

2025년 5월 고3 전국연합학력평가

수학 영역(공통) 해설

mikanebi0@gmail.com

mikane.net

May 9, 2025

1. $(3^{1-\sqrt{2}})^2 \times 9^{\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

Solution. $3^{2-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}} = 9$

2. 함수 $f(x) = x^3 - 2x + 5$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

Solution. $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 3x^2 - 2 \Big|_{x=1} = 1$

3. 첫째항과 공비가 모두 양수 k 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_2(k^2 + 1) = 3a_4$$

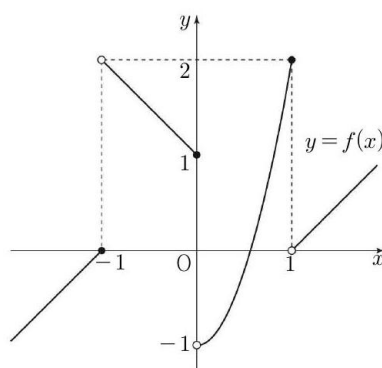
를 만족시킬 때, a_3 의 값은? [3점]

Solution. $a_n = k^n$ 이다. $\frac{a_4}{a_2} = k^2$ 이고 $k > 0$ 이므로,

$$k^2 + 1 = 3k^2 \implies k = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_n = 2^{-\frac{n}{2}}$$

따라서 $a_3 = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

Solution. $0 + (-1) = -1$

5. 함수 $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 2x + 5)$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값은? [3점]

Solution. $2(x^2 - 2x + 5) + (2x + 1)(x^2 - 2x + 5) \Big|_{x=2} = 2 \times 5 + 5 \times 2 = 20$

6. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin \theta \tan \theta + \cos \theta = 3$ 일 때, $\sin \theta - \tan \theta$ 의 값은? [3점]

Solution. $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ 임에 주목하자. 이에 따라

$$\sin \theta \tan \theta + \cos \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta = \frac{1}{\cos \theta} = 3$$

따라서 $\cos \theta = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이므로 $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \implies \tan \theta = -2\sqrt{2}$ 이다.

$$\sin \theta - \tan \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

7. 다항함수 $f(x)$ 가

$$f'(x) = x^2 - kx + (k - 1), \quad f(0) = 2$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않을 때, $f(3)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [3점]

Solution. 모든 실수 x 에 대하여 $f' \geq 0$ 이어야 하므로, 방정식 $x^2 - kx + k - 1$ 의 판별식

$$D = k^2 - 4k + 4 \leq 0 \iff k = 2$$

따라서 $k = 2$, $f(3) = \int_0^3 f'(x)dx + 2 = 5$

8. 부등식 $2^{|x|} + \frac{64}{2^{|x|}} \leq 20$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수는? [3점]

Solution. $A = 2^{|x|}$ 라 하면 $A \neq 0$ 이고, 주어진 부등식은

$$A + 64A^{-1} \leq 20 \iff A^2 - 20A + 64 \leq 0 \iff 4 \leq A = 2^{|x|} \leq 16 \iff 2 \leq |x| \leq 4$$

조건을 만족시키는 정수 x 의 개수는 6

9. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf(x) = ax^3 + 2x - 3 + \int_0^1 f'(t)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)dx$ 의 값은? (단, a 는 상수이다) [4점]

Solution. $x = 0$ 을 대입하면

$$0 = -3 + \int_0^1 f'(t)dt \implies f(1) - f(0) = 3$$

$f(x)$ 는 다항함수이므로, 양 변을 x 로 나누면

$$f(x) = ax^2 + 2$$

$f(0) = 2$ 이므로

$$f(1) = a + 2 = 5 \implies a = 3$$

따라서 $\int_0^2 f(x)dx = x^3 + 2x \Big|_0^2 = 12$

10. 모든 항이 자연수이고 공차가 같은 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k \times b_k} = \frac{n}{8n+4}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k)$ 의 값은? [4점]

Solution. 자연수 k 에 대하여,

$$\frac{1}{a_{k+1} \times b_{k+1}} = \frac{k+1}{8k+12} - \frac{k}{8k+4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(2k+3)(2k+1)} \right)$$

위 식에 $k=0$ 을 대입해도 $\frac{1}{a_1 \times b_1} = \frac{1}{12}$ 이므로 조건을 만족시킨다. 따라서 위 식은 음이 아닌 모든 정수 k 에 대해서 성립하고, 이에 따라 자연수 n 에 대하여

$$\frac{1}{a_n \times b_n} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \right)$$

따라서

$$a_n \times b_n = 4(2n-1)(2n+1)$$

이다. a_n, b_n 이 모든 항이 자연수이며 공차가 같은 등차수열임에 주목하자. 일반성을 잃지 않고, $a_n = 2(2n+1)$ 이라 가정해도 충분하다. 그러면, $b_n = 2(2n-1)$ 이며 $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^5 8k = 120$

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치 x 가

$$x = kt^3 - 6t^2 + t$$

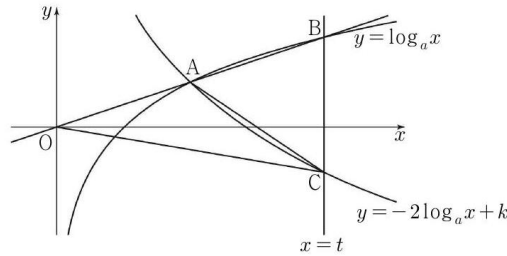
이다. 양수 k 에 대하여 시각 $t = k$ 에서 점 P의 속도가 1일 때, 시각 $t = 2k$ 에서 점 P의 가속도는? [4점]

Solution.

$$v(k) = x'(t) \Big|_{t=k} = 3k^2 - 12k + 1 = 1 \implies k = 2$$

$$a(2k) = a(4) = v'(t) \Big|_{t=4} = 36$$

12. 그림과 같이 세 상수 $a(a > 1), k, t$ 에 대하여 두 곡선 $y = \log_a x, y = -2\log_a x + k$ 가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x = t$ 가 두 곡선 $y = \log_a x, y = -2\log_a x + k$ 와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 직선 AB가 원점 O를 지나고 두 삼각형 OCA, ACB의 넓이가 2로 같을 때, $a \times k \times t$ 의 값은? (단, $k > 0$ 이고, t 는 점 A의 x 좌표보다 크다.) [4점]



Solution. $\triangle OCA + \triangle ACB = \triangle OCB$ 이므로,

$$\triangle OCA = \triangle ACB \implies \triangle ACB : \triangle OCB = 1 : 2$$

이다. 점 A의 x 좌표를 x_1 이라 하면, $\triangle ACB = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times (t - x_1)$, $\triangle OCB = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times t$ 에서

$$\triangle ACB : \triangle OCB = (x_1 - t) : t = 1 : 2 \implies x_1 = \frac{t}{2}$$

이다. 점 A는 주어진 두 곡선을 모두 지나므로

$$\log_a \frac{t}{2} = -2 \log_a \frac{t}{2} + k \implies k = 3 \log_a \frac{t}{2}$$

를 얻을 수 있다. 두 점 A, B가 원점을 지나는 한 직선 위에 있기에,

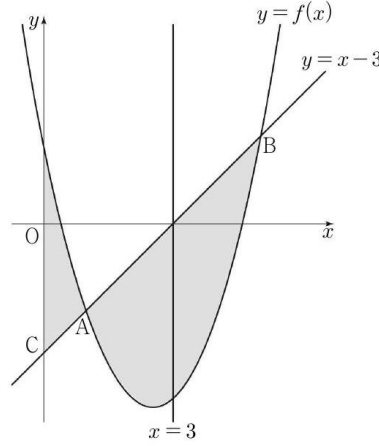
$$\frac{(\text{점 A의 } y\text{좌표})}{(\text{점 A의 } x\text{좌표})} = \frac{(\text{점 B의 } y\text{좌표})}{(\text{점 B의 } x\text{좌표})} \implies \frac{\log_a \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \frac{\log_a t}{t} \implies t = 4$$

$\overline{BC} = 3 \log_a t - k = 3 \log_a 2$ 임을 이용하면

$$\triangle ACB = \frac{1}{2} \times 3 \log_a 2 \times \frac{4}{2} = 3 \log_a 2 = 4 \implies a = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{따라서 } a \times k \times t = 2^{\frac{3}{2}} \times 3 \log_a \frac{4}{2} \times 2 = 16\sqrt{2}$$

13. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x - 3$ 이 x 좌표가 양수인 두 점 A, B에서 만난다. 직선 $y = x - 3$ 과 y 축이 만나는 점을 C라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 와 y 축 및 선분 AC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x = 3$ 이 이등분하고, $S_2 - 2S_1 = 6$ 일 때, $f(-1)$ 의 값은? (단, 점 A의 x 좌표는 3보다 작고, 점 B의 x 좌표는 3보다 크다.)



Solution. 점 $P(3, 0)$, 함수 $g(x) = f(x) - (x - 3)$ 이라 하고, 점 A의 x 좌표를 x_1 , 점 B의 x 좌표를 x_2 라 하자.

$$T_1 = (y = f(x), \overline{AP} \text{와 직선 } x = 3 \text{으로 둘러싸인 부분의 넓이})$$

$$T_2 = (y = f(x), \overline{PB} \text{와 직선 } x = 3 \text{으로 둘러싸인 부분의 넓이})$$

라 정의하면, 주어진 조건에 의해

$$T_1 = \int_{x_1}^3 |g(x)| dx = T_2 = \int_3^{x_2} |g(x)| dx, \quad T_1 + T_2 = S_2$$

이고, $g(x_1) = g(x_2) = 0$ 이기에 함수 $g(x)$ 는 $x = 3$ 을 기준으로 선대칭, 즉 상수 c 에 대하여

$$g(x) = x^2 - 6x + c$$

임을 어렵지 않게 알 수 있다.

$$S_2 - 2S_1 = 2(T_1 - S_1) = -2 \int_0^3 g(x) dx = 6$$

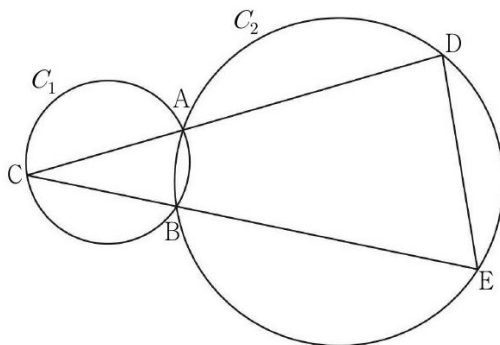
$$\Rightarrow \int_0^3 (x^2 - 6x + c) dx = 3c - 18 = -3 \Rightarrow c = 5$$

$$f(x) = g(x) + x - 3 = x^2 - 5x + 2 \text{ 이므로 } f(-1) = 8$$

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2 인 두 원 C_1, C_2 가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 원 C_1 위의 점 C와 원 C_2 위의 두 점 D, E에 대하여 세 점 C, A, D와 세 점 C, B, E가 각각 한 직선 위에 있다.

$$r_1 : r_2 = 1 : 2, \quad \overline{AC} = 3, \quad \overline{AD} = 5, \quad \overline{DE} = 4$$

일 때, 선분 CE의 길이는? [4점]



Solution. $\angle ABC + \angle ABE = \pi$ 이므로 $\sin \angle ABC = \sin \angle ABE$ 이다. 따라서

$$\overline{AC} : \overline{AE} = r_1 : r_2 = 1 : 2, \quad \overline{AC} = 3 \implies \overline{AE} = 6$$

삼각형 ADE의 세 변의 길이를 모두 알고 있으므로, 코사인법칙을 이용하여 $\cos \angle ADE$ 를 구할 수 있다.

$$\cos \angle ADE = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 - \overline{AE}^2}{2 \times \overline{AD} \times \overline{DE}} = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{코사인법칙에서, } \overline{CE} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 - 2 \times \overline{CD} \times \overline{DE} \times \frac{1}{8}} = \sqrt{64 + 16 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{1}{8}} = 6\sqrt{2}$$

15. 최고차항의 계수가 1 이고 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 인 사차함수 $f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\{g(x) - x\}\{g(x) - f(x)\} = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $\frac{g(-2)}{g(3)}$ 의 값의 합은? [4점]

(가) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ 의 값은 존재하지 않는다.

(나) $x \geq a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(-x) = -g(x)$ 를 만족시키는 실수 a 의 최솟값은 4이다.

Solution. 모든 실수 x 에 대하여

$$\{g(x) - x\}\{g(x) - f(x)\} = 0 \iff g(x) = x \text{ 또는 } g(x) = f(x)$$

이다. 임의의 실수 x 를 하나 잡자. $g(x)$ 는 연속함수이므로, $M > 0$ 이 존재하여 모든 양수 $0 < \varepsilon < M$ 에 대하여 다음 두 가지 상황 중 하나가 가능하려면, $x = f(x)$ 이어야만 한다.

(a) $g(x - \varepsilon) = f(x - \varepsilon)$ 그리고 $g(x + \varepsilon) = x + \varepsilon$

(b) $g(x - \varepsilon) = x - \varepsilon$ 그리고 $g(x + \varepsilon) = f(x + \varepsilon)$

위 두 상황 중 하나를 만족시키는 실수 x 의 집합을 A 라 하자. 방정식 $f(x) = x$ 는 많아도 네 개의 서로 다른 실근을 가지므로, $n(A) \leq 4$ 임을 알 수 있다.

(가) 조건은 $x = 2$ 에서 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않음을 의미한다. 따라서 $2 \in A$.

(나) 조건에서 $x \geq 4$ 이면 $g(-x) = g(x) \implies g(x) = x$ 일 수밖에 없음을 직관적으로 얻는다.

또한, $a < 4$ 일 때 $g(-x) \neq -g(x)$ 인 $x \in (a, 4)$ 가 적어도 하나 존재하므로, $-4 \in A$ 또는 $4 \in A$.

상수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f(2) = 2 \implies f(x) = x^2(x - 2)(x - a) + x$$

이고, $|a| = 4$ 임을 알 수 있다.

(i) $a = -4$ 인 경우

$$f(x) = x^2(x - 2)(x + 4) + x, \quad g(x) = \begin{cases} x & (x < -4) \\ f(x) & (-4 \leq x < 2) \\ x & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$\text{따라서 } \frac{g(-2)}{g(3)} = \frac{f(-2)}{3} = -\frac{34}{3}$$

(ii) $a = 4$ 인 경우

$$f(x) = x^2(x-2)(x-4) + x, \quad g(x) = \begin{cases} x & (x < 2) \\ f(x) & (2 \leq x < 4) \\ x & (x \geq 4) \end{cases}$$

$$\text{따라서 } \frac{g(-2)}{g(3)} = \frac{-2}{f(3)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{가능한 모든 } \frac{g(-2)}{g(3)} \text{의 값의 합은 } -\frac{34}{3} + \frac{1}{3} = -11$$

16. 방정식

$$\log_{\sqrt{3}}(x-3) = \log_3(5x-1)$$

을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

Solution. $x > 3, (x-3)^2 = 5x-1 \implies x = 10$

17. $\int_0^a (4x^2 - 3x)dx = \int_0^a (x^2 + x)dx$ 를 만족시키는 양수 a 의 값을 구하시오. [3점]

Solution.

$$\int_0^a (4x^2 - 3x)dx = \int_0^a (x^2 + x)dx \iff \int_0^a (3x^2 - 4x)dx = a^3 - 2a^2 = 0 \implies a = 2$$

18. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^5 (a_k + 3) = 30, \quad \sum_{k=1}^5 (2a_k + b_k) = 53$$

일 때, $\sum_{k=1}^5 b_k$ 의 값을 구하시오. [3점]

Solution. $\sum_{k=1}^5 (2a_k + b_k) - 2 \sum_{k=1}^5 (a_k + 3) = \sum_{k=1}^5 (b_k - 6) = -7$ 따라서 $\sum_{k=1}^5 b_k = 5 \times 6 - 7 = 23$

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$ 와 점 $(1, 0)$ 에서 만난다. $f(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

Solution. 접선의 방정식은 $y = 1 - x$ 이므로, $f(x) = x^2(x-1) + 1 - x$ 이고, $f(3) = 18 - 2 = 16$

20. 양수 t 에 대하여 $[0, \frac{2}{t}]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \sqrt{3} \sin(t\pi x), \quad g(x) = -3 \cos(t\pi x)$$

가 있다. $0 < k < \frac{2}{t}$ 인 상수 k 에 대하여 $f(k) = g(k) = 3k$ 일 때, $60(t+k)$ 의 값을 구하시오. [4점]

Solution. $\sqrt{3} \sin(t\pi k) = -3 \cos(t\pi k) \Rightarrow \tan(t\pi k) = -\sqrt{3}$ 이고,

$$f(k) = g(k) = 3k > 0 \Rightarrow \sin(t\pi k) > 0 \Rightarrow t\pi k = \frac{2}{3}\pi$$

$$k = \frac{f(k)}{3} = \frac{\sqrt{3} \sin(\frac{2}{3}\pi)}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

따라서 $60(t+k) = 30 + 80 = 110$

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 양수 a 와 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(t) + g(t-4)$ 는 $t = 0$ 과 $t = a$ 에서만 불연속이다.

$f(a)$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

Solution. 관찰을 통해 다음 사실을 어렵지 않게 알 수 있다.

Claim. $f(x)$ 는 두 극값 0, 4를 가지고, $a = 8$ 이다.

상수 $c \neq 0$ 에 대하여 다음의 두 경우가 존재한다.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & f(x) = x^2(x-3c) \Rightarrow f'(2c) = 0 \\ & \Rightarrow f(2c) = -4c^3 = 4 \Rightarrow c = -1. \\ & f(4) = x^2(x+3) \Big|_{x=8} = 64 \times 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & f(x) = x(x-3c)^2 \Rightarrow f'(c) = 0 \\ & \Rightarrow f(c) = 4c^3 = 4 \Rightarrow c = 1. \\ & f(4) = x(x-3)^2 \Big|_{x=8} = 200 \end{aligned}$$

$f(a)$ 의 최솟값은 200

22. 모든 항이 실수인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \times a_2 > 0$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 & (a_n \leq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_3 = a_5$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Solution.

Claim. $a_1, a_2 > 0$

Proof. $a_1 < 0$ 이라 하면 $a_2 = (a_1)^2 > 0$ 이므로 모순이다. ($a_1 = 0$ 인 경우는 자명하다.) □

$a_1 = a$ 라 하자. 그러면,

- $a_1 = a > 0$
- $a_2 = -2a + 3 > 0 \implies 0 < a < \frac{3}{2}$
- $a_3 = 4a - 3 \in (-3, 3)$

을 얻는다. a_3 의 부호는 결정되지 않았기에, a_4 의 값을 알 수 없다. $a_3 = b \in (-3, 3)$ 이라 하자. 그러면 $a_3 = b = 4a - 3 \implies a = a_1 = \frac{b+3}{4}$

(i) $0 < b < 3$ 인 경우

$$a_4 = 3 - 2b \in (-3, 3)$$

(i)-1 $a_4 = 3 - 2b > 0 \implies 0 < b < \frac{3}{2}$ 인 경우

$$a_5 = 4b - 3 = a_3 = b \implies b = 1$$

(i)-2 $a_4 = 3 - 2b \leq 0 \implies \frac{3}{2} \leq b < 3$ 인 경우

$$a_5 = (2b - 3)^2 = a_3 = b \implies b = \frac{9}{4}$$

(ii) $-3 < b < 0$ 인 경우

$$a_4 = b^2 > 0, a_5 = 3 - 2b^2 = a_3 = b \implies b = -\frac{3}{2}$$

(iii) $b = 0$ 인 경우

$$a_3 = a_5 = 0 \implies b = 0$$

$a = a_1$ 와 $b = a_3$ 의 관계 $a = \frac{b+3}{4}$ 에 주목하면,

$$(\text{모든 } a_1 \text{의 값의 합}) = \frac{(\text{모든 } b \text{의 값의 합}) + 3 \times 4}{4} = \frac{\frac{7}{4} + 3 \times 4}{4} = \frac{55}{16} \implies 55 + 16 = 71$$