해설

13.

[정답] ③ 15

[출제 의도]

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$ 에서

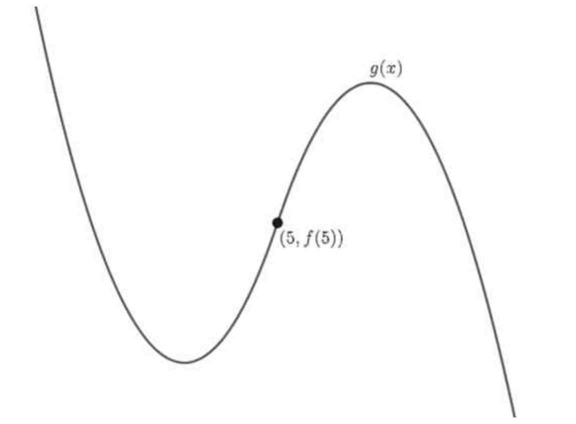
$\lim_{x\to k+}\frac{-f(x-k)+f(0)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$ 이고,

$-f'(0)=f'(k)$이다. $f'(x)$는 일차항의 계수가 1인 일차함수이므로 $f'(x)=x-\frac{k}{2}$ 이다.

(나)의 조건에서 $\int_1^9 g(x)+tx-kt-a\,dx=0$,

$\int_1^9 g(x)\,dx=\int_1^9 -tx+kt\,dx+8a$이다. 함수 $y=-tx+kt$는 모든 실수 t에 대하여 점 $(k,0)$를 지나고, 모든 실수 t에 대하여 $\int_1^9 -tx+kt\,dx$의 값이 같아야 하므로 $k=5$, $\int_1^9 -tx+kt\,dx=0$ 이다.

$x\ge k$에서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$를 x축 방향으로 5만큼 이동시키고 y축에 대하여 대칭한 후 평행이동하여 $x<k$에서 $f(x)$의 함수에 연결한 함수이므로 $g(x)$의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$가 점 $(5,f(5))$에 대하여 대칭인 함수이므로 $\int_1^9 g(x)\,dx=8f(5)$에서 $a=f(5)$이다.

조건 (가)에서 함수 $\int_0^x g(x)\,dx$는 $x=11$에서 극값을 가지므로 $\left(\int_0^x g(x)\,dx\right)'=g(x)$, $g(11)=0$이다. 함수 $g(x)$가 점 $(5,a)$에 대하여 대칭이므로 $g(-1)=f(-1)=2a$이다.

$f'(x)=x-\frac{5}{2}$, $f(5)=a$에서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+a$이고

$f(-1)=2a$에서 $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+a=2a$, $a=3$이다.

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3$, $f(a+k)=f(8)=32-20+3=15$