

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

(2)

- ① 1 ☒ ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2$$

2. 함수 $f(x) = x^2 - x + 1$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의

값은? [2점]

(1)

- ☒ ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

 $f(x)$ 는 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

$$f'(x) = 2x - 1, \therefore f'(1) = 1$$

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^7 a_k = 8$ 일 때, $\sum_{k=1}^7 (2a_k + 1)$ 의 값은?

[3점]

(3)

- ① 21 ② 22 ☒ ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 (2a_k + 1) &= 2 \sum_{k=1}^7 a_k + \sum_{k=1}^7 1 \\ &= 2 \cdot 8 + 7 \\ &= 16 + 7 \\ &= 23. \end{aligned}$$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a & (x < 3) \\ 5x - a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

(3)

- ① 10 ② 11 ☒ ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \text{ 이므로}$$

$$-9 + a = 15 - a,$$

$$\therefore a = 12$$

5. $\int_0^2 (6x^2 - 2x + 1) dx$ 의 값은? [3점] ②

- ① 12 ☒ ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$$\begin{aligned} \int_0^2 (6x^2 - 2x + 1) dx &= \left[2x^3 - x^2 + x \right]_0^2 \\ &= 16 - 4 + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

6. 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = a \cos bx + 1$ 의 최댓값이 8이고 주기가 π 일 때, $a+b$ 의 값은? [3점] ④

- ① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$ ☒ ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

$a=7, b=2$

$$\begin{cases} (\text{최댓값}) = a + 1 = 8 \Leftrightarrow a = 7 \\ (\text{주기}) = \pi = \frac{2\pi}{b} \Leftrightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$\therefore a+b = 7+2 = 9$$

7. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = 5x^2 + xf(x)$$

라 하자. $f(3)=2$, $f'(3)=1$ 일 때, $g'(3)$ 의 값은? [3점] ⑤

- ① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ☒ ⑤ 35

$$g'(x) = 10x + f(x) + x f'(x)$$

$$g'(3) = 30 + f(3) + 3f'(3)$$

$$= 30 + 2 + 3 \cdot 1$$

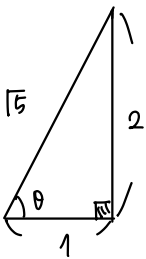
$$= 35$$

8. $\sin(\pi - \theta) > 0$ 이고 $2\cos\theta = \sin\theta$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ ③ 0 ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 ④ $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ☒ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

• $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta > 0$, θ 는 1, 2, 4번

• $2\cos\theta = \sin\theta$, $\therefore \tan\theta = 2$, θ 는 1번!



$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

9. 함수 $f(x) = x^2 + ax$ 에 대하여

$$\int_{-3}^3 (x+1)f(x) dx = 36 + \int_{-3}^3 f(x) dx$$

일 때, 상수 a 의 값은? [4점]

- ① 1 ☒ ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\int_{-3}^3 (x+1)f(x) dx = 36 + \int_{-3}^3 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-3}^3 xf(x) dx = 36$$

$$\Leftrightarrow \int_{-3}^3 x^3 + ax^2 dx = 2 \int_0^3 ax^2 dx = 2 \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_0^3$$

$$= 18a = 36$$

$$\therefore a = 2$$

10. 실수 $a (a > 1)$ 에 대하여

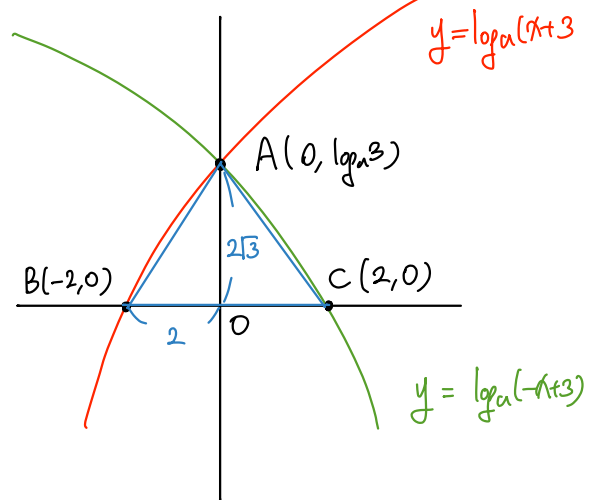
곡선 $y = \log_a(x+3)$ 이 곡선 $y = \log_a(-x+3)$ 과 만나는 점을 A,

곡선 $y = \log_a(x+3)$ 이 x 축과 만나는 점을 B,

곡선 $y = \log_a(-x+3)$ 이 x 축과 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a 의 값은? [4점]

- ☒ ① $3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ② $3^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ ③ $3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ④ $3^{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$ ⑤ $3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$



$\triangle ABC$ 가 정삼각형이므로

$$\overline{BO} : \overline{OA} = 1 : \sqrt{3}, \therefore \overline{OA} = 2\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

$$\log_a 3 = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow a^{2\sqrt{3}} = 3, \quad a = 3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

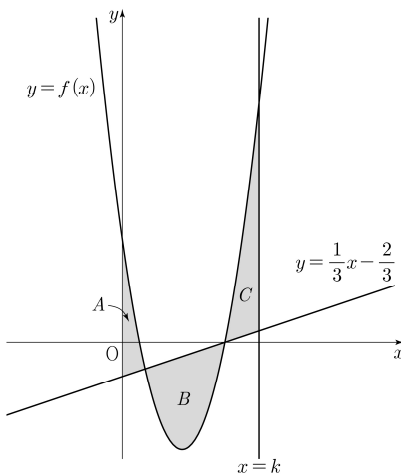
$$\therefore a = 3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

13. 그림과 같이 함수 $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ 및 y 축으로 둘러싸인 영역을 A , 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ 로 둘러싸인 영역을 B , 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, $x=k(k>2)$ 로 둘러싸인 영역을 C 라 하자.

$$(A \text{의 넓이}) + (C \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이})$$

일 때, 상수 k 의 값은? [4점]

④



- ① $\frac{29}{12}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

$$(A \text{의 넓이}) + (C \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이})$$

$$\iff \int_0^k \left\{ f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \right) \right\} dx = 0$$

$$\iff \int_0^k \left(3x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{8}{3} \right) dx = 0$$

$$\iff \left[x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{8}{3}x \right]_0^k = 0, \quad k^3 - \frac{11}{3}k^2 + \frac{8}{3}k = 0$$

$$3k^3 - 11k^2 + 8k = 0,$$

$$k(3k-8)(k-1) = 0, \quad \therefore k = \frac{8}{3} \quad (k > 2)$$

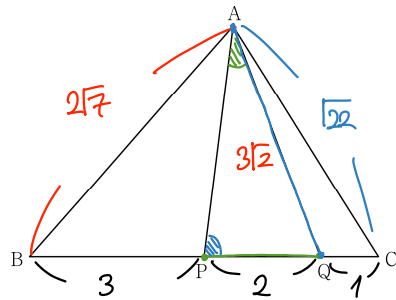
14. $\overline{AB} = 2\sqrt{7}$ 인 삼각형 ABC 에서 선분 BC 의 중점을 P , 선분 BC 를 5:1로 내분하는 점을 Q 라 하자.

$$\overline{AQ} = 3\sqrt{2}, \quad \sin(\angle QAP) : \sin(\angle APQ) = \sqrt{2} : 3$$

일 때, 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이는? [4점]

②

- ① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$ ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



$$\langle \sin \angle QAP : \sin \angle AQP = \sqrt{2} : 3 \rangle$$

사인 법칙에 의해 (사인비) = (대변의 길이 비) 이므로,

$$\sin \angle QAP : \sin \angle AQP = \overline{PQ} : \overline{AQ} = \sqrt{2} : 3$$

$$\overline{AQ} = 3\sqrt{2} \text{ 이므로, } \overline{PQ} = 2 \text{ 이다.}$$

$$\overline{BP} : \overline{PQ} : \overline{QC} = 3 : 2 : 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{BP} = 3, \quad \overline{PQ} = 2, \quad \overline{QC} = 1$$

$\langle \triangle ABQ$ 에서 코사인 법칙

$$\cos \angle AQB = \frac{(3\sqrt{2})^2 + 5^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \therefore \cos \angle AQC = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{1^2 + (3\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 1 \cdot (3\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{22}$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 넓이를 구하기 위해, $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름을 R 라 하면, $2R = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC}$ 이다. $\therefore R = \frac{\sqrt{22}}{2 \sin \angle ABC}$

$$\triangle ABC \text{에서, } \cos \angle ABC = \frac{(2\sqrt{7})^2 + 6^2 - (\sqrt{22})^2}{2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 6} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \therefore \sin \angle ABC = \frac{3}{4}$$

$$R = \frac{\sqrt{22}}{2 \sin \angle ABC} = \frac{\sqrt{22}}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{22}}{3}$$

$$\therefore (\triangle ABC \text{의 외접원의 넓이}) = \left(\frac{2\sqrt{22}}{3} \right)^2 \pi = \frac{88}{9} \pi$$

15. 상수 k 와 $f'(0) = 6$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + k & (|x| > 1) \\ -f(x) & (|x| \leq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k + f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은? [4점]

①

- (가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ 의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다. **유미분계수!**
 (나) x 에 대한 방정식 $g(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 의 최댓값은 13이다.

✓ ① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

$$f(x) = f(x) + k \quad \therefore -f(x) \quad \therefore f(x) + k \quad f'(0) = 6 \text{ 이므로, } f'(0) = -f'(0) = -6$$

< $y = f(x)$ 그래프 개형 파악 >

i) (가)에 의해, $f(x)$ 는 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ 에서

감소하므로 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ 에서 $y = f(x)$ 는 빨간색과 같고,

$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 의 값이 존재하여야 하므로, $f(1-) = f(1+)$ 이다.

따라서 $y = f(x)$ 의 $(-1, 1)$ 에서의 그래프는 초록색과 같다.

ii) (나)에 의해 $f(-1) = 13$ 이다.

< 식 작성 >

i) 삼차함수의 비율관계에 의해

$y = -f(x)$ 의 식을 작성하면,

$$-f(x) = p(x+1)^2(x-2) + 13 \quad (p > 0)$$

$$-f'(0) = -6 \text{ 이므로 계산하면}$$

$$-3p = -6, \quad p = 2$$

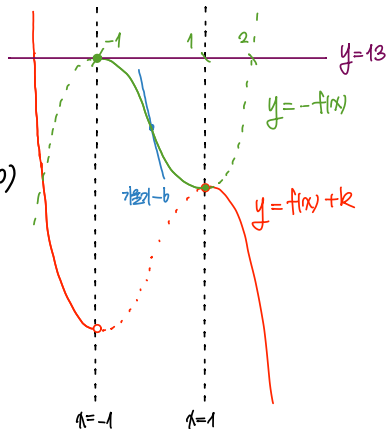
$$\therefore f(x) = -2(x+1)^2(x-2) - 13$$

$$ii) f(1) = -f(1) = f(1) + k$$

$$\therefore f(1) = -\frac{k}{2} = -5, \quad k = 10$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(-\frac{3}{2}\right) - 13 = \frac{27}{4} - 13 = -\frac{25}{4}$$

$$\text{따라서 } k + f\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + \left(-\frac{25}{4}\right) = \frac{15}{4} \text{ 이다.}$$



단답형

16. 방정식 $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = \log_{25} 9$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점] 2

$$\log_5(x^2-1) = \log_5 3 \quad (x > 1)$$

$$x^2-1 = 3, \quad \therefore x = 2$$

17. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 4x$ 이고 $f(0) = 3$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오. [3점] 6

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$$

$$f(1) = 1 + 2 + 3$$

$$= 6$$

1. A는 어떤 곡선 위에 있는가?

2. 평가원은 왜 이렇게 냈는가? → “평행이동”

21. 함수 $f(x) = (x-1)(x-2)$ 와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 a 에 대하여
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$$
의 값과 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$ 의 값이 모두 존재한다.
 $g(-1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

42

$$\text{I) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \frac{|f(x)|}{f(x)} \text{에 대하여,}$$

 $a=1, 2$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{f(x)} \neq \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{-f(x)}$ 이므로,

$$f(1) = f(2) = 0, \therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 + ax + b) = f(x)h(x) \text{라 하자.}$$

$$\text{II) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)h(x) - f(x)|}{f(x)h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{f(x)} \times \frac{|h(x) - 1|}{h(x)} \text{에 대하여,}$$

 $a=1, 2$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{f(x)} \neq \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{-f(x)}$ 이므로,
 $h(x)-1$ 은 $(x-1), (x-2)$ 의 인수를 가진다. $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로

$$h(x) = (x-1)(x-2) + 1 = x^2 - 3x + 3 \text{이다.}$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 3 < 0 \text{이므로 } h(x) > 0 \text{이다.}$$

따라서, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)h(x) - f(x)|}{f(x)h(x)}$ 는 모든 a 에 대하여

값이 존재한다.

$$f(x) = f(x) \cdot h(x) = (x-1)(x-2)(x^2 - 3x + 3)$$

$$\text{따라서, } f(-1) = (-2)(-3)(7) = 42$$

22. $k > 1$ 인 실수 k 에 대하여 두 곡선

$$y = 2^x + \frac{k}{2}, \quad y = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인

직선이 곡선 $y = 2^{x-2} - 3$ 과 만나는 점을 B라 하자.삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k + \log_2 k = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 0은 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

38

<A의 좌표 구하기>

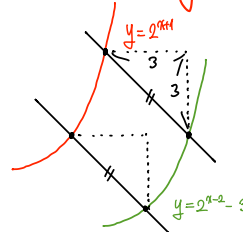
$$2^x + \frac{k}{2} = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2 \iff 2 \cdot \frac{2^{2x}}{2} + (4-k) \cdot \frac{2^x}{2} - 2k = 0$$

$$(2 \cdot 2^x - k)(2^x + 2) = 0$$

$$2^x = \frac{k}{2}, \quad x = \log_2 k - 1, \quad A(\log_2 k - 1, k) \text{이다.}$$

<‘점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 $y = 2^{x-2} - 3$ 을 만난다’의 의미>

⇒ 좌·우함수의 평행이동 떠올리기!

점 A의 좌표는 $(\log_2 k - 1, k)$ 이고, 이때 $x = \log_2 k - 1, y = k$ 라고 하면 $y = 2^{x+1}$ 이 되며 점 A는 $y = 2^{x-2} - 3$ 위의 점이다. $y = 2^{x+1}$ 을 1씩으로 3, y 축으로 3만큼평행이동한 그래프가 $y = 2^{x-2} - 3$ 이므로 k 의 값에 관계없이 $AB = 3\sqrt{2}$ 이다. $\triangle OAB$ 의 방정식

$$\triangle OAB: x + y = k + \log_2 k - 1$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times AB \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{16\sqrt{2}}{3} = \frac{|k + \log_2 k - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \quad (k > 1)$$

$$k + \log_2 k - 1 = \frac{32}{3}, \text{ 따라서}$$

$$k + \log_2 k = \frac{35}{3}, \quad p + q = 38$$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$ 의 값은? [2점]

①

✓ ① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{(\frac{2}{3})^n + 1} = 12$$

24. 곡선 $3x + y + \cos(xy) = 2$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 x 절편은? [3점]

②

① $\frac{1}{6}$ ✓ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$$3x + y + \cos(xy) = 2$$

$$\text{미분: } 3 + \frac{dy}{dx} - \sin(xy) \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

$$\Big|_{x=0, y=1} \quad 3 + \frac{dy}{dx} = 0, \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \underline{-3}$$

$$\text{접선의 방정식: } y = -3x + 1, \text{ 따라서}$$

$$\text{x절편은 } x = \frac{1}{3}$$

2

수학 영역(미적분)

25. 양수 a 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a} \right)$ 이

실수 S 에 수렴할 때, $a+S$ 의 값은? [3점]

④

- ① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a} \right) = S$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a} \right) = 0$$

$$\therefore a=3$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-3n}{n} + \frac{3n+6}{n+3} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{3}{n+3} \right)$$

$$= 3 + \frac{3}{2} + 1$$

$$= \frac{11}{2}$$

$$\text{따라서, } a+S = 3 + \frac{11}{2} = \frac{17}{2}$$

26. 함수 $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} + 4e^x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.

$g'(a) = \frac{1}{8}$ 이 되도록 하는 실수 a 에 대하여 $a+f'(g(a))$ 의

값은? [3점]

②

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$$g(a) = b \text{ 라 하면 } f(b) = a$$

$$g'(a) = \frac{1}{8} \iff f'(b) = 8$$

$$f'(x) = 3e^{3x} - 6e^{2x} + 4e^x = 8$$

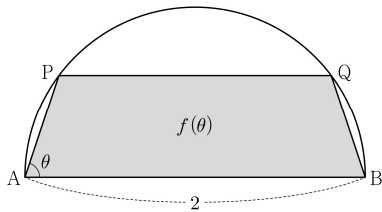
$$f'(b) = 3e^{3b} - 6e^{2b} + 4e^b = 8, e^b = 2 \therefore b = \ln 2$$

$$a = f(\ln 2) = 8 - 12 + 8 = 4$$

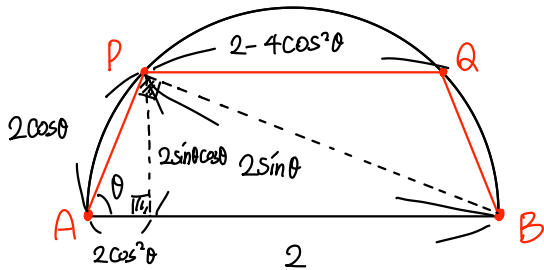
$$f'(g(a)) = \frac{1}{f'(a)} = 8$$

$$\therefore a + f'(g(a)) = 4 + 8 = 12$$

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle BAP = \theta$ ($\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하고, $\overline{AP} : \overline{BP} = 1:3$ 이 되도록 하는 θ 의 값을 α 라 할 때, $f'(\alpha)$ 의 값은? [3점]



- ① $-\frac{64}{25}$ ② $-\frac{59}{25}$ ③ $-\frac{54}{25}$ (checked)
 ④ $-\frac{49}{25}$ ⑤ $-\frac{44}{25}$



$$\square_{ABQP} = f(\theta) = \frac{2 + 2 - 4\cos^2\theta}{2} \times 2\sin\theta\cos\theta$$

$$f(\theta) = 4(1 - \cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta \\ = 4\sin^3\theta\cos\theta$$

$\overline{AP} : \overline{BP} = 1:3$ 일 때 $\theta = \alpha$ 라고 하면 $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$

$$f'(\alpha) = 12\sin^2\alpha\cos\alpha - 4\sin^4\alpha$$

$$\therefore f'(\alpha) = \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{5} - \frac{81}{125} \\ = -\frac{54}{125}$$

28. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 와 두 상수 a, b 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^b$ 의 값은?

① [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$(f(x))^5 + (f(x))^3 + ax + b = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$$

이다.

(나) $f(-3)f(3) < 0, f'(2) > 0$

- ① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$
 ④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

$\langle f(x)$ 가 이계도함수를 가진다 $\Rightarrow$ '도함수가 연속이다'

$$(가) \quad (f(x))^5 + (f(x))^3 = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - (ax + b)$$

미분하면, $\{5(f(x))^4 + 1\}f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} - a$

그러므로 $f(x) \neq 0$ 일 때 $f'(x) = \frac{2x+1}{(f(x))^2\{5(f(x))^4+1\}} - a$

(나) $f(3)f(-3) < 0 \iff$ 사잇값정리에 의해 구간 $(-3, 3)$

에서 $f(c) = 0$ 인 c 가 적어도 하나 존재한다!

$\Rightarrow f'(x)$ 의 식에서 (분모) = 0인 것을 제거하여야 한다!

$\Rightarrow f(c) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ 의 값이 존재하여야 한다.

$\langle f(x)$ 와 $f'(x)$ 의 부호 따지기

$f'(x)$ 의 부호는 $\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} - a$ 에 의존하고, $f(x)$ 의 부호는 $\ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - (ax + b)$ 에 의존한다.

따라서 그래프를 그려보면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} \right) = \frac{2(x-1)(x+2)}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}$$

만약 a 가 $\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$ 의 극값이 아니라면 $f(c) = 0$ 인데 $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ 의 값이 존재하지 않는 c 가 생키므로 $a = -\frac{2}{3}$ 이고, $y = ax + b$ 는 $(-2, \ln \frac{9}{2})$ 를 지나야 한다.

$$\ln \frac{9}{2} = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + b, \therefore b = -\frac{4}{3} + \ln \frac{9}{2}$$

$$\therefore a \times e^b = -\frac{2}{3} \times e^{-\frac{4}{3} + \ln \frac{9}{2}} = -3e^{-\frac{4}{3}}$$

4

수학 영역(미적분)

단답형

29. 두 정수 α, β ($\alpha > \beta$)에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \alpha \times \sin \frac{n}{2} \pi + \beta \times \cos \frac{n}{2} \pi$$

이고, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 4$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 과 $b_1 > 0$ 인 등비수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-2} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-3} b_{2n}) = 6$$

일 때, $b_1 \times b_3 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

109

$$\text{I) } a_1 = \alpha, a_2 = -\beta, a_3 = -\alpha, a_4 = \beta$$

$$\therefore a_{4n-3} = \alpha, a_{4n-2} = -\beta, a_{4n-1} = -\alpha, a_{4n} = \beta$$

$$\text{II) } a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = (\alpha\beta)^2 = 4 \iff |\alpha\beta| = 2$$

< Σ 조건 > : $b_n = b \times r^{n-1}$ 이라 하면, ($b > 0, |r| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-2} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta) b \cdot r^{n-1} = \frac{-b\beta}{1-r} = b$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-3} b_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha (br^2)^{n-1} = \frac{br\alpha}{1-r^2} = b$$

$$\frac{b}{1-r} \times (-\beta) = \frac{b}{1-r} \times \frac{r\alpha}{1+r}, \quad -\beta - \beta r = r\alpha$$

$$\therefore r = \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \quad \text{또 } b > 0 \text{ 이므로 } \beta < 0$$

$$\text{(I) } \alpha = 2, \beta = -1 : r = -1 \quad (\times)$$

$$\text{(II) } \alpha = -1, \beta = -2 : r = -\frac{2}{3}, \quad \frac{2b}{1+\frac{2}{3}} = \frac{b}{5} b = b$$

$$\therefore b = 5$$

$$b_1 \times b_3 = (b_2)^2 \text{ 이므로 } b_2 = 5 \times (-\frac{2}{3}) = -\frac{10}{3}$$

$$\text{따라서 } b_1 \times b_3 = (\frac{10}{3})^2 = \frac{100}{9}$$

$$\rightarrow p+q = 109.$$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \left| f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고, $g(0) > 0$ 이다.

(나) $g'(\ln 3) < 0$, $|g'(-\ln 3)| = \frac{3}{8} g(-\ln 3)$

$g(0)$ 의 최솟값을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

25

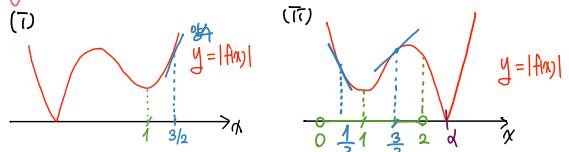
< $f(x)$ 의 개형·함형 파악하기 >

$f(x) = |f(x)| \circ \left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)$ 라 하면 $y = \frac{2}{1+e^{-x}}$ 에 대하여,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1+e^{-x}} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1+e^{-x}} = 0, \quad y' = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0 \quad (\text{증명})$$

$\Leftrightarrow$ 그러므로 $0 < \frac{2}{1+e^{-x}} < 2$ 이다. $\Rightarrow |f(x)|$ ($0 < x < 2$)만 보면 된다.

$f(x)$ 가 미분가능하고 (가)에 의해 $x=0$ 에서 극소, $f(0) > 0$ 이므로
 $f(0) = |f(1)| > 0$ 이며 극소여야 한다. 그래프 개형은 다음과 같다.



(나)에 의해 $f'(\ln 3) < 0$ 이므로 $x = \frac{3}{2}$ 에서 $y = |f(x)|$ 의 미분계수는
 양이다. 따라서 (II)만 가능하다. $f(x) = 0$ 인 $x = \alpha$ 라고 하면 $\alpha \geq 0$ 이다.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이므로 $f(x) = \begin{cases} -f(x) & (x \leq \alpha) \\ f(x) & (x > \alpha) \end{cases}$ 이고
 $f(1) = 0, f'(3/2) > 0, f(2) \leq 0$ 이다.

< (나) 조건과 $f(x)$ 식 작성 >

$$|f'(-\ln 3)| = \frac{3}{8} f(\ln 3) \text{ 이므로 } f'(-\ln 3) = -f'(\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{8}, f(-\ln 3) = f(\frac{1}{2})$$

$f'(\frac{1}{2}) < 0$ 이므로, 조건을 정리하면 $f'(\frac{1}{2}) = -f(\frac{1}{2})$ 이다.

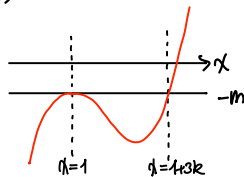
$f(x) = (x-1)^2(x-1-3k) - m$ ($m > 0, f(2) \leq 0$)라고 하면, 정리하면

$$f(x) = (x-1)^2(x-1-3k) - \frac{5}{8} - \frac{9}{4}k \quad (k > -\frac{5}{18})$$

$$f(2) = 1-3k - \frac{5}{8} - \frac{9}{4}k \leq 0, \therefore k \geq \frac{1}{14}$$

$$f(0) = -f(1) = m \text{의 최솟값}$$

$$= \frac{9}{4}k + \frac{5}{8} \geq \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{14} + \frac{5}{8} = \frac{11}{14}$$



$$\therefore p+q = 25$$

16/20