

2026 이동훈 기출 <https://atom.ac/books/12829>

오르비 <https://orbi.kr/>

실수 전체의 집합에서 이제도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 와 두 상수 a, b 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^b$ 의 값은? [4점]¹⁾(2026(6)-미적분28)

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$(f(x))^5 + (f(x))^3 + ax + b = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$$

이다.

(나) $f(-3)f(3) < 0, f'(2) > 0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$

② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

④ $e^{-\frac{4}{3}}$

⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

아래는 풀이입니다.

1) [풀이1]

조건 (나)에서 사잇값 정리에 의하여

$$f(\alpha) = 0 \text{이고, } -3 < \alpha < 3 \text{인}$$

α 가 적어도 하나 존재한다. $\dots (*)$

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} & (f(x))^5 + (f(x))^3 \\ &= \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - (ax + b) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{7}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} & 5(f(x))^4 f'(x) + 3(f(x))^2 f'(x) \\ &= \frac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}} - a \end{aligned} \quad \dots \textcircled{8}$$

다시 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} & 20(f(x))^3 (f'(x))^2 + 5(f(x))^4 f''(x) \\ &+ 6f(x)(f'(x))^2 + 3(f(x))^2 f''(x) \\ &= f(x) \times \{20(f(x))^2 (f'(x))^2 + 5(f(x))^3 f''(x) \\ &+ 6(f'(x))^2 + 3f(x)f''(x)\} \\ &= \frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{9}$$

(비로소 두 상수 a, b 가 소거되었다.)

$\textcircled{9}$ 에서 양변을 0으로 두면

$$\begin{aligned} & f(x) \times \{20(f(x))^2 (f'(x))^2 + 5(f(x))^3 f''(x) \\ &+ 6(f'(x))^2 + 3f(x)f''(x)\} = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

이때, 방정식 $f(x) = 0$ 의 해집합을 P 라고 하면

($(*)$ 에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 적어도 한 개 이상의 실근을 갖는다.)

$$-2 \in P \text{ 또는 } 1 \in P$$

이고, 집합 P 는 $-2, 1$ 외의 실수를 원소로 갖지 않는다.

따라서

$$P = \{-2\} \text{ 또는 } P = \{1\} \text{ 또는 } P = \{-2, 1\}$$

$1 \in P$ 라고 가정하고, ㉠에 $x = 1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} & 5(f(1))^4 f'(1) + 3(f(1))^2 f'(1) \\ &= \frac{2}{3} - a, \text{ 즉 } 0 = \frac{2}{3} - a, \quad a = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

㉡에 $x = 2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} & 5(f(2))^4 f'(2) + 3(f(2))^2 f'(2) \\ &= \underbrace{\{5(f(2))^4 + 3(f(2))^2\}}_{0 \text{ 또는 } +} f'(2) \\ &= \frac{10}{17} - \frac{2}{3} < 0 \text{에서 } f'(2) < 0 \end{aligned}$$

그런데 이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $1 \notin P$ 이고, $P = \{-2\}$

(이때, (*)의 α 의 값이 유일하게 결정된다.)

㉠에 $x = -2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} & 5(f(-2))^4 f'(-2) + 3(f(-2))^2 f'(-2) \\ &= -\frac{2}{3} - a, \text{ 즉 } 0 = -\frac{2}{3} - a, \quad a = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

이때, ㉡에 $x = 2$ 를 대입하면 좌변이 양수이므로

$f'(2) > 0$ 임을 보일 수 있다.

㉢에 $x = -2$ 를 대입하면

$$(f(-2))^5 + (f(-2))^3 = \ln \frac{9}{2} - \frac{4}{3} - b, \text{ 즉}$$

$$0 = \ln \frac{9}{2} - \frac{4}{3} - b, \quad b = \ln \frac{9}{2} - \frac{4}{3}$$

$$\therefore a \times e^b = -\frac{2}{3} \times e^{\ln \frac{9}{2} - \frac{4}{3}} = -\frac{2}{3} \times \frac{9}{2} \times e^{-\frac{4}{3}}$$

$$= -3e^{-\frac{4}{3}}$$

답 ①

[참고1]

집합의 포함관계, 연산의 관점에서 풀이 과정을 다시 생각해보자.

$$\textcircled{A}: (f(x))^3 \{(f(x))^2 + 1\}$$

$$= \ln \left(x^2 + x + \frac{5}{2} \right) - (ax + b)$$

$$\textcircled{B}: (f(x))^2 f'(x) \{5(f(x))^2 + 3\}$$

$$= \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} - a$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\ominus}: & f(x) \times \{20(f(x))^2(f'(x))^2 + 5(f(x))^3 f''(x) \\ & + 6(f'(x))^2 + 3f(x)f''(x)\} \\ & = \frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

다음의 필요충분조건이 성립한다.

$$\textcircled{\ominus}: f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - (ax + b) = 0$$

$$\textcircled{\ominus}: f(x) = 0 \text{ 또는 } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}} - a = 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\ominus}: & f(x) = 0 \text{ 또는} \\ & 20(f(x))^2(f'(x))^2 + 5(f(x))^3 f''(x) \\ & + 6(f'(x))^2 + 3f(x)f''(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} = 0 \end{aligned}$$

두 방정식

$$f'(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} & 20(f(x))^2(f'(x))^2 + 5(f(x))^3 f''(x) \\ & + 6(f'(x))^2 + 3f(x)f''(x) = 0 \end{aligned}$$

의 해집합을 각각 Q , R 이라고 하면

$$\textcircled{\ominus}: P \Leftrightarrow \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - (ax + b) = 0$$

$$\textcircled{\ominus}: P \cup Q \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}} - a = 0$$

$$\textcircled{\ominus}: P \cup R = \{-2, 1\}$$

$\textcircled{\ominus}$ 에서 $P \subset \{-2, 1\}$ 이므로

$$P = \{-2\} \text{ 또는 } P = \{1\} \text{ 또는 } P = \{-2, 1\}$$

$$\textcircled{\ominus}+(\text{나})\text{에서 } 1 \notin P \text{이므로 } P = \{-2\}, a = -\frac{2}{3}$$

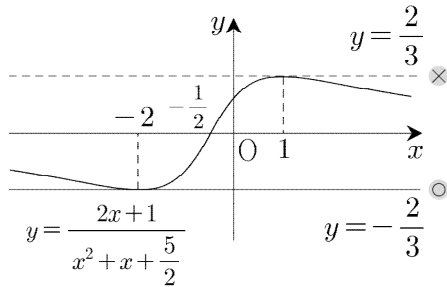
$$\text{이를 } \textcircled{\ominus}\text{에 대입하면 } b = \ln\frac{9}{2} - \frac{4}{3}$$

$\textcircled{\ominus}$, $\textcircled{\ominus}$, $\textcircled{\ominus}$ 의 오른쪽에서 주어진 세 방정식의 해집합은 모두 집합 P 를 포함하고 있으므로 두 상수 a , b 의 값을 구할 수 있었다. (다시 말하면 세 개의 항등식에서 미정계수의 결정을 한 것이다.) 이런 이유로 (가)에서 주어진 등식을 두 번 미분한 것이다.

$a = -\frac{2}{3}$ ($a \neq \frac{2}{3}$)임을 다음과 같이 보일 수 있다.

곡선 $y = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$ 과 직선 $y = a$ 를 한 평면 위에 그리면 다음과 같다.

(이때, 곡선은 점 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이다.)



$a = \frac{2}{3}$ 이면

$$\begin{aligned} \textcircled{1}: f'(x) \underbrace{\{5(f(x))^4 + 3(f(x))^2\}}_{0 \text{ 또는 } +} \\ = \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}}_{\text{곡선}} - \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{직선}} \leq 0 \end{aligned}$$

에서 $f'(x) \leq 0$, 즉 $f'(2) \leq 0$

이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a = -\frac{2}{3}$ 이면

$$\begin{aligned} \textcircled{1}: f'(x) \underbrace{\{5(f(x))^4 + 3(f(x))^2\}}_{0 \text{ 또는 } +} \\ = \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}}_{\text{곡선}} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{직선}} \geq 0 \end{aligned}$$

에서 $f'(x) \geq 0$

(단, 등호는 $x = -2$ 일 때 성립한다.)

즉, $f'(2) > 0$

이는 조건 (나)를 만족시킨다.

$$\therefore a = -\frac{2}{3}$$

[풀이2]

함수 $f(x)$ 가 이계도함수를 가지므로

함수 $f'(x)$ 는 미분가능하고, 연속이다.

함수 $f'(x)$ 가 연속임을 이용하여 문제를 해결하자.

조건 (나)에서 사잇값 정리에 의하여

$$f(\alpha) = 0 \text{이고, } -3 < \alpha < 3 \text{인}$$

α 가 적어도 하나 존재한다. $\dots(*)$

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} & (f(x))^5 + (f(x))^3 \\ &= \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - (ax + b) \end{aligned} \quad \dots\textcircled{7}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} & 5(f(x))^4 f'(x) + 3(f(x))^2 f'(x) \\ &= \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} - a \end{aligned} \quad \dots\textcircled{8}$$

정리하면

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-ax^2 + (2-a)x + 1 - \frac{5}{2}a}{(f(x))^2 \{5(f(x))^2 + 3\} \left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)} & (f(x) \neq 0) \\ p & (f(x) = 0) \end{cases}$$

(단, p 는 상수)

$(*)$ 의 α 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f'(x) = p (= f'(\alpha))$$

이면 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 연속이다.

극한 $\lim_{x \rightarrow \alpha} f'(x)$ 이 수렴할 필요충분조건은

$$(\text{분자}) = -ax^2 + (2-a)x + 1 - \frac{5}{2}a = -a(x-\alpha)^2$$

이다.

(이때, 모든 실수 x 에 대하여

$$5(f(x))^2 + 3 > 0, \quad x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$$

임을 이용한 것이다.)

이차방정식

$$-ax^2 + (2-a)x + 1 - \frac{5}{2}a = 0 \quad \dots\textcircled{9}$$

은 중근을 가지므로

$$(\text{판별식}) = (2-a)^2 - 4(-a)\left(1 - \frac{5}{2}a\right) = 0$$

$$\text{즉, } -9a^2 + 4 = 0, \quad a = \pm \frac{2}{3}$$

우선 $a = \frac{2}{3}$ 라고 가정하자.

㉠에 $x = 2$ 를 대입하면

$$\underbrace{\{5(f(2))^4 + 3(f(2))^2\}}_{0 \text{ 또는 } +} f'(2) \\ = \frac{10}{17} - \frac{2}{3} < 0$$

에서 $f'(2) < 0$ 이므로 이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$\therefore a = -\frac{2}{3}$$

마찬가지의 방법으로 ㉠에 $x = 2$ 를 대입하면

좌변이 양수이므로 $f'(2) > 0$ 임을 보일 수 있다.

㉡에 $a = -\frac{2}{3}$ 를 대입하여 정리하면

$$2x^2 + 8x + 8 = 0, \quad 2(x+2)^2 = 0, \quad x = -2 \text{ (중근)}$$

$$\text{즉, } \alpha = -2$$

(이때, (*) 의 α 의 값이 유일하게 결정된다.)

㉢에 $x = -2, a = -\frac{2}{3}$ 를 대입하면

$$(f(-2))^5 + (f(-2))^3 = \ln \frac{9}{2} - \frac{4}{3} - b, \quad \text{즉}$$

$$0 = \ln \frac{9}{2} - \frac{4}{3} - b, \quad b = \ln \frac{9}{2} - \frac{4}{3}$$

$$\therefore a \times e^b = -\frac{2}{3} \times e^{\ln \frac{9}{2} - \frac{4}{3}} = -\frac{2}{3} \times \frac{9}{2} \times e^{-\frac{4}{3}}$$

$$= -3e^{-\frac{4}{3}}$$

답 ①

[풀이3]

그래프의 개형을 이용하여 문제를 해결하자.

문제에서 $a \times e^b \neq 0$ 라고 하였으므로 $a \neq 0$ 이다.

조건 (나)에서 사잇값 정리에 의하여

$$f(\alpha) = 0 \text{이고, } -3 < \alpha < 3 \text{인}$$

α 가 적어도 하나 존재한다. ...(*)

조건 (가)에서

$$(f(x))^5 + (f(x))^3 \\ = (f(x))^3 ((f(x))^2 + 1)$$

$$= \underbrace{\ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)}_{\text{곡선}} - \underbrace{(ax+b)}_{\text{직선}} \quad \dots \textcircled{㉠}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$5(f(x))^4 f'(x) + 3(f(x))^2 f'(x)$$

$$= (f(x))^2 f'(x) (5(f(x))^2 + 3)$$

$$= \frac{2x+1}{\underbrace{x^2 + x + \frac{5}{2}}_{\text{곡선}}} - \underbrace{a}_{\text{직선}} \quad \dots \textcircled{㉡}$$

두 방정식 $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ 의 해집합을 각각 P , Q 라고 하면

$$\textcircled{㉠}: P \Leftrightarrow \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) = ax + b$$

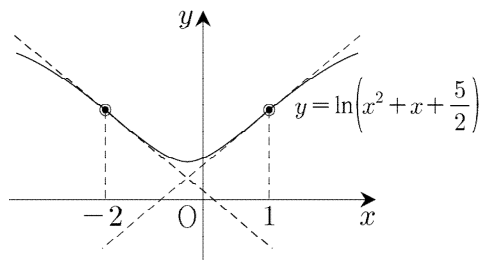
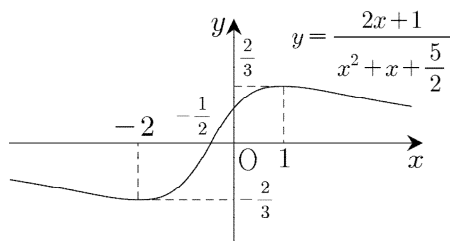
$$\textcircled{㉡}: P \cup Q \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}} = a$$

(단, $P \neq \emptyset$)

두 함수

$$y = \frac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}, \quad y = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$$

의 그래프는 다음과 같다.



(단, ●는 변곡점이다.)

곡선 $y = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$ 의 두 변곡점에서의 접선의 기울기는 각각 $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ 이다.

$a \neq 0$ 이므로 곡선 $y = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 교점의 개수는 1 또는 2 또는 3이다.

이때, 집합 P 의 원소의 개수는 1 또는 2 또는 3이다.

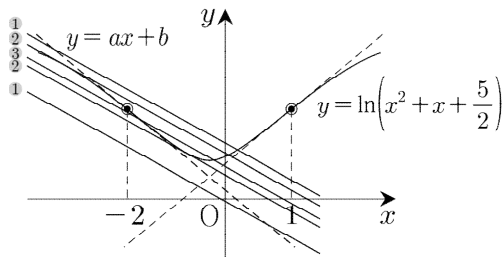
㉠에서 곡선 $y = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$ 와 직선 $y = a(a \neq 0)$ 의 교점의 개수는 1 또는 2이다.

($\because P \neq \emptyset$ 에서 $P \cup Q \neq \emptyset$ 이므로 곡선과 직선이 만나지 않을 수 없다.)

이때, 집합 $P \cup Q$ 의 원소의 개수는 1 또는 2이므로, 집합 P 의 원소의 개수는 3일 수 없다.

따라서 집합 P 의 원소의 개수는 1 또는 2이다.

집합 P 의 원소의 개수가 2라고 가정하자.



(위의 그림에서 5개의 직선의 기울기의 절댓값은 $\frac{2}{3}$ 미만이고, 0이 아니다. 그리고 기울기를 고정시킨 후에 y 절편을 $-\infty$ 에서 ∞ 까지 변화시키면서 움직인 것이다.)

위의 그림처럼 곡선 $y = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 교점의 개수가 2일 때, 두 교점의 x 좌표를

각각 α, β 라고 하자. 즉, $P = \{\alpha, \beta\}$

평균값의 정리에 의하여

$f'(\gamma) = 0$ 이고, $\alpha < \gamma < \beta$ 인 γ 가 적어도 하나 존재한다.

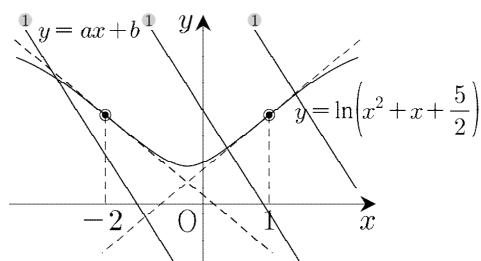
㉠: $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset P \cup Q$ 이므로

곡선 $y = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$ 과 직선 $y = a$ 의 교점의 개수는 3 이상이다.

이는 가정에 모순이므로 집합 P 의 원소의 개수는 1이다.

즉, $P = \{\alpha\}$

이때, 직선 $y = ax + b$ 의 기울기의 절댓값은 $\frac{2}{3}$ 이상이다. (아래 그림)



즉, $a \geq \frac{2}{3}$ 또는 $a \leq -\frac{2}{3}$

그런데 $a > \frac{2}{3}$ 또는 $a < -\frac{2}{3}$ 이면 곡선 $y = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$ 와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수는 0이다.

그런데 $n(P \cup Q) \geq 1$ 이므로 이는 가정의 모순이다.

따라서 $a = -\frac{2}{3} (P = \{-2\})$ 또는 $a = \frac{2}{3} (P = \{1\})$

그런데 $a = \frac{2}{3}$ 이면 $x = 2$ 일 때,

직선 $y = a$ 이 곡선 $y = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$ 위쪽 방향에 있으므로

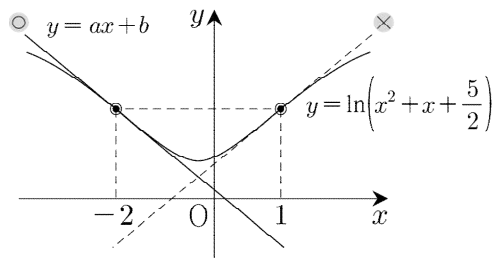
㉠에서 $f'(2)(f(2))^2(5(f(2))^2+3) < 0$, 즉

$$f'(2) < 0$$

이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $a = -\frac{2}{3} (P = \{-2\})$

곡선 $y = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$ 과 직선 $y = ax + b$ 의 그래프는 다음과 같다.



(단, ●는 변곡점이다.)

직선 $y = ax + b$ 는 곡선 $y = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$ 의

변곡점 $\left(-2, \ln \frac{9}{2}\right)$ 에서의 접선이다.

즉, $y = -\frac{2}{3}x + b$ 이 점 $\left(-2, \ln \frac{9}{2}\right)$ 을 지나므로

$$\ln \frac{9}{2} = -\frac{2}{3}(-2) + b, \quad b = \ln \frac{9}{2} - \frac{4}{3}$$

$$\therefore a \times e^b = -\frac{2}{3} \times e^{\ln \frac{9}{2} - \frac{4}{3}} = -\frac{2}{3} \times \frac{9}{2} \times e^{-\frac{4}{3}}$$

$$= -3e^{-\frac{4}{3}}$$

답 ①

[참고3]

곡선

2026 이동훈 기출 <https://atom.ac/books/12829>

오르비 <https://orbi.kr/>

$$y = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} = \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}$$

은 곡선 $y = \frac{2x}{x^2 + \frac{9}{4}}$ 를 x 축이 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

그런데 $x > 0$ 일 때, 산술기하절대부등식에 의하여

$$\frac{2}{x + \frac{9}{4x}} \leq \frac{2}{2\sqrt{x \times \frac{9}{4x}}} = \frac{2}{3}$$

(단, 등호는 $x = \frac{9}{4x}$ 즉, $x = \frac{3}{2}$ 일 때 성립한다.)

곡선 $y = \frac{2x}{x^2 + \frac{9}{4}}$ 는 $x = \frac{3}{2}$ 일 때, 극댓값 $\frac{2}{3}$ 를 갖는다.

그런데 이 곡선은 원점에 대하여 대칭이므로, $x = -\frac{3}{2}$ 일 때, 극솟값 $-\frac{2}{3}$ 를 갖는다.

따라서 곡선 $y = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$ 는 $x = -2$ 일 때, 극솟값 $-\frac{2}{3}$ 를 갖고,

$x = 1$ 일 때, 극댓값 $\frac{2}{3}$ 를 갖는다. 그리고 이 곡선은 점 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 에 대하여 대칭이다.