

2026 동국대 모의논술 해설

문제 1

풀이 1.

주어진 장축의 중심을 $O(0, 0)$ 이라 하면 타원의 방정식은 $x^2 + 4y^2 = 1$

점 $P\left(t, \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\right)$ 이라 하자. $(-1 \leq t \leq 1)$

이때 y 좌표 > 0 인 상황만 고려하여도 대칭성에 의해 최댓값은 동일하다.

이때 Q 는 $Q\left(t, -\frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\right)$ 이고 직선 PQ 는 $x=t$ 이고, $0 \leq t \leq 1$ 로 범위를 제한시키면 직

선 PQ 로부터 거리가 제일 멀리 떨어진 점은 $(-1, 0)$ 이고 이 점을 R 이라 하자.

이때, $0 \leq t \leq 1$ 또한 $-1 \leq t < 0$ 인 상황과 대칭성에 의해 최댓값은 동일하다.

넓이를 $S(t)$ 라 하면 $S(t) = \frac{1}{2}(1+t)\sqrt{1-t^2}$, $S'(t) = \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2} - \frac{t(1+t)}{2\sqrt{1-t^2}}$

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗		↘	

$t = \frac{1}{2}$ 에서 최대이고 넓이의 최댓값은 $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

풀이 2.

주어진 장축의 중심을 $O(0, 0)$ 이라 하면 타원의 방정식은 $x^2 + 4y^2 = 1$

점 $P\left(\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta\right)$ 이라 하자. $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

이때 $Q\left(\cos\theta, -\frac{1}{2}\sin\theta\right)$ 라 하고, 타원의 대칭성에 의해 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 로 범위를 제한해도 답은 동일하고 이때 $R(1, 0)$ 이다.

넓이를 $S(\theta)$ 라 하면 $S(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta(1+\cos\theta)$ 이고

$S'(\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{1}{2}(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) = \frac{1}{2}(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		↗		↘	

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 에서 최대이고 $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

문제 2

맨 안쪽의 원의 점수가 10점, 그 이후는 1점씩 감소하므로

점수가 29점 이상이라면 10점을 3번 받거나, 10점 2번, 9점 1번을 받아야 한다.

10점을 받는 원의 넓이는 $25^2\pi = 625\pi$, 9점을 받는 원의 넓이는 $(50^2 - 25^2)\pi = 1875\pi$

표적지를 맞출 확률은 $1 - 0.19 = 0.81$, 전체 표적지의 넓이는 $550^2 = 302500$

10점을 받을 확률은 $0.81 \times \frac{625\pi}{302500}$ 이고 이를 p_{10} 이라 하자.

9점을 받을 확률은 $0.81 \times \frac{1875\pi}{302500}$ 이고 이를 p_9 라 하자.

10점을 3번 받을 확률은 $(p_{10})^3$, 10점 2번, 9점 1번 받을 확률은 $3(p_{10})^2p_9$ 이다.

따라서 구하는 확률은 $(p_{10})^3 + 3(p_{10})^2p_9 = 1.45 \times 10^{-6}$

문제 3

(1)

P_1 의 속도를 v_1 , P_2 의 속도를 v_2 라 하면,

$v_1(-\sin t, \cos t)$, $v_2(-2\theta'(t)\sin\theta(t), 2\theta'(t)\cos\theta(t))$ 이고 $t=0$ 에서 점 P_1 와 P_2 가 만나므로 $\theta(0)=0$

P_1 의 속력은 $\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1$ 이므로

P_2 의 속력은 $\sqrt{\{2\theta'(t)\sin\theta(t)\}^2 + \{2\theta'(t)\cos\theta(t)\}^2} = 2|\theta'(t)| = 4$

이때 두 점 모두 시계 반대방향을 따라 움직이므로 $\theta'(t) > 0$ 이고, $\theta'(t) = 2$, $\theta(t) = 2t$ 이다.
 $P_2(2\cos 2t, 2\sin 2t)$

$\overline{P_1 P_2} > 0$ 이므로 $\overline{P_1 P_2}$ 이 최대일 때 $(\overline{P_1 P_2})^2$ 도 최대이다.

$$(\overline{P_1 P_2})^2 = (2\cos 2t - (1 + \cos t))^2 + (2\sin 2t - \sin t)^2 = -8\cos^2 t - 2\cos t + 10$$

(단, 삼각함수 덧셈법칙으로부터

$$\cos 2t = \cos(t+t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1, \quad \sin 2t = \sin(t+t) = 2\sin t \cos t$$

$-1 \leq \cos t \leq 1$ 이므로 $(\overline{P_1 P_2})^2$ 은 $\cos t = -\frac{1}{8}$ 일 때 최대이다.

이때 $\cos t_0 = -\frac{1}{8}$, $\overline{P_1 P_2}$ 의 최댓값은 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

(2)

$\cos t_0 = -\frac{1}{8}$ 일 때, $\frac{\pi}{2} < t_0 < \pi$ 인 경우와 $\pi < t_0 < \frac{3}{2}\pi$ 인 경우를 각각 구해보자.

$$\textcircled{1} \quad \frac{\pi}{2} < t_0 < \pi$$

$\sin t_0 = \sqrt{1 - \cos^2 t_0} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ 이고 (1)에서 언급한 덧셈법칙에 의해

$$\sin 2t_0 = 2\sin t_0 \cos t_0 = -\frac{3\sqrt{7}}{32}, \quad \cos 2t_0 = 2\cos^2 t_0 - 1 = -\frac{31}{32}$$

$$P_1\left(\frac{7}{8}, \frac{3\sqrt{7}}{8}\right), \quad P_2\left(-\frac{31}{16}, -\frac{3\sqrt{7}}{16}\right)$$

$$\textcircled{2} \quad \pi < t_0 < \frac{3}{2}\pi$$

$\sin t_0 = -\sqrt{1 - \cos^2 t_0} = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$ 이고 (1)에서 언급한 덧셈법칙에 의해

$$\sin 2t_0 = 2\sin t_0 \cos t_0 = \frac{3\sqrt{7}}{32}, \quad \cos 2t_0 = 2\cos^2 t_0 - 1 = -\frac{31}{32}$$

$$P_1\left(\frac{7}{8}, -\frac{3\sqrt{7}}{8}\right), \quad P_2\left(-\frac{31}{16}, \frac{3\sqrt{7}}{16}\right)$$