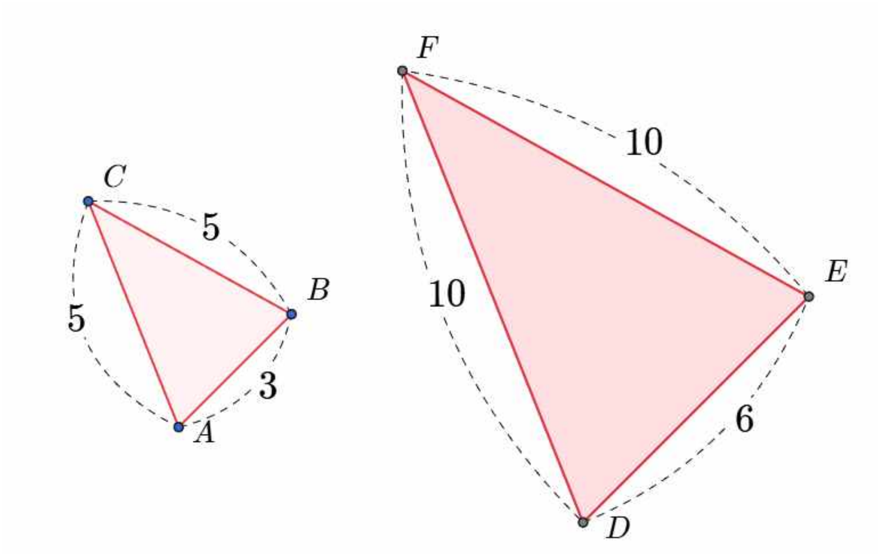
CHECK 04 **삼각형의 닮음조건**

삼각형의 닮음조건에는 총 3가지가 있습니다.

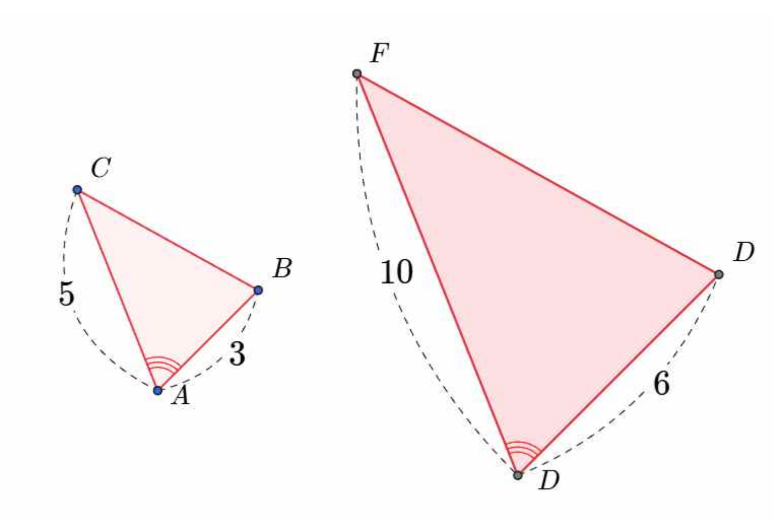
개념요약

1) **SSS 닮음** : **세 대응변의 길이비**가 같다면, 닮음이다.
2) **SAS 닮음** : **두 대응변의 길이비**와 **끼인각**이 같다면, 닮음이다.
3) **AA 닮음** : **두 대응각**의 크기가 같다면, 닮음이다.

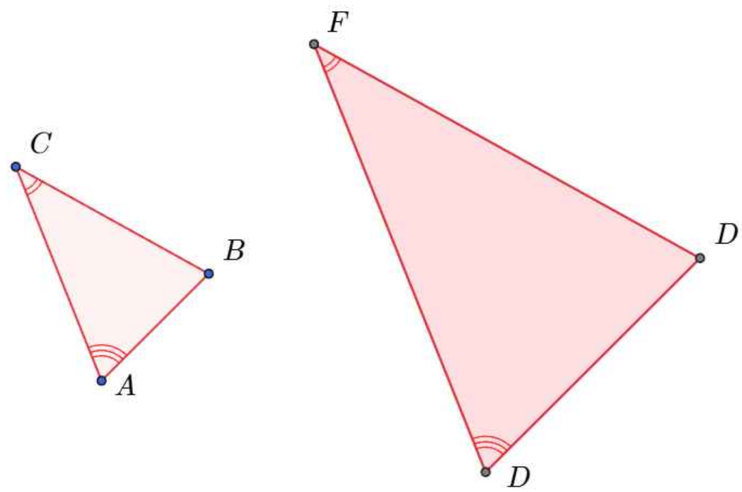
하나씩 살펴볼까요?



세 대응변의 길이비가 모두 같다면, **SSS 닮음**이라고 합니다.
오른쪽 삼각형에서 모든 변이 2배 길어졌죠? 따라서 이 경우 닮음비는 $1:2$이에요.



두 대응변의 길이비가 같고, **끼인각**이 같다면, **SAS 닮음**이라고 합니다.
마찬가지로 닮음비는 $1:2$가 됩니다.

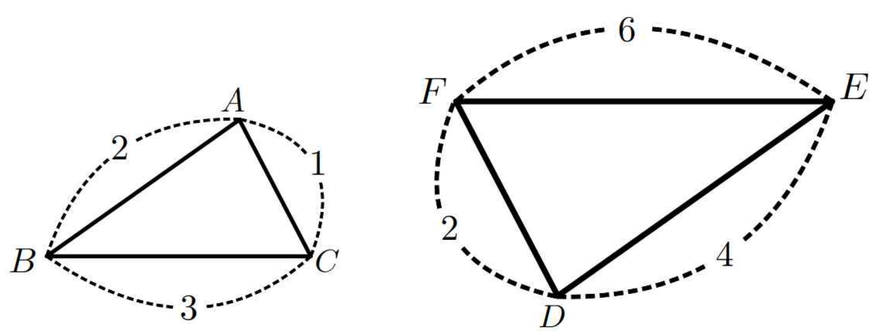


2개의 대응각이 같다면 AA **닮음**이라고 합니다.
앞으로 여러분이 가장 자주 활용하게 될 닮음조건이에요.

생각해보기

삼각형의 내각의 합은 180° 이에요.
2개의 각이 서로 같다면, 나머지 각도 같을 수 밖에 없겠죠?
그래서 AAA가 아니라 AA 닮음이라고 씁니다.

EXAMPLE



두 삼각형은 닮음이고, 기호로 쓰면 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$이에요.
점 A – 점 D, 점 B – 점 F이 대응점이 됩니다.
$\overline{AB}$ – $\overline{DF}$, $\overline{BC}$ – $\overline{FE}$가 대응변이 되고, $\triangle ABC$ 와 $\triangle DEF$의 닮음비는 $1:2$이에요.

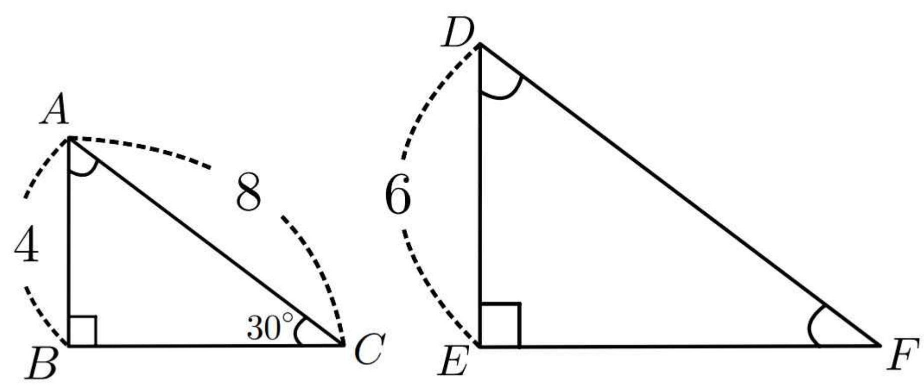
닮음비를 $2:1$이라고 거꾸로 쓰면, $\triangle ABC$ 가 $\triangle DEF$ 보다 2배 크다는 의미가 됩니다.
의미가 정반대가 돼 버리는 거예요.

CHECK 05 닮음의 활용

닮은 도형에서 눈여겨봐야 할 것은 바로 닮음비입니다.
닮음비를 이용하면 선분의 길이를 구할 수 있어요. 이를 활용해서 예제 몇 가지를 풀어 봅시다.

EXAMPLE

$\triangle ABC$ 와 $\triangle DEF$ 는 서로 닮은 관계이다. $\overline{DF}$ 와 $\angle F$ 의 크기를 구하시오.



문제에서 두 삼각형이 닮음이라고 주어졌네요.

두 삼각형의 닮음비를 구해 봅시다. 우리가 알고 있는 대응변은 $\overline{AB}$ 와 $\overline{DE}$ 가 있습니다.

$\overline{AB}$ 와 $\overline{DE}$ 의 길이비는 $2:3$이므로, **두 도형의 닮음비도 $2:3$입니다.**

$\overline{AC}$ 와 $\overline{DF}$ 의 길이비도 $2:3$이겠네요.

$2:3=\overline{AC}:\overline{DF}$, 이 비례식을 풀면 $\overline{DF}=12$가 됩니다.

$\angle F$ 의 크기는 어떻게 구할까요?

닮은 도형은 대응각의 크기가 같습니다. (AA 닮음을 생각하면 돼요.)

그래서 $\angle F$ 는 $\angle C$와 크기가 같아요. 그럼 $30°$ 가 답이겠네요.

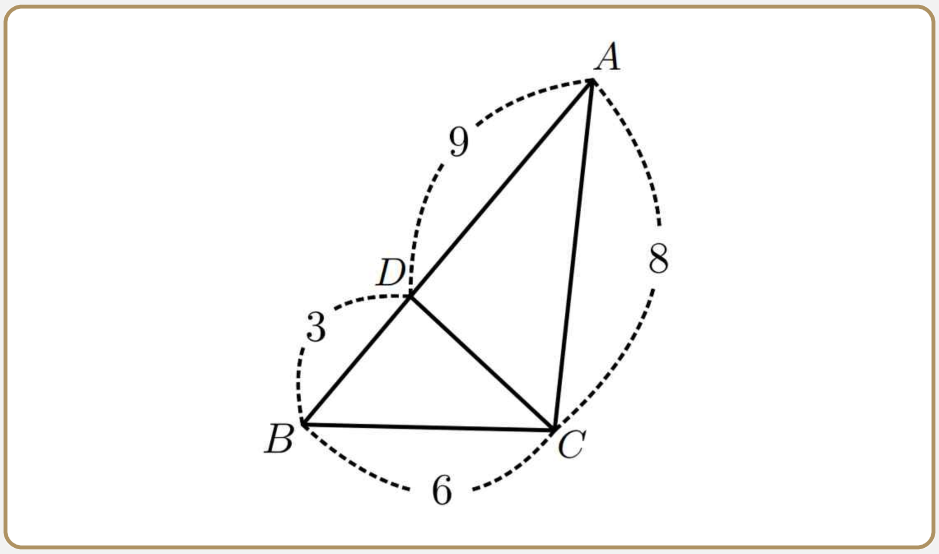
개념요약

닮은 평면도형은 대응각의 크기가 같다!

EXAMPLE

이번엔 닮음 찾기 문제입니다.

$\triangle ABC$와 닮은 삼각형을 구하시오.



이렇게 여러 삼각형이 겹쳐 있는 경우에는, **공통인 각**을 보면 **닮음의 힌트**를 얻을 수 있습니다.

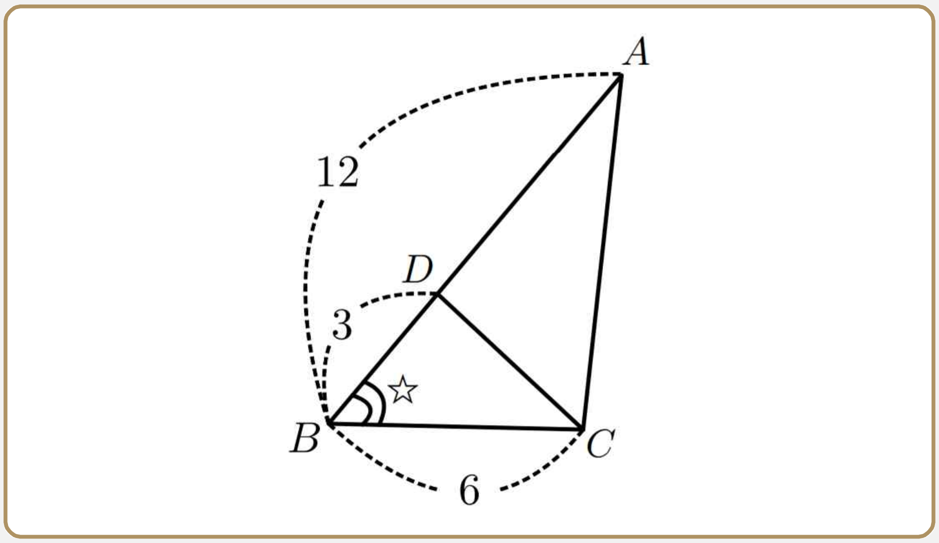
$\angle A$는 $\triangle ABC$ 와 $\triangle ADC$ 가 공통으로 쓰고 있네요.

마찬가지로 $\angle B$는 $\triangle ABC$ 와 $\triangle CBD$ 가 공통으로 쓰고 있습니다.

$\triangle CBD$ 를 볼까요? $\overline{CB}=6$, $\overline{BD}=3$이죠.

다음으로 $\triangle ABC$ 를 본다면, $\overline{AB}=12$, $\overline{CB}=6$이 되겠네요.

비율이 같은 거 보이시나요? $\overline{AB}:\overline{CB}=2:1$이고, $\overline{CB}:\overline{DB}=2:1$이네요.



두 변의 길이비가 같고 **끼인 각**이 같으니 SAS 닮음이죠?

따라서 $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ 라는 결론이 나옵니다.

이때 대응점 순서대로 써야 한다는 점 꼭 기억합시다!

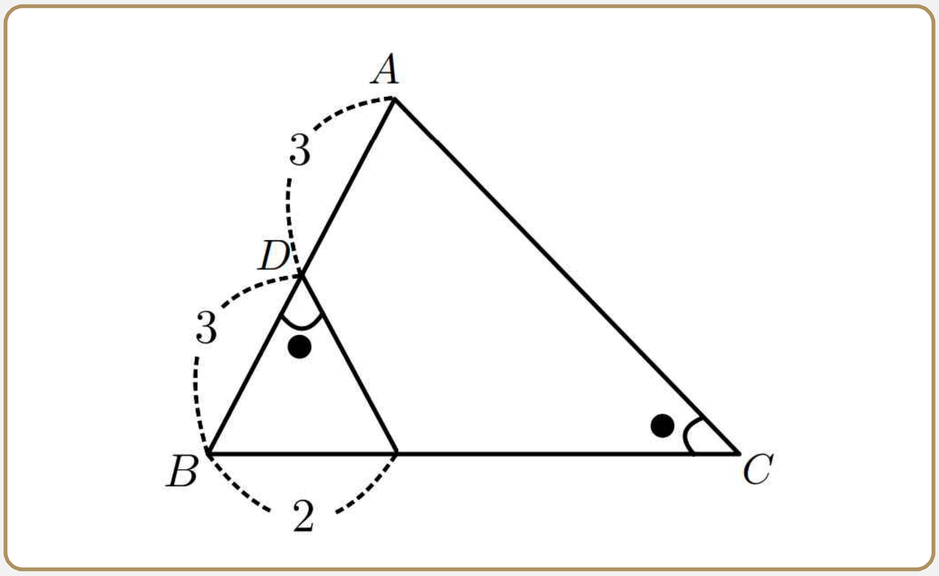
APOLO TIPS

같은 기호로 표시된 각은 크기가 같다는 뜻이에요.

EXAMPLE

닮음 찾기 문제 하나 더 풀어 봅시다.

$\triangle ABC$ 와 닮은 삼각형을 구하시오. (단, $\angle ACB = \angle BDE$이다.)



마찬가지로 여러 삼각형이 겹쳐 있는 경우, **닮음의 힌트를 찾기 위해 공통인 각을 살펴봅시다.**

$\triangle BDE$ 와 $\triangle ACB$에서, $\angle B$ 는 공통이죠?

$\angle ACB$ 와 $\angle BDE$은 크기가 같다네요.

같은 각 2개가 나왔으니 **AA 닮음** 상황이 만들어집니다.

따라서 $\triangle ABC \backsim \triangle BED$ 라는 결론이 나옵니다.

APOLO TIPS

크기가 같은 각 2개만 찾으면 AA닮음 상황이 만들어지기 때문에,

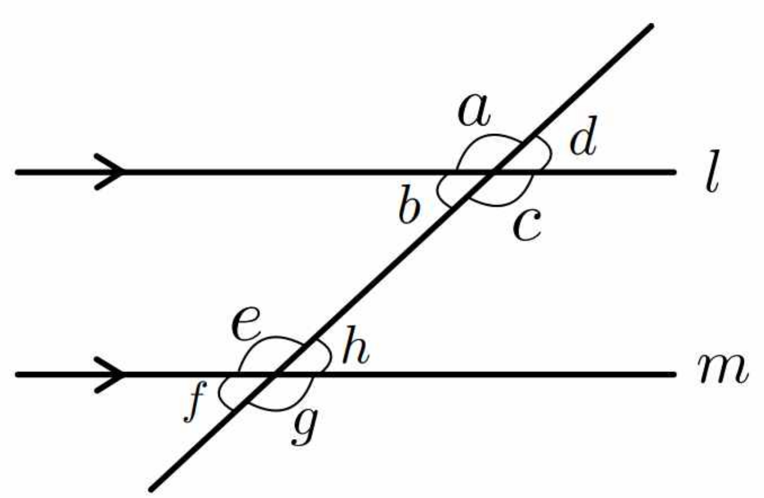
다른 두 닮음조건보다 AA닮음이 자주 나와요.

SSS, SAS 닮음은 길이비를 따져야 해서 복잡하거든요.

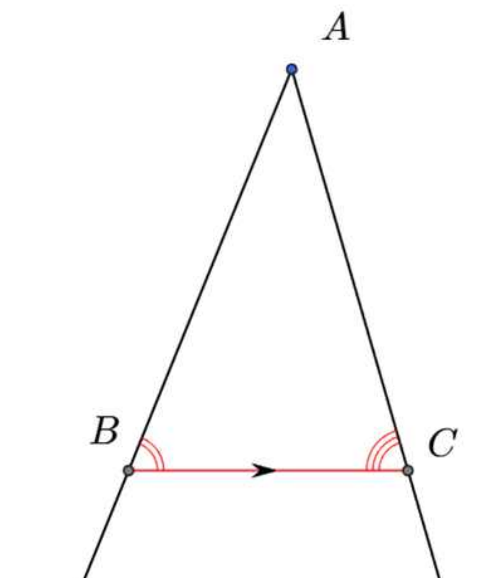
CHECK 06 평행선과 AA닮음

삼각형의 **두 각이 같으면 AA 닮음** 상황이 만들어져요.
크기가 같은 각 2개만 찾으면 닮음이 되기 때문에, 여러분들이 자주 쓰게 될 성질입니다.

앞서 배운 평행선의 성질 기억나시나요?

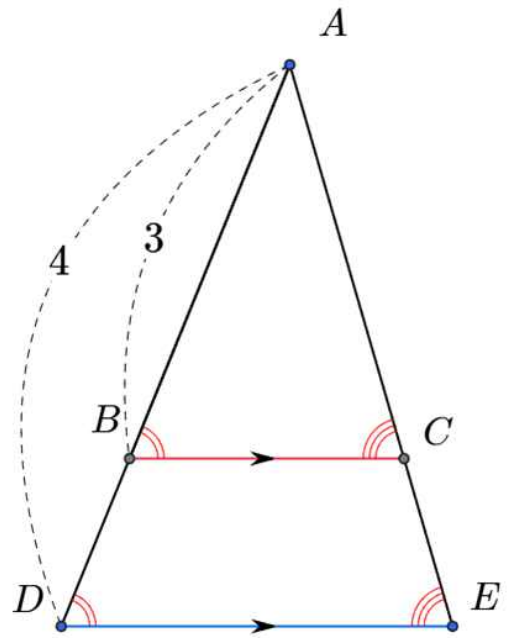


우선 **맞꼭지각**은 항상 같고요, 평행선에서는 **동위각**과 **엇각**의 크기도 같습니다.
그래서 같은 각들이 엄청 많이 나와요.
이를 이용해서 AA **닮음** 삼각형을 찾을 수 있습니다.

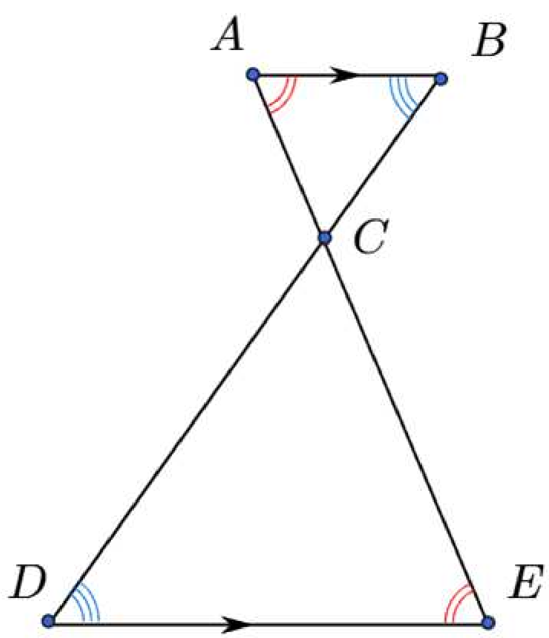


$\triangle ABC$ 와 $\triangle ADE$ 를 봅시다. 이때 $\overline{BC}$ 와 $\overline{DE}$ 는 평행이에요.
$\angle B$ 와 $\angle D$ 는 **동위각**으로 같아요.
마찬가지로 $\angle C$ 랑 $\angle E$ 도 **동위각**이라서 같습니다.
(앞서 설명했듯, 같은 기호로 표시된 각은 크기가 같다는 뜻이에요.)

크기가 같은 각 2**개**가 나왔으니, **AA 닮음**을 찾을 수 있겠죠?
대응점을 고려하면 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$라고 할 수 있겠네요.



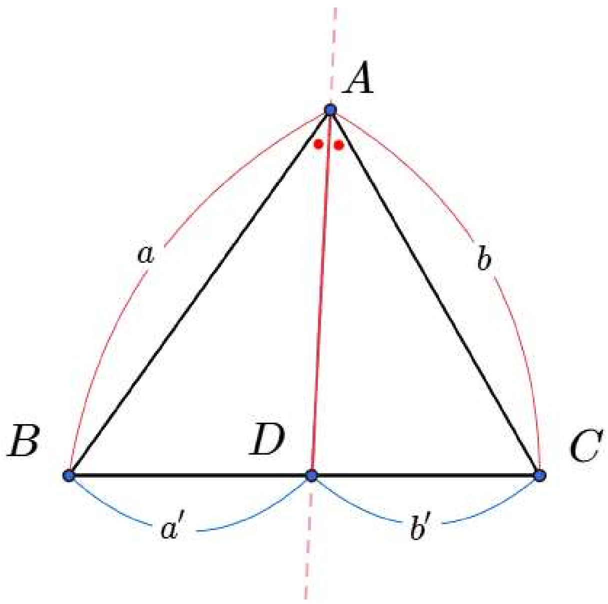
여기서 한 걸음 더 나아가서, 문제에서 이렇게 길이를 줬다면,
$\triangle ABC$ **와** $\triangle ADE$ **의 닮음비**가 $3:4$라는 것까지 파악할 수 있겠네요.



동위각을 썼으니, 이제는 **엇각** 차례입니다.
$\angle A$와 $\angle E$는 **엇각**이라서 크기가 같습니다.
$\angle B$와 $\angle D$도 크기가 같겠네요.
크기가 같은 각 2개가 나왔으니 **AA 닮음**을 찾을 수 있습니다.
대응점 순서를 생각하면 $\triangle CAB \backsim \triangle CED$라고 쓸 수 있겠네요.

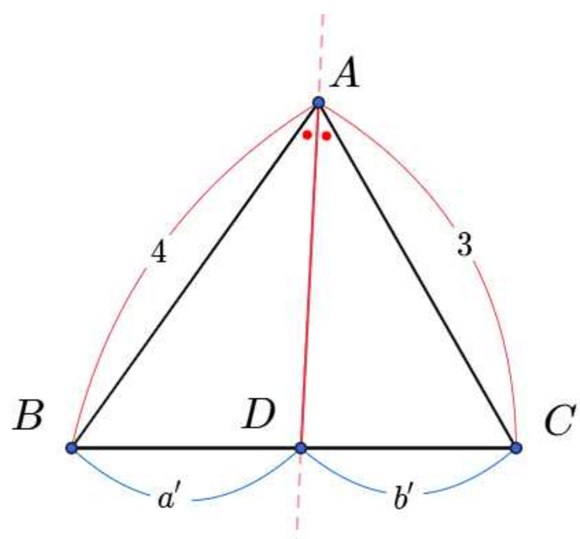
CHECK 07 각의 이등분선과 비례식

닮음을 활용한 삼각형의 공식을 배워 볼게요.
각의 이등분선과 **선분의 길이**가 나온다면 이 공식을 활용하기 좋아요.



먼저 **내각의 이등분선**입니다.
$\triangle ABC$ 를 볼게요. 삼각형의 $\angle A$의 이등분선이 점선으로 나와 있네요.
이 이등분선이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 D 라고 할게요.
이때, $a : b = a' : b'$가 성립합니다.

EXAMPLE

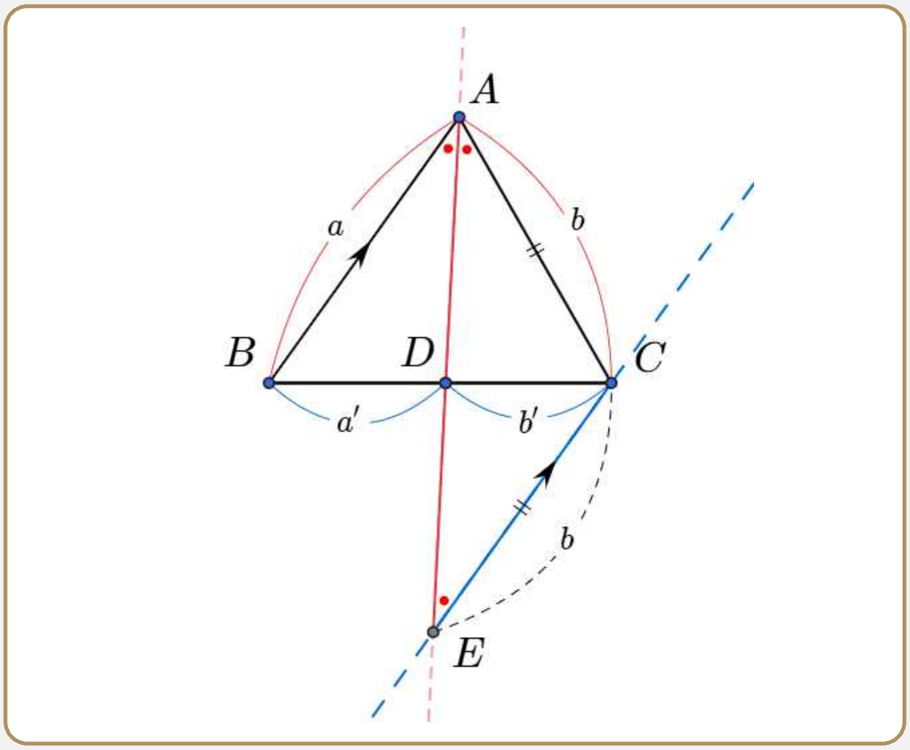


예를 들어, 만약 $a=4$이고, $b=3$이라면,
$a' : b' = 4 : 3$이 되겠네요.

생각보다 자주 쓰는 공식입니다. 많은 학생이 이 공식을 까먹더라고요.
‘어, 내각의 이등분선이 나왔네. 이 공식 쓸 수 있나?’라는 생각을 떠올려보세요.

이 공식의 증명은 크게 중요하지는 않지만, 내신 시험에 나올 수 있으니 익혀두는 것도 좋아요.
(이등변삼각형 관련 내용이 나옵니다. 이해가 안 된다면 뒤에 나올 이등변삼각형을 배우고 오세요.)

내각의 이등분선 공식 증명



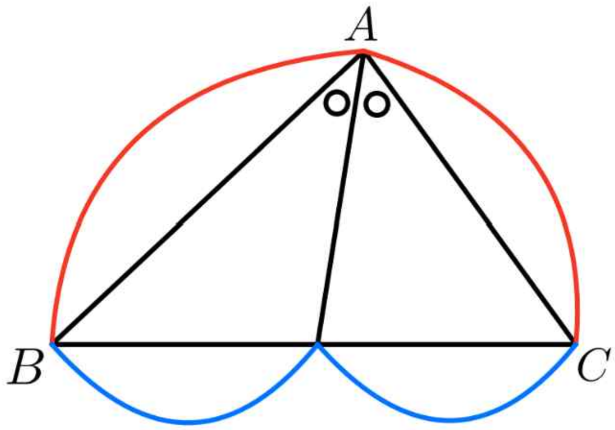
$\overline{AB}$ 와 평행이고 점 C 를 지나는 직선을 그립니다.
이 점선과, 각의 이등분선이 만나는 점을 찾습니다. 이 점을 E 라고 부를게요.

$\angle BAD$ 와 $\angle CAD$ 는 같습니다. 각이 이등분됐으니까요.
그리고 $\angle BAD$ 와 $\angle DEC$ 는 엇각으로 같습니다.
따라서, $\triangle ACE$ 는 이등변삼각형이고,
$\overline{AC}$ 와 $\overline{EC}$ 의 길이는 b로 같습니다.

선분 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CE}$ 가 평행이기 때문에,
엇각의 성질에 의하여, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ECB$ 는 AA 닮음입니다.

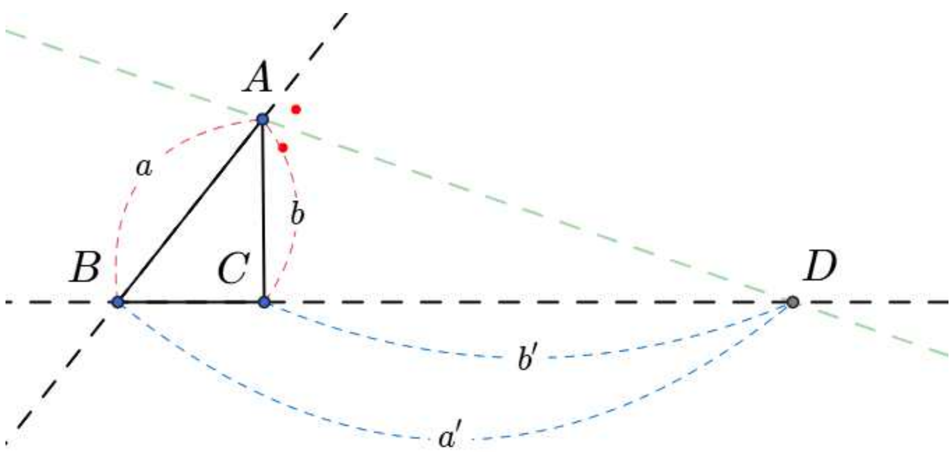
닮음비를 활용하면 $a : b = a' : b'$가 됩니다.

APOLO TIPS



저는 이 공식을 **하트 공식**이라고 부릅니다.
볼록볼록 튀어나온 녀석들이 뒤집힌 하트처럼 생겨서요.

어떤 학생은 짱구 엉덩이 공식이라고 하더라고요.
공공장소에서 부르기 민망하니까 조심합시다.



이번에는 **외각의 이등분선**을 살펴봅시다.
$\triangle ABD$ 에서 $\angle A$의 외각을 볼게요. $\angle A$의 외각을 이등분하는 선을 그어 봅시다.
점선이 $\overline{BC}$ 의 연장선과 만나는 점을 D 라고 한다면, $a : b = a' : b'$**이에요.**

내각 이등분선의 공식보다는 덜 자주 나오는데, 그래도 종종 나오니 기억합시다.
'외각의 이등분선? 이 공식 쓸 수 있나?' 라는 생각을 가져봅시다.