2026 중앙대 모의논술 해설

[문제 1]

남학생을 M, 여학생을 F, 손든 남학생을 $\overline{M}$, 손든 여학생을 $\overline{F}$라 하자.
남학생과 여학생은 성별이 같으면 동일하게 취급하므로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!3!} = {}_6\mathrm{C}_3 = 20$$

남학생끼리 몇 명 붙어있는지에 따라 경우를 나누자
(참고로, 이 문제를 풀기 위해서는 경우나열의 대칭성이 핵심이다.)

① MMM이 존재하는 경우

번호	배열	손을 드는 경우의 수	$\overline{M} \geq 2$
1)	$MMMFFF$	16	0
2)	$FMMMFF$	22	0
3)	$FFMMMF$	22	0
4)	$FFFMMM$	16	0
합계		84	0

경우 3)과 4)는 대칭성에 의해 1)과 2)와 각각 경우의 수가 동일하다

② MM이 존재하는 경우

번호	배열	손을 드는 경우의 수	$\overline{M} \geq 2$
1)	$MMFMFF$	24	6
2)	$MMFFMF$	26	8
3)	$MMFFFM$	22	6
4)	$FMMFMF$	30	8
5)	$FMMFFM$	28	8
6)	$MFMMFF$	26	6
7)	$FFMMFM$	26	6
8)	$MFFMMF$	28	8
9)	$FMFMMF$	30	8
10)	$MFFFMM$	22	6
11)	$FMFFMM$	26	8
12)	$FFMFMM$	24	6
합계		312	84

경우 7) ~ 12)는 대칭성에 의해 1) ~ 6)의 경우의 동일하다.
MM의 위치에 따라 2~3가지 경우밖에 등장하지 않음을 알 수 있다.

③ M이 모두 떨어져있는 경우

번호	배열	손을 드는 경우의 수	$\overline{M} \geq 2$
1)	$MFMFMF$	33	13
2)	$MFMFFM$	30	12
3)	$MFFMFM$	30	12
4)	$FMFMFM$	33	13
합계		126	50

경우 3)과 4)는 대칭성에 의해 1)과 2)와 각각 경우의 수가 동일하다

따라서 주어진 문제의 확률은 $\frac{0+84+50}{76+312+126}=\frac{67}{257}$

[문제 2-1]

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4bx$이므로 $f'(x)=x^2+2ax+4b$

$f'(x)$가 극댓값과 극솟값을 가져야 하므로 판별식 $D/4=a^2-4b>0$이어야 한다.

$D>0$일 때 $f'(x)=0$의 두 근을 α, β라 하자.($\alpha<\beta$)

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘		↗		↘

이므로 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대이다

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=4b$

$f(\alpha)+f(\beta)=12$이어야 하므로

$\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)+a(\alpha^2+\beta^2)+4b(\alpha+\beta)$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^2-\alpha\beta)$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

를 이용하여 $f(\alpha)+f(\beta)=12$를 정리하면 $a^3-6ab=9$여야 한다.

위 내용을 모두 만족하는 순서쌍 (a,b)는 $(-3,2)$, $(3,1)$만 가능.

① $(a,b)=(-3,2)$

$f'(x)=x^2-6x+8$이고 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x$

$f(1)=\frac{16}{3}$

② $(a,b)=(-3,1)$

$f'(x)=x^2-6x+4$이고 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+4x$

$f(1)=\frac{22}{3}$

따라서 답은 $\frac{16}{3}$, $\frac{22}{3}$

[문제 2-2]

$f(x)=2f(x-2)$는 $f(x+2)=2f(x)$와 동치이다.

구간이 x축의 양의 방향으로 2 증가할때마다 함수가 2배가 되는 것을 알 수 있다.

따라서 $f(x+2n)=2^n f(x)$임을 알 수 있다.

$2026=2\times 1013$이므로

구간 $[2026, 2028]$에서

$f(x)=2^{2013}f(x-2026)=2^{2013}(x-2026)\sin(\pi(x-2026))$

$x-2026=t$라 하면

$f(x)=2^{2013}t\sin(\pi t)$이고 $y=2^{2012}(x-2026)=2^{2012}t$이다.

문제에서 구하는 둘러싸인 넓이는

$$\int_{2026}^{2027}\left|f(x)-2^{2012}(x-2026)\right|dx=2^{2012}\int_0^1 t\left|2\sin(\pi t)-1\right|dt$$

$\sin(\pi t)=\dfrac{1}{2}$인 t는 $t=\dfrac{1}{6},\ \dfrac{5}{6}$ 이 두 개가 존재한다.

$$\int_0^1 t\left|2\sin(\pi t)-1\right|dt=\int_0^{\frac{1}{6}}t(1-2\sin\pi t)dt+\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}}t(2\sin\pi t-1)dt+\int_{\frac{5}{6}}^{1}t(1-2\sin\pi t)dt$$

$$=2^{2012}\left(-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)$$

(대칭성에 의해 0부터 $\dfrac{1}{6}$과 $\dfrac{5}{6}$부터 1까지의 적분값은 동일)

따라서 $p=-\dfrac{1}{6},\ q=-2,\ r=2$

[문제 3-1]

주어진 식을 x에 대해 미분하면

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{5-x-y}\left(-1-\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$\frac{dy}{dx}=-1$이면 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0$, $x=y$를 얻는다.

이를 원 음함수에 다시 적용하면

$2\ln x+\ln(5-2x)=0$

$x^2(5-2x)=1$

$2x^3-5x^2+1=0$

$x=\frac{1}{2},\ 1+\sqrt{2}\ (\because\ \ 0<x<\frac{5}{2})$

따라서 $a=\frac{1}{2},\ 1+\sqrt{2}$

[문제 3-2]

삼각함수의 덧셈법칙에 의해

$\sin(x+x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\cos(x+x)=\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$f(x)=\sin x(\sin x+2\cos x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x=\frac{1}{2}+\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$

$f'(x)=2\cos 2x+\sin 2x$

$2\cos 2x=-\sin 2x$로부터 $\tan 2x=-2$인 x는 구간 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 두 개 존재한다.

$\tan 2x=-2$인 x를 $x=\alpha$, β라 하면

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f(\beta)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

최댓값은 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

[문제 4-1]

B$(0,0)$이라 하면 $A=(-1,\sqrt{3})$, $C=(2,0)$, $D=(3,\sqrt{3})$, $E=(2,2\sqrt{3})$

$F=(0,2\sqrt{3})$, $M=(1,2\sqrt{3})$이다.

이때 $Q(s,0)$이라 하자. $(0\le s\le 2)$

이때 AM의 직선의 방정식은 $y\equiv\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

이므로 $P\left(t,\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$라 하자. $(-1\le t\le 1)$

$\overrightarrow{AP}=\left(t+1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\overrightarrow{EQ}=(s-2,-2\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{EQ}=\left(t+s-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{EQ}\right|=\sqrt{(t+s-1)^2+\dfrac{3}{4}(t-3)^2}$

$t=-1$일 때 y성분이 최대가 되고, 이때 s는 최소가 되면 되므로

$s=0$, $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{EQ}\right|=4$가 최댓값이다

$t=1$일 때 y성분이 최소이고 이때 이때 s는 최소가 되면 되므로 $s=0$, $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{EQ}\right|=\sqrt{13}$
이 최솟값이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $4+\sqrt{13}$

[문제 4-2]

<기하 내용 사용 안하는 풀이>

두 원 C_1, C_2의 중심을 잇는 직선은 $P(t,t^2)$에서의 접선과 수직이다.

점 P에서 $y=x^2$의 접선의 기울기는 $y'=2x$로부터 $2t$이므로 법선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2t}(x-t)+t^2$이다. 이 직선의 y절편이 C_1의 중심의 좌표이고 이를 O_1이라 하면

$O_1=\left(0,t^2+\dfrac{1}{2}\right)$, 이고 반지름을 r_1이라 하면 $r_1=\sqrt{(t-0)^2+\left(t^2-t^2-\dfrac{1}{2}\right)}=\sqrt{t^2+\dfrac{1}{4}}$

원 C_2의 중심의 좌표를 $O_2(x_2,y_2)$, 반지름을 r_2라 하면 $y_2=r_2$이고 아까 구한 법선의 방정식 위의 점이므로 $r_2-t^2=-\dfrac{1}{2t}(x_2-t)$이고 원 C_2의 방정식은 $(x_2-t)^2+\left(r_2-t^2\right)^2=r_2^2$

정리하면, $r_2=t^2-\dfrac{-1+\sqrt{1+4t^2}}{4}$ $(\because\ r_2<t^2)$

$r_1=2r_2$이어야 하므로 위에서 구한 식을 연립하면 $16t^4-8t^2-3=0$, $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.
$(\because t>0)$

이때 $r_1 = 1,\ r_2 = \dfrac{1}{2},\ O_1 = \left(0,\ \dfrac{5}{4}\right),\ O_2 = \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\ \dfrac{1}{2}\right),\ P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

이때 원 C_1과 y축의 교점을 $A\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$, 원 C_2와 x축의 교점을 $B\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\ 0\right)$이라 하면

우리가 구하는 넓이는 사각형 $OAPB$의 넓이에서 호 AP와 직선 AP로 둘러쌓인, 중심각이 $\dfrac{\pi}{3}$ 활꼴 AP의 넓이와 호 BP와 직선 BP로 둘러쌓인, 중심각이 $\dfrac{2}{3}\pi$ 활꼴 BP의 넓이를 빼면 된다.

사각형 $OAPB$는 삼각형 AOB와 BPA로 나누어 넓이를 계산하면 $\dfrac{11\sqrt{3}}{32}$

활꼴 AP의 넓이는 $\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 활꼴 BP의 넓이는 $\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{16}$이므로 답은 $\dfrac{21\sqrt{3}}{32} - \dfrac{\pi}{4}$

<기하 사용하는 풀이>

$y = x^2$은 초점이 $F\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$, 준선이 $y = -\dfrac{1}{4}$인 포물선이다.

임의의 점 $P(t,\ t^2)$에 대해 $\overline{PF} = t^2 + \dfrac{1}{4} =$ 준선까지의 거리 $(t > 0)$

이때 점P에서의 접선을 l이라고 하고 접선l은 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 D라 하면 직선 FP와 직선 PD가 이루는 각을 이등분한다.

그리고 l의 법선을 n이라 하면, 직선 n은 직선 PD와 직선 FP가 이루는 외각을 이등분한다. (반사각의 성질)

법선 위 임의의 점을 X라 하면, 외각 이등분선 정리에 의해, $\dfrac{\overline{XP}}{\overline{XF}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{XP}}$이고 이로부터

$\overline{XP} : \overline{XF} : \overline{PD} = 1 : \sin\theta : \cos\theta$ (θ는 직선FP와 y축이 이루는 양의 방향의 각)

이를 통해 직선 n의 기울기는 $-\dfrac{1}{2t}$임을 알 수 있다.

이하 나머지 풀이 동일