제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$의 값은? [2점] 2

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2$$

2. 함수 $f(x) = x^2 - x + 1$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$의 값은? [2점] 1

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

f(x)는 미분가능하므로

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{h} = f'(1)$$

$f'(x) = 2x - 1$, $\therefore f'(1) = 1$

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7} a_k = 8$일 때, $\sum_{k=1}^{7} (2a_k + 1)$의 값은? [3점] 3

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

$$\sum_{k=1}^{7} (2a_k + 1) = 2\sum_{k=1}^{7} a_k + \sum_{k=1}^{7} 1$$
$$= 2 \cdot 8 + 7$$
$$= 16 + 7$$
$$= 23.$$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a & (x < 3) \\ 5x - a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점] 3

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3+} f(x)$ 이므로

$-9 + a = 15 - a$,

$\therefore a = 12$

5. $\int_0^2 (6x^2-2x+1)\,dx$의 값은? [3점] 2

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$\int_0^2 (6x^2-2x+1)\,dx = \left[2x^3-x^2+x\right]_0^2$

$= 16-4+2$

$= 14$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx+1$의 최댓값이 8이고 주기가 π일 때, $a+b$의 값은? [3점] 4

① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$ ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

$a>0,\ b>0$

$\begin{cases} (\text{최댓값}) = a+1 = 8 \Leftrightarrow a=7 \\ (\text{주기}) = \pi = \frac{2\pi}{b} \Leftrightarrow b=2 \end{cases}$

$\therefore a+b = 7+2 = 9$

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=5x^2+xf(x)$

라 하자. $f(3)=2$, $f'(3)=1$일 때, $g'(3)$의 값은? [3점] 5

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

$g'(x) = 10x + f(x) + xf'(x)$

$g'(3) = 30 + f(3) + 3f'(3)$

$= 30+2+3\cdot 1$

$= 35$

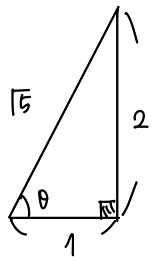
8. $\sin(\pi-\theta)>0$이고 $2\cos\theta=\sin\theta$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

⑤

① $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ✓

· $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta > 0$, θ는 1, 2사분면

· $2\cos\theta=\sin\theta$, $\therefore \tan\theta = 2$, θ는 1사분면!



$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

9. 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx = 36+\int_{-3}^{3}f(x)dx$$

일 때, 상수 a의 값은? [4점]

②

① 1 ② 2 ✓ ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx = 36+\int_{-3}^{3}f(x)dx$

$\Leftrightarrow \int_{-3}^{3}xf(x)dx = 36$

$\Leftrightarrow \int_{-3}^{3}\cancel{x^3}+ax^2dx = 2\int_{0}^{3}ax^2dx = 2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^3$

$= 18a = 36$

$\therefore a=2$

10. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여

곡선 $y=\log_a(x+3)$이 곡선 $y=\log_a(-x+3)$과 만나는 점을 A,

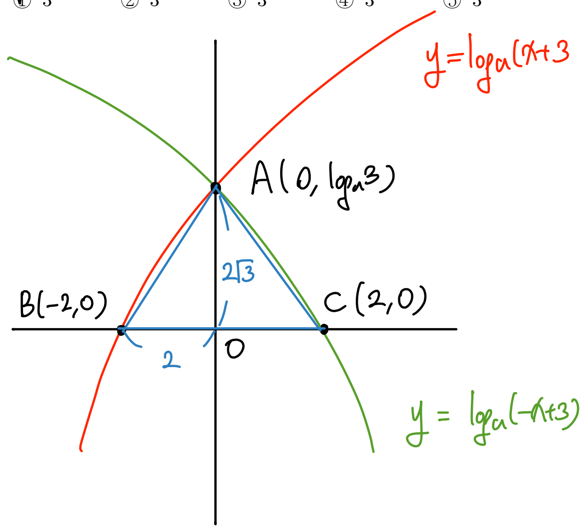
곡선 $y=\log_a(x+3)$이 x축과 만나는 점을 B,

곡선 $y=\log_a(-x+3)$이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은? [4점]

①

① $3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ✓ ② $3^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ ③ $3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ④ $3^{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$ ⑤ $3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$



$\triangle$ABC가 정삼각형이므로

$\overline{BO}:\overline{OA} = 1:\sqrt{3}$, $\therefore \overline{OA} = 2\sqrt{3}$ 이다.

$\log_a 3 = 2\sqrt{3} \Longleftrightarrow a^{2\sqrt{3}} = 3$, $a = 3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$

$\therefore a = 3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 위치 x가

$$x=t^3-t^2-t+1$$

5

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 1이다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이다.
ㄷ. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에 점 P의 가속도는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

~~ㄱ.~~ $x = t^3-t^2-t+1$, $t=1$일 때 $x=0$

$\rightarrow$ X

ㄴ. $\frac{dx}{dt} = v = 3t^2-2t-1$, $t=1$일 때 $v=0$

$\rightarrow$ OK

ㄷ. $v = 3t^2-2t-1 = (t-1)(3t+1)$, $t=1$일 때

운동 방향이 바뀐다.

$a = \frac{dv}{dt} = 6t-2$, $t=1$일 때 $a=4$

$\rightarrow$ OK

12. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4의 최댓값은? [4점]

2

(가) $a_1 = a_3$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1}-a_n+3)(a_{n+1}-2a_n)=0$$

이다.

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

$a_{n+1} = \underbrace{a_n - 3}_{\text{등차}}$ OR $\underbrace{2a_n}_{\text{등비}}$, $a_1 = a_3 = \alpha$라 하자.

n	1	2	3	
a_n	α	$\alpha-3$	$\alpha-6$	: $\alpha=\alpha-6$ (x)
			$2(\alpha-3)$	: $\alpha=2\alpha-6$, $\alpha=6$
		2α	$2\alpha-3$	: $\alpha=2\alpha-3$, $\alpha=3$
			4α	: $\alpha=4\alpha$, $\alpha=0$

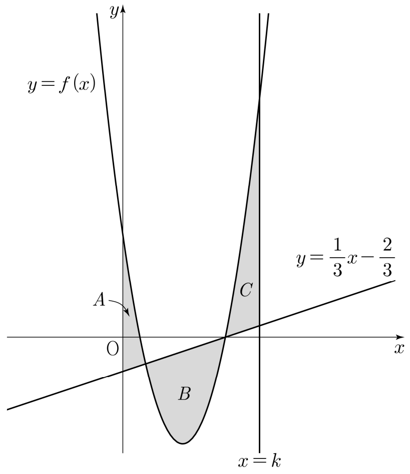
$\alpha=6$일 때, $a_4 = 12$ OR 3
$\alpha=3$일 때, $a_4 = 6$ OR 0
$\alpha=0$일 때, $a_4 = 0$ OR -3

$\therefore$ a_4의 최댓값은 12이다.

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=3x^2-7x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ 및 y축으로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$로 둘러싸인 영역을 B, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$, $x=k\,(k>2)$로 둘러싸인 영역을 C라 하자.

$$(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$$

일 때, 상수 k의 값은? [4점] ④



① $\frac{29}{12}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

(A의 넓이) + (C의 넓이) = (B의 넓이)

$\Longleftrightarrow \int_0^k \{f(x)-(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3})\}dx=0$

$\Longleftrightarrow \int_0^k (3x^2-\frac{22}{3}x+\frac{8}{3})\,dx=0$

$\Longleftrightarrow [x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{8}{3}x]_0^k=0$, $k^3-\frac{11}{3}k^2+\frac{8}{3}k=0$

$3k^3-11k^2+8k=0$,

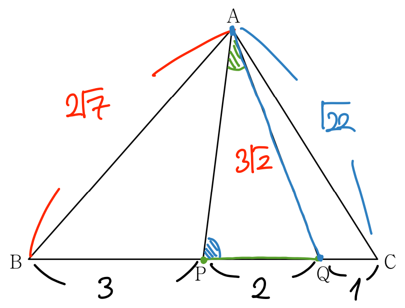
$k(3k-8)(k-1)=0$, $\therefore k=\frac{8}{3}$ $(k>2)$

14. $\overline{AB}=2\sqrt{7}$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P, 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점을 Q라 하자.

$$\overline{AQ}=3\sqrt{2},\ \sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점] ②

① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$ ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



< $\sin\angle QAP : \sin\angle AQP = \sqrt{2}:3$ >

사인 법칙에 의해 (사인비) = (대변의 길이 비) 이므로,

$\sin\angle QAP : \sin\angle APQ = \overline{PQ}:\overline{AQ} = \sqrt{2}:3$

$\overline{AQ}=3\sqrt{2}$ 이므로, $\overline{PQ}=2$ 이다.

$\overline{BP}:\overline{PQ}:\overline{QC}=3:2:1$ 이므로

$\overline{BP}=3$, $\overline{PQ}=2$, $\overline{QC}=1$

< △ABQ에서 코사인 법칙 >

$\cos\angle AQB=\frac{(3\sqrt{2})^2+5^2-(2\sqrt{7})^2}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 5}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\therefore \cos\angle AQC=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{1^2+(3\sqrt{2})^2+2\cdot 1\cdot(3\sqrt{2})\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{22}$

△ABC의 외접원의 넓이를 구하기 위해서, △ABC의 외접원의 반지름을 R라 하면, $2R=\frac{\overline{AC}}{\sin\angle ABC}$ 이다. $\therefore R=\frac{\sqrt{22}}{2\sin\angle ABC}$

△ABC에서,

$\cos\angle ABC=\frac{(2\sqrt{7})^2+6^2-\sqrt{22}^2}{2\cdot 2\sqrt{7}\cdot 6}=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\therefore \sin\angle ABC=\frac{3}{4}$

$R=\frac{\sqrt{22}}{2\sin\angle ABC}=\frac{\sqrt{22}}{2\cdot\frac{3}{4}}=\frac{2\sqrt{22}}{3}$

$\therefore$ (△ABC의 외접원의 넓이) $=(\frac{2\sqrt{22}}{3})^2\pi=\frac{88}{9}\pi$

15. 상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점] ①

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다. 우미분계수!

(나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

$g(x) = f(x)+k \,\vdots_{x=-1}\, -f(x) \,\vdots_{x=1}\, f(x)+k$ $\quad f'(0)=6$ 이므로, $g'(0)=-f'(0)=-6$

< $y=g(x)$ 그래프 개형 파악 >

i) (가)에 의해, $g(x)$는 $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$에서 감소하므로 $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$에서 $y=g(x)$는 빨간색과 같고, $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하여야 하므로, $g(1-)=g(1+)$이다.
따라서 $y=g(x)$의 $(-1,1)$에서의 그래프는 초록색과 같다.

ii) (나)에 의해 $g(-1)=13$이다.

< 식 작성 >

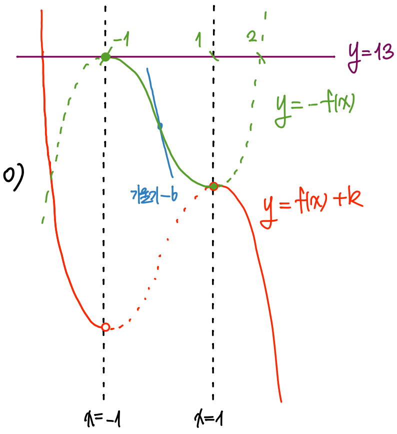
i) 삼차함수의 비율관계에 의해 $y=-f(x)$의 식을 작성하면,

$-f(x)=p(x+1)^2(x-2)+13 \ (p>0)$

$-f'(0)=-6$이므로 계산하면

$-3p=-6$, $p=2$

$\therefore f(x)=-2(x+1)^2(x-2)-13$



ii) $g(1)=-f(1)=f(1)+k$

$\therefore f(1)=-\frac{k}{2}=-5$, $k=10$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(-\frac{3}{2}\right)-13=\frac{27}{4}-13=-\frac{25}{4}$

따라서 $k+f\left(\frac{1}{2}\right)=10+\left(-\frac{25}{4}\right)=\frac{15}{4}$ 이다.

단답형

16. 방정식 $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] $\boxed{2}$

$\log_5(x^2-1)=\log_5 3 \quad (x>1)$

$x^2-1=3$, $\therefore x=2$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점] $\boxed{6}$

$f(x)=x^3+2x^2+3$

$f(1)=1+2+3$

$=6$

18. $\sum_{k=1}^{6}(k^2+2k)$의 값을 구하시오. [3점] $\boxed{133}$

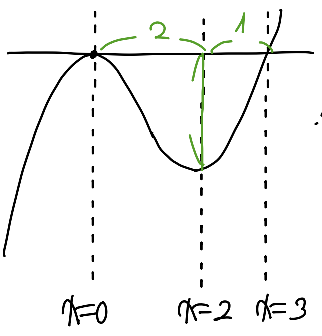
$$\sum_{k=1}^{6}(k^2+2k) = \frac{6\times7\times13}{6} + 2\times\frac{6\times7}{2}$$

$$= 91+42$$

$$= 133$$

19. 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=3x^3-9x^2+a$의 극댓값이 20일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오. [3점] $\boxed{8}$

$f(x)=3x^2(x-3)+a$



$y=a=20$

$\therefore$ ($f(x)$ 극솟값)

$= 20 - 3\times2^2\times1$

$= 20-12 = 8$

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $0\le x<4$일 때 $f(x)=-x^2+4x$이고,
> 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이다.

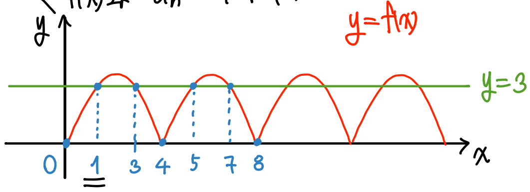
주기함수

방정식 $f(f(x))=f(x)$의 0 이상인 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 다음은 $a_{20}+a_{21}+a_{22}$의 값을 구하는 과정이다.

> 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근이 0, 3이므로
> 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근을 구하는 것은
> 방정식 $f(x)\times(f(x)-3)=0$의 실근을 구하는 것과 같다.
>
> $0\le x<4$일 때, 방정식 $f(x)\times(f(x)-3)=0$의
> 모든 실근은 0, $\boxed{(가)}$, 3이므로
> $a_1=0$, $a_2=\boxed{(가)}$, $a_3=3$
> 이다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로
> 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은
> 첫째항이 각각 0, $\boxed{(가)}$, 3이고
> 공차가 모두 $\boxed{(나)}$인 등차수열이다.
> 따라서 $a_{20}+a_{21}+a_{22}=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{85}$

〈$f(x)$와 a_n 구하기〉



$1 =$ (가) $\therefore p=1$

$f(x)=f(x+4)$ 이므로

$a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=3$
$a_4=4,\ a_5=5,\ a_6=7$
$\vdots$

$a_{3n-2}=4(n-1)$
$a_{3n-1}=4n-3$
$a_{3n}=4n-1$

$\Rightarrow$ 공차가 4 인 등차수열

(나) $\therefore q=4$

따라서 $a_{20}+a_{21}+a_{22}$

$= 25+27+28 = 80 =$ (다) $\therefore r=80$

따라서, $p+q+r = 1+4+80 = 85$

1. A는 어떤 곡선 위에 있는가?
2. 평가원은 왜 이렇게 냈는가? → "평행이동"

21. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$ 의 값과 $\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$ 의 값이
> 모두 존재한다.

$g(-1)$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{42}$

i) $\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)} = \lim_{x\to a} g(x)\times\frac{|f(x)|}{f(x)}$ 에 대하여,

$a=1, 2$ 일 때 $\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|}{f(x)} \neq \lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|}{f(x)}$ 이므로,

$g(1)=g(2)=0$, $\therefore g(x)=(x-1)(x-2)(x^2+ax+b)$
$= f(x)h(x)$ 라 하자.

ii) $\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{|f(x)h(x)-f(x)|}{f(x)h(x)}$

$= \lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|}{f(x)}\times\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$ 에 대하여,

$a=1, 2$ 일 때 $\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|}{f(x)} \neq \lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|}{f(x)}$ 이므로,

$h(x)-1$ 은 $(x-1)$, $(x-2)$ 의 인수를 가진다.

$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로

$h(x) = (x-1)(x-2)+1 = x^2-3x+3$ 이다.

$D= 3^2-4\cdot 3<0$ 이므로 $h(x)>0$ 이다.

따라서, $\lim_{x\to a}\frac{|f(x)h(x)-f(x)|}{f(x)h(x)}$ 는 모든 a에 대하여

값이 존재한다.

$g(x) = f(x)\cdot h(x) = (x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

따라서, $g(-1) = (-2)(-3)(7) = 42$

22. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자.

삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] $\boxed{38}$

<A의 좌표 구하기>

$2^x+\frac{k}{2} = k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2 \iff 2\cdot 2^{2x}+(4-k)\cdot 2^x-2k=0$

2　　-k
1　　2

$(2\cdot 2^x-k)(2^x+2)=0$

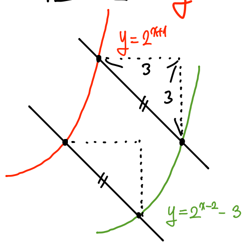
$2^x=\frac{k}{2}$, $x=\log_2 k-1$, $A(\log_2 k-1, k)$ 이다.

<'점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 $y=2^{x-2}-3$을 만난다'의 의미>

⇒ 지수·로그함수의 평행이동 떠올리기!

점 A의 좌표는 $(\log_2 k-1, k)$이고, 이때 $x=\log_2 k-1$, $y=k$

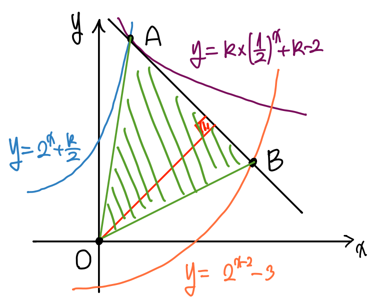
라고 하면 $y=2^{x+1}$이 되어 점 A는 $y=2^{x+1}$ 위의 점이다.



$y=2^{x+1}$을 x축으로 3, y축으로 3만큼

평행이동한 그래프가 $y=2^{x-2}-3$ 이므로

k의 값에 관계없이 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$ 이다.



$\overleftrightarrow{AB}$의 방정식은

$\overleftrightarrow{AB}$: $x+y=k+\log_2 k-1$

$\triangle OAB = 16 = \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times$(높이)

$\therefore$ (높이) $=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

$\frac{16\sqrt{2}}{3} = \frac{|k+\log_2 k-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$ $(k>1)$

$k+\log_2-1=\frac{32}{3}$, 따라서

$k+\log_2 k=\frac{35}{3}$, $p+q=38$

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.