\alpha(\alpha>m)$, $f'(\alpha)=1$인 경우
3. $f(m)=m$이고, $f(\alpha)=\alpha(\alpha>m)$, $f(\beta)=\beta(\beta<m)$인 경우

그리고 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 세 실근이 -2, 0, k이고 k가 양수이니, 이차함수의 대칭성에 의해 $k=2$이고

$$g(a)=0=m,\ g(x)-\alpha=x^2-4\ \text{(1, 2, 3번 경우 모두 해당)}$$

임을 알 수 있습니다. 이제 (나) 조건을 보겠습니다.

[조건 (나)]

우선, 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다고 생각해 보겠습니다. 그렇다면 집합 A는 공집합이 됩니다. 하지만 함수 $h(x)$는 위에서 말했듯이 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로 반드시 극값을 갖게 되므로, 집합 B는 공집합이 아닙니다. 즉, 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다면, (나) 조건에 모순이게 됩니다. 따라서 함수 $f(x)$는 극값을 갖습니다. 그럼, 이제 함수 $f(x)$의 극댓값을 M_1, 극솟값을 M_2라고 하겠습니다. 위에서 말했듯이 함수 $h(x)$는 $x=m$에서 반드시 극값을 가지므로 $h(m)$의 값은 반드시 M_1 또는 M_2가 되어야 합니다. 그럼, 방정식 $f(x)=M_1$의 서로 다른 두 실근을 m_1, $m_2(m_1<m_2)$, 방정식 $f(x)=M_2$의 서로 다른 두 실근을 m_3, $m_4(m_3<m_4)$이라 하고 각 경우를 비교해 보겠습니다.

1. $m_1=0$이면 함수 $h(x)$가 함수 $f(x)$의 극댓값 M_1을 극댓값으로, 함수 $f(x)$의 극솟값 M_2을 극솟값으로 가지고 이외의 극값을 갖지 않으므로 조건을 만족합니다.

2. $m_2=0$이면 함수 $h(x)$가 함수 $f(x)$의 극댓값 M_1을 극솟값으로 갖긴 하지만, 함수 $f(x)$의 극솟값 M_2을 극값으로 갖지 않으므로 (나) 조건을 만족하지 않습니다.

3. $m_3=0$이면 $f'(m_3)=1$이어야 1의 경우와 마찬가지로 조건을 만족합니다.
($f'(m_3) \neq 1$이면 (가) 조건을 만족하지 않습니다.)

4. $m_4=0$이면 함수 $h(x)$가 함수 $f(x)$의 극솟값 M_2을 극솟값으로 갖긴 하지만, 함수 $f(x)$의 극댓값 M_1을 극값으로 갖지 않으므로 (나) 조건을 만족하지 않습니다.

[마지막 발문의 조건 - $g(0)=0$]

위에서 말했듯이 함수 $g(x)$는 최솟값 0을 가지므로 $g(x)=x^2$이고 $\alpha=4$입니다.

[정리]

세 가지의 조건을 분석하면서, 총 2가지의 경우의 수를 가지고 있습니다. 먼저, (나)의 1번 경우를 보겠습니다. $f'(m_1)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 서로 다른 세 점에서 만나고 그중 두 점의 좌표는 각각 $0,\ 4$입니다. 즉, $f(x)$는

$$f(x)=x(x-4)(x+k)+x \ \text{(단, } k>0\text{)}$$

이고, $f'(0)=0$이므로 $k=\dfrac{1}{4}$입니다. 따라서,

$$f(x)=x(x-4)\left(x+\frac{1}{4}\right)+x,\ g(x)=x^2$$

입니다. (나)의 3번의 경우는 $f'(m_3)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 서로 다른 두 점에서 만나고 그 점의 좌표는 각각 $0,\ 4$입니다. 즉, $f(x)$는

$$f(x)=x^2(x-4)+x$$

입니다. 그리고 이 경우는 하나의 확인 작업을 거쳐야 합니다. 하나의 조건, $f(m_3)=M_2$임을 사용하지 않았기 때문입니다. $f(m_3)=0=M_2$이므로 방정식 $f(x)=0$이 중근을 갖는지 확인해 보면,

$$f(x)=x^2(x-4)+x=x(x^2-4x+1)$$

이므로 중근을 갖지 않습니다. 즉, (나) 조건을 만족하지 않습니다.

따라서, $f(8)-g(8)=208$입니다.