

제 2 교시

수학 영역 KSM

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x) = x^2 - x + 1$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 2x - 1$
 $f'(1) = 1$

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^7 a_k = 8$ 일 때, $\sum_{k=1}^7 (2a_k + 1)$ 의 값은? [3점]

- ① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

$2 \times 8 + 7 = 23$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a & (x < 3) \\ 5x - a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$-9 + a = 15 - a, \quad a = 12$

5. $\int_0^2 (6x^2 - 2x + 1) dx$ 의 값은? [3점]

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$$2x^3 - x^2 + x \Big|_0^2 = 16 - 4 + 2 = 14$$

6. 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = a \cos bx + 1$ 의 최댓값이 8이고 주기가 π 일 때, $a + b$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$ ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

$$\begin{aligned} a+1 &= 8, \quad a=7 \\ \frac{2\pi}{b} &= \pi, \quad b=2 \end{aligned}$$

7. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = 5x^2 + xf(x)$$

라 하자. $f(3) = 2$, $f'(3) = 1$ 일 때, $g'(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

$$g(3) = 45 + 3f(3) = 51$$

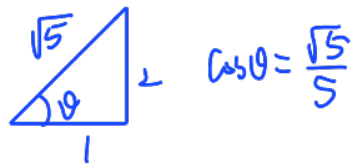
$$g'(x) = 10x + f(x) + xf'(x)$$

$$g'(3) = 30 + f(3) + 3f'(3) = 35$$

8. $\sin(\pi - \theta) > 0$ 이고 $2\cos\theta = \sin\theta$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin\theta > 0$, $2 = \tan\theta > 0$
 $\sin\theta > 0$) 1사분면



9. 함수 $f(x) = x^2 + ax$ 에 대하여

$$\int_{-3}^3 (x+1)f(x)dx = 36 + \int_{-3}^3 f(x)dx$$

일 때, 상수 a 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 x f(x) dx &= 36 \\ \int_{-3}^3 (x^3 + ax^2) dx &= 36 \\ = 2 \int_0^3 ax^2 dx &= 2 \times \frac{a}{3} \cdot 3^3 = 18a = 36 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

10. 실수 $a(a > 1)$ 에 대하여

곡선 $y = \log_a(x+3)$ 이 곡선 $y = \log_a(-x+3)$ 과 만나는 점을 A,

곡선 $y = \log_a(x+3)$ 이 x 축과 만나는 점을 B,

곡선 $y = \log_a(-x+3)$ 이 x 축과 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a 의 값은? [4점]

- ① $3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ② $3^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ ③ $3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ④ $3^{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$ ⑤ $3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

A(0, $\log_a 3$)

B(-2, 0)

C(2, 0)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = \log_a 3$$

$$3 = a^{2\sqrt{3}}, a = 3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

11. 시각 $t=0$ 일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다.
시각이 $t(t \geq 0)$ 일 때 점 P의 위치 x 가

$$x = t^3 - t^2 - t + 1$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. 시각 $t=1$ 일 때 점 P의 위치는 1이다.
ㄴ. 시각 $t=1$ 일 때 점 P의 속도는 0이다.
ㄷ. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에
점 P의 가속도는 4이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

$$V = 3t^2 - 2t - 1 = (3t+1)(t-1)$$

$$a = 6t - 2$$

$$\text{ㄱ. } x(1) = 0 \quad (\times)$$

$$\text{ㄴ. } V(1) = 0 \quad (o)$$

$$\text{ㄷ. } t=1 \rightarrow a(1) = 4 \quad (o)$$

12. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
 a_4 의 최댓값은? [4점]

(가) $a_1 = a_3$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_{n+1} - a_n + 3)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$$

이다.

- ① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

$$a_{n+1} = a_n - 3 \quad \text{or} \quad 2a_n$$

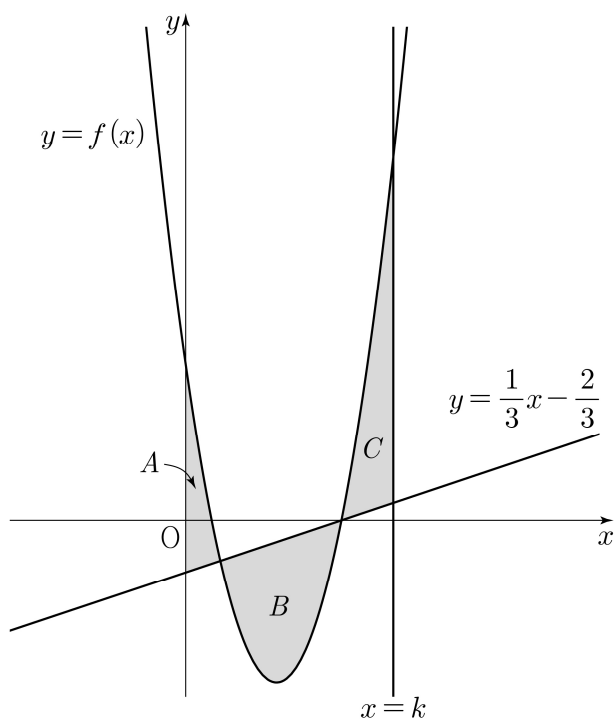
a_1	a_2	a_3	$a_1 = a_3$
d	$d-3$	$d-6$	$\times$
	$2d$	$2d-6$	$d=6 \rightarrow 12$
		$2d-3$	$d=3$
		$4d$	$d=0$

a4 최대

13. 그림과 같이 함수 $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ 및 y 축으로 둘러싸인 영역을 A , 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ 로 둘러싸인 영역을 B , 곡선 $y = f(x)$ 와 두 직선 $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, $x = k (k > 2)$ 로 둘러싸인 영역을 C 라 하자.

$$(A \text{의 넓이}) + (C \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이})$$

일 때, 상수 k 의 값은? [4점]



- ① $\frac{29}{12}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

$$\int_0^k (f(x) - (\frac{1}{3}x - \frac{2}{3})) dx = 0$$

$$\int_0^k (3x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{8}{3}) dx = 0$$

$$k^3 - \frac{11}{3}k^2 + \frac{8}{3}k = 0$$

$$\frac{1}{3}k(3k^2 - 11k + 8) = 0$$

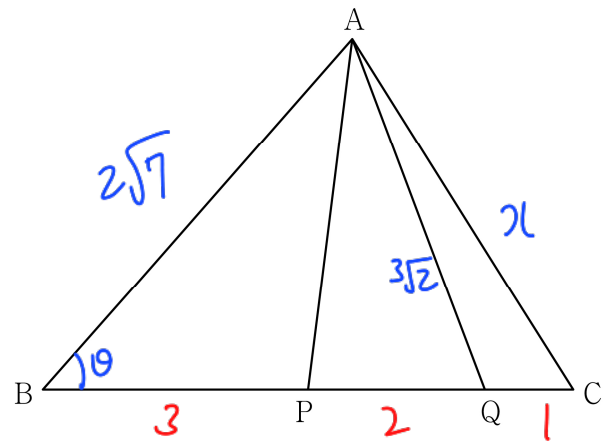
$$\frac{1}{3}k(3k-8)(k-1) = 0, k = \frac{8}{3}$$

14. $\overline{AB} = 2\sqrt{7}$ 인 삼각형 ABC 에서 선분 BC 의 중점을 P , 선분 BC 를 $5:1$ 로 내분하는 점을 Q 라 하자.

$$\overline{AQ} = 3\sqrt{2}, \sin(\angle QAP) : \sin(\angle APQ) = \sqrt{2} : 3$$

일 때, 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이는? [4점]

- ① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$ ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



$$\overline{PQ} : \overline{AQ} = \sqrt{2} : 3 \therefore \overline{PQ} = 2, \overline{AQ} = 2, \overline{BP} = 3$$

$$\triangle ABQ \quad \cos \theta = \frac{28+25-18}{2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \sin \theta = \frac{3}{4}$$

$$\triangle ABP \quad \cos \theta = \frac{28+36-x^2}{2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$64 - x^2 = 42, x = \sqrt{22}$$

$$\frac{x}{\sin \theta} = 2R = \frac{\sqrt{22}}{\frac{3}{4}}, R = \frac{2\sqrt{22}}{3}$$

$$S = \pi R^2 = \frac{88}{9}\pi$$

15. 상수 k 와 $f'(0) = 6$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + k & (|x| > 1) \\ -f(x) & (|x| \leq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k + f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ 의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다. $g'(a) \leq 0$

(나) x 에 대한 방정식 $g(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$

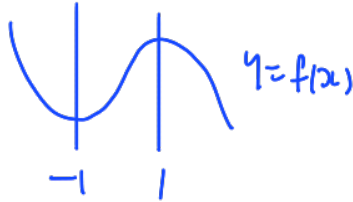
② $\frac{27}{4}$

③ $\frac{39}{4}$

④ $\frac{51}{4}$

⑤ $\frac{63}{4}$

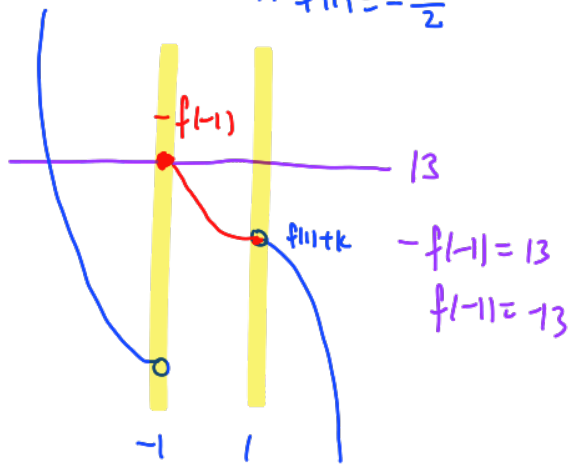
$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) & (|x| > 1) \\ -f'(x) & (|x| < 1) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \neq \pm 1 \rightarrow \\ |x| > 1 \rightarrow f'(x) \leq 0 \\ |x| < 1 \rightarrow f'(x) \geq 0 \end{matrix}$$



$x=1$ 무미분계수 존재 $\Rightarrow g(1) = g(1+)$

$$-f(1) = f(1) + k$$

$$\therefore f(1) = -\frac{k}{2}$$



$$f'(x) = 3a(x^2 - 1) \quad f'(0) = -3a = 6, a = -2$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6$$

$$f(-1) = -13$$

$$f(x) = -2x^3 + 6x - 9$$

$$f(1) = -5 = -\frac{k}{2}, k = 10$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - 6 = -\frac{25}{4}$$

$$\therefore k + f\left(\frac{1}{2}\right) = 10 - \frac{25}{4} = \frac{15}{4}$$

단답형

16. 방정식 $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = \log_{25} 9$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

$$x > 1$$

$$2$$

$$\log_5(x^2 - 1) = \log_5 3$$

$$x^2 - 1 = 3$$

$$x = 2$$

17. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 4x$ 이고 $f(0) = 3$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$6$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$$

$$f(1) = 6$$

18. $\sum_{k=1}^6 (k^2 + 2k)$ 의 값을 구하시오. [3점]

133

$$\frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} + 2 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = 91 + 42 = 133$$

19. 상수 a 에 대하여 함수 $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + a$ 의 극댓값이 20일 때, 함수 $f(x)$ 의 극솟값을 구하시오. [3점]

8

$$f'(x) = 9x^2 - 18x = 9x(x-2)$$


$$f(0) = a = 20$$

$$f(2) = 24 - 36 + a = 8$$

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$0 \leq x < 4$ 일 때 $f(x) = -x^2 + 4x$ 이고,
모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이다.

방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의 0 이상인 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자.

다음은 $a_{20} + a_{21} + a_{22}$ 의 값을 구하는 과정이다.

방정식 $f(x) = x$ 의 모든 실근이 0, 3이므로
방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의 실근을 구하는 것은
방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$ 의 실근을 구하는 것과 같다.

$0 \leq x < 4$ 일 때, 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$ 의
모든 실근은 0, (가), 3이므로

$$a_1 = 0, a_2 = \text{(가)}, a_3 = 3$$

이다. 또한 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이므로

세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$ 은

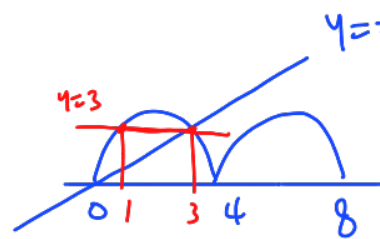
첫째항이 각각 0, (가), 3이고

공차가 모두 (나)인 등차수열이다.

따라서 $a_{20} + a_{21} + a_{22} = \text{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p , q , r 이라 할 때,
 $p + q + r$ 의 값을 구하시오. [4점]

85



(가) 1

(나) 4

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{3n-2} = 4n-4, a_{22} = 28 \\ a_{3n-1} = 4n-3, a_{20} = 25 \\ a_{3n} = 4n-1, a_{21} = 27 \end{array} \right\} 80 \text{ (다)}$$

$$\therefore 1 + 4 + 80 = 85$$

21. 함수 $f(x) = (x-1)(x-2)$ 와 최고차항의 계수가 1인
사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 a 에 대하여
i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$ 의 값과 ii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$ 의 값이
모두 존재한다.

$g(-1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

42

i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times |(x-1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)}$ $x=1, 2$ 에서 극한값 존재 $\Rightarrow g(1)=g(2)=0$
 $g(x) = (x-1)(x-2)(x^2+ax+b)$

ii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|(x-1)(x-2)(x^2+ax+b-1)|}{(x-1)(x-2)(x^2+ax+b)}$ $x=1, 2$ 에서 극한값 존재
 $\Rightarrow x^2+ax+b-1 = (x-1)(x-2)$
 $a=-3, b=3$
 $g(-1) = 6(1-1+6) = 42$
 x^2-3x+3
 $D=9-12 < 0$

22. $k > 1$ 인 실수 k 에 대하여 두 곡선

$$y = 2^x + \frac{k}{2}, \quad y = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1 인
직선이 곡선 $y = 2^{x-2} - 3$ 과 만나는 점을 B라 하자.

삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k + \log_2 k = \frac{q}{p}$ 이다.

$p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 0는 원점이고, p 와 q 는 서로소인
자연수이다.) [4점]

$$2^x + \frac{k}{2} = k\left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2, \quad 2^t = t \ (t > 0)$$

$$1 + \frac{k}{2} = \frac{k}{t} + k - 2$$

38

$$2t^2 + kt = 2k + 2kt - 4t$$

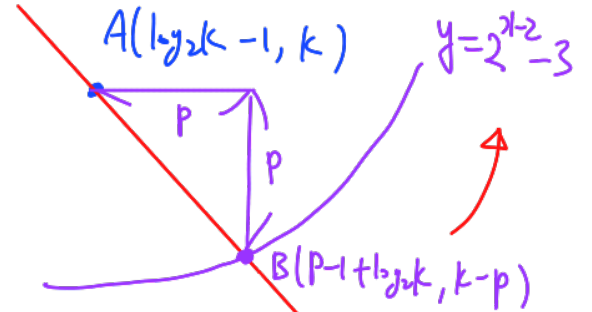
$$2t^2 + (4-k)t - 2k = 0$$

$$(2t-k)(t+2) = 0$$

$$t = \frac{k}{2} \ (t > 0)$$

$$x = \log_2 \frac{k}{2}$$

$$A(\log_2 k - 1, k)$$



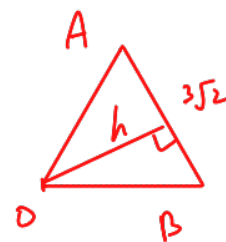
$$k-p = 2^{\log_2 k + p - 3} - 3$$

$$k-p = k \cdot 2^{p-3} - 3$$

$$k(2^{p-3} - 1) = 3-p \quad (k > 1)$$

$$p=3 \rightarrow 0=k$$

$$p \neq 3 \rightarrow k = \frac{3-p}{2^{p-3}-1} \begin{cases} p > 3, k = \frac{\ominus}{\oplus} < 0 \ (x) \\ p < 3, k = \frac{\oplus}{\ominus} < 0 \ (x) \end{cases}$$



$$\therefore p=3, \overline{AB} = 3\sqrt{2}$$

$$l: x+y = k-1 + \log_2 k$$

$$h = \frac{|k-1 + \log_2 k|}{\sqrt{2}}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{|k-1 + \log_2 k|}{\sqrt{2}} = 16$$

$$|k + \log_2 k - 1| = \frac{32}{3}$$

(+)

$$\therefore k + \log_2 k = \frac{35}{3}$$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인
하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이
선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 6개의 문자 a, a, a, a, b, c 를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

- ① 18 ② 24 ③ 30 ④ 36 ⑤ 42

$\frac{6!}{4!} = 30$

24. 두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이고

$P(A \cup B) = 1, P(A^c) = 2P(A)$

일 때, $P(B)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$1 - P(A) = 2P(A), P(A) = \frac{1}{3}$

$P(A) + P(B) = 1$

$\therefore P(B) = \frac{2}{3}$

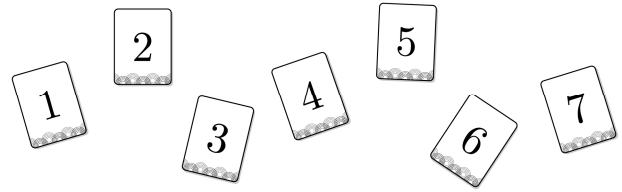
25. 다항식 $(2x-1)^5(x+1)$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는? [3점]

- ① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$$\begin{aligned} 5(2x)^4(-1)^1 \cdot 1 &\rightarrow 80x^4 \\ 5(2x)^3(-1)^2 \cdot x &\rightarrow -40x^3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 5(2x)^4(-1)^1 \cdot 1 &\rightarrow 80x^4 \\ 5(2x)^3(-1)^2 \cdot x &\rightarrow -40x^3 \end{aligned}} \right\} 40x^3$$

26. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 짝수가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

- ① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

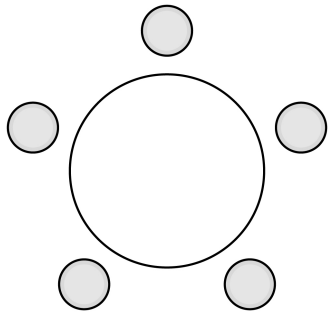


전체 - 양쪽 모두 홀수

$$1 - \frac{4 \times 3 \times 2!}{7!} = 1 - \frac{12}{42} = \frac{5}{7}$$

27. 5명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 남학생 5명, 여학생 3명이 있다. 이 8명의 학생 중에서 4명 이상의 남학생을 포함하여 5명의 학생을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480



$$(5C_4 \times 3! + 5C_5) \times 4! = 16 \times 24 = 384$$

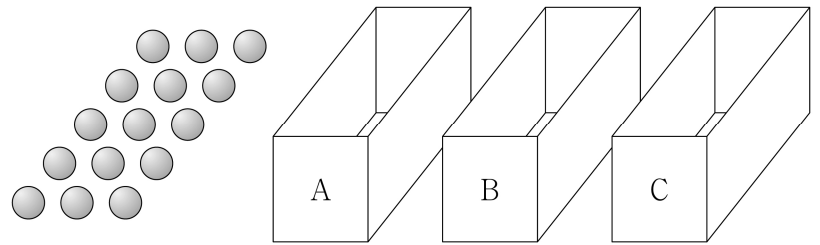
$\downarrow$ $\downarrow$
 $5C_4$ $5C_5$
 (91) (1)

28. 공 15개와 비어 있는 세 상자 A, B, C가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 세 상자 A, B, C에 공을 넣는 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져
나온 눈의 수가 3의 배수이면
세 상자 A, B, C에 넣는 공의 개수가 각각 1, 2, 0이고,
나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면
세 상자 A, B, C에 넣는 공의 개수가 각각 1, 1, 1이다.

이 시행을 5번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수일 때, 상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{44}{61}$ ② $\frac{47}{61}$ ③ $\frac{50}{61}$ ④ $\frac{53}{61}$ ⑤ $\frac{56}{61}$



A B C

384 $\times \frac{1}{3}$ 1 2 0 $\rightarrow p$

384 $\times \frac{2}{3}$ 1 1 1 $\rightarrow q$

$$5 \leq p \leq 10$$

	p	q	
5	0	5	$\rightarrow (\frac{2}{3})^5 = \frac{32}{3^5}$
7	2	3	$\rightarrow 5C_2 (\frac{1}{3})^2 (\frac{2}{3})^3 = \frac{80}{3^5}$
9	4	1	$\rightarrow 5C_4 (\frac{1}{3})^4 (\frac{2}{3})^1 = \frac{10}{3^5}$

A+C

10	$\frac{32+80}{32+80+10} = \frac{112}{122}$
8	
6	$= \frac{56}{61}$

단답형

29. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c 라 할 때, $a+b=8$ 또는 $b \geq c$ 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

여사건 $a+b=8$ & $b < c$

1	$6 \times 5 = 30$	} 80
2	$5 \times 4 = 20$	
3	$5 \times 3 = 15$	
4	$5 \times 2 = 10$	
5	$5 \times 1 = 5$	

$1 - \frac{80}{216} = 1 - \frac{10}{27} = \frac{17}{27}$

44

30. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오. [4점]

115

- (가) $x=1, 2, 3, 4$ 일 때 $f(x+1)+3 \geq f(x)+x$ 이다.
(나) $f(2)$ 의 값은 홀수이다.

$$f(1+1) \geq f(1)+1-3$$

$$f(2) \geq f(1)-2$$

$$f(3) \geq f(2)-1$$

$$f(4) \geq f(3)$$

$$f(5) \geq f(4)+1$$

$$5 \geq f(5) \geq f(4)+1 \geq f(3)+1 \geq f(2) \geq f(1)-2 \geq -1$$

$$1 \rightarrow 3 \times 4H_3 = 60$$

$$3 \rightarrow 5 \times 3H_3 = 50$$

$$5 \rightarrow 5 \times = 5$$

115

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$ 의 값은? [2점]

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

24. 곡선 $3x + y + \cos(xy) = 2$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 x 절편은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$3+y'-\sin(xy) \times (y+xy')=0 \quad (0,1)$
 $3+y'=0, \quad y'=-3$
 $y=-3x+1$

25. 양수 a 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a} \right)$ 이

실수 S 에 수렴할 때, $a+S$ 의 값은? [3점]

- ① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{n} - 3 + \frac{-a+6}{n+a} + a \right) = 0$$

$$\therefore a=3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} + \frac{-3}{n+3} \right) = 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{2} = S$$

$$\therefore a+S = 3 + \frac{11}{2} = \frac{17}{2}$$

26. 함수 $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} + 4e^x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.

$g'(a) = \frac{1}{8}$ 이 되도록 하는 실수 a 에 대하여 $a+f'(g(a))$ 의 값은? [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$$g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))} = \frac{1}{8}$$

$$f'(x) = 3e^{3x} - 6e^{2x} + 4e^x = 8, \quad e^x = t(t>0)$$

$$3t^3 - 6t^2 + 4t - 8 = 0$$

$$(t-2)(3t^2+4)=0 \quad t=2, \quad x=\ln 2$$

$$f'(\ln 2) = 8 \quad \therefore g(a) = \ln 2$$

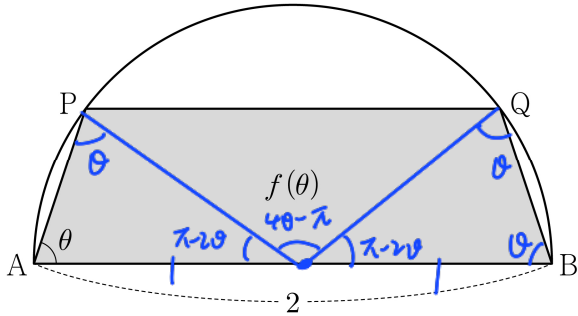
$$f(\ln 2) = a$$

$$f(\ln 2) = 8 - 12 + 8 = 4 = a$$

$$f'(g(a)) = 8$$

$$4+8=12$$

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle BAP = \theta$ ($\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하고, $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3$ 이 되도록 하는 θ 의 값을 a 라 할 때, $f'(a)$ 의 값은? [3점]



- ① $-\frac{64}{25}$ ② $-\frac{59}{25}$ ③ $-\frac{54}{25}$
④ $-\frac{49}{25}$ ⑤ $-\frac{44}{25}$

□ ABQP 등변사각이므로 $\overline{AP} = \overline{BQ} = 2\cos\theta$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} (\sin(\pi-2\theta) + \sin(\pi-2\theta) + \sin(4\theta-\pi))$$

$$= \frac{1}{2} (2\sin 2\theta - \sin 4\theta) = \sin 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta$$

$$f'(\theta) = 2\cos 2\theta - 2\cos 4\theta, \quad \overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3 \rightarrow \cos a = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$= 2\cos 2\theta - 2(2\cos^2 2\theta - 1)$$

$$= -4\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 2$$

$$\cos 2a = \frac{9}{10} - \frac{9}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$f'(a) = -4\left(\frac{16}{25}\right) + 2\left(-\frac{4}{5}\right) + 2$$

$$= \frac{-64}{25} - \frac{8}{5} + 2 = \frac{-64-40+50}{25} = -\frac{54}{25}$$

28. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 와 두 상수 a, b 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^b$ 의 값은?

→ 도함수 연속 → f는 연속 & 미분가능 [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$(f(x))^5 + (f(x))^3 + ax + b = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$$

이다. $f^3(f^2+1)$

(나) $f(-3)f(3) < 0, f'(2) > 0$

- ① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$
④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

f 연속, 사잇값 정리 $f(-3)f(3) < 0 \rightarrow f(a) = 0 \quad -3 < a < 3$

$$g(x) = f^3(f^2+1) = \ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right) - ax - b$$

$f(a)=0 \rightarrow g(a)=0, g'(a)=0, g''(a)=0$

$$g(a) = \ln\left(a^2+a+\frac{5}{2}\right) - a - b$$

$$g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} - a = (5f^4+3f^2)f'$$

$$g''(x) = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}, \quad g''(a)=0 \rightarrow a=-2 \text{ or } 1$$

$$g'(a)=0 \rightarrow \frac{2a+1}{a^2+a+\frac{5}{2}} - a = 0$$

$$a = -\frac{2}{3} \text{ or } \frac{2}{3}$$

$$g'(2) = \frac{5}{17} - a = (5f(2)^4 + 3f(2)^2)f'(2) \therefore a < \frac{5}{17}, a = -\frac{2}{3}$$

$$a = -\frac{2}{3}$$

$$g(a) = \ln\left(a^2+a+\frac{5}{2}\right) - a - b = 0$$

$$\ln\frac{9}{2} - \frac{4}{3} = b, \quad e^b = \frac{9}{2}e^{-\frac{4}{3}}$$

$$\therefore a \times e^b = -3e^{-\frac{4}{3}}$$

단답형

29. 두 정수 $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \alpha \times \sin \frac{n}{2}\pi + \beta \times \cos \frac{n}{2}\pi$$

이고, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 4$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 과 $b_1 > 0$ 인 등비수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-2} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-3} b_{2n}) = 6 \quad b_n = b r^{n-1}, b > 0, -1 < r < 1$$

일 때, $b_1 \times b_3 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha \\ a_2 &= -\beta \\ a_3 &= -\alpha \\ a_4 &= \beta \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \alpha^2 \beta^2 = 4 \therefore \alpha \beta = \pm 2 \\ & (\alpha > \beta) \end{aligned} \right\} \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{array}$$

$$-\beta \frac{b}{1-r} = \alpha \frac{br}{1-r^2} = 6$$

$$\frac{r}{1-r} = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -2$$

$$r = -\frac{1}{3}, x, x, -\frac{2}{3}$$

$$-1 \times \frac{b}{1+\frac{1}{3}} = b, b = -b \quad \left(\begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \quad 2 \times \frac{b}{\frac{5}{3}} = b, b = 5$$

$$\therefore b_n = 5 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_1 \times b_3 = 5 \times \frac{20}{9} = \frac{100}{9}$$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \left| f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \right|$$

2
1+e^{-x}
↗ 증가함수

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고, $g(0) > 0$ 이다.

(나) $g'(\ln 3) < 0$, $|g'(-\ln 3)| = \frac{3}{8} g(-\ln 3)$

$g(0)$ 의 최솟값을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$$\frac{2}{1+e^{-x}} = h(x) \rightarrow 0 < h(x) < 2, g(x) = |f(h(x))|$$

25

$$(f(h(x)))' = f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \times \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

i) $g(x) = f(h(x))$, $f(h(0)) = 0$, $g'(0) = -f'\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

ii) $g(x) = f(h(x))$, $g'(\ln 3) = f'\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ (x)

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \text{ (가능)}$$

$$g(x) = f(h(x))$$

$$\begin{aligned} \text{(나)} \quad |g'(\ln 3)| &= -f'\left(\frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} g'(\ln 3) &= \frac{3}{8} f'\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) + f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \rightarrow f(h) = (h-1)^3 + a(h-1)^2 + b \\ f'(h) &= 3(h-1)^2 + 2a(h-1) \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) &= 3\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + 2a\left(\frac{3}{2}-1\right) = \frac{3}{4} + a = 0 \\ a &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} f(h) \leq 0 \quad 1 + a + \frac{3}{4}a - \frac{5}{8} \leq 0 \rightarrow a \leq -\frac{3}{4}$$

$$\textcircled{2} f(h) < 0 \quad \frac{3}{4}a - \frac{5}{8} < 0 \rightarrow a < \frac{5}{6}$$

$$\textcircled{3} f'\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \quad 1 < \frac{3-2a}{3} < \frac{3}{2} \rightarrow -\frac{3}{4} < a < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{4} < a \leq -\frac{3}{4}$$

$$g(1) = |f(1)| = -f(1) = -\frac{3}{4}a + \frac{5}{8}$$

$$\frac{11}{14} \leq -f(1) < \frac{19}{16}$$

$$\frac{2}{p}, p+q=25$$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a} = (2, 6)$, $\vec{b} = (k, -6)$ 에 대하여
 $\vec{a} + \vec{b}$ 의 모든 성분의 합이 4일 때, k 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+k=4$

24. 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $(3, 6)$ 에서의 접선이 점 $(1, a)$ 를
지날 때, a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$6y = 6(x+3)$

$a = 1+3 = 4$

25. 좌표평면 위의 두 점 $A(4, 0)$, $B(2, -4)$ 에 대하여
점 A 를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{AB}$ 인 직선의 y 절편은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -4) \quad > 2$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x-4)$$

$$(0, 2)$$

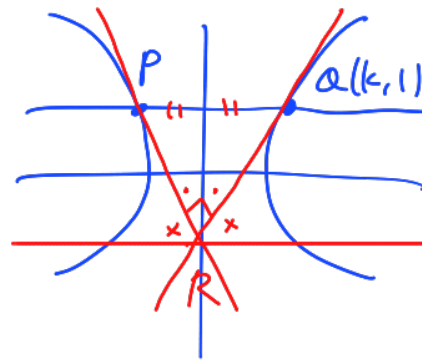
26. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 점근선의 방정식이 $y = \frac{1}{2}x$ 이다.

쌍곡선이 직선 $y=1$ 과 만나는 두 점을 각각 P , Q 라 하자.

쌍곡선 위의 점 P 에서의 접선과 쌍곡선 위의 점 Q 에서의 접선이
서로 수직일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a , b 는 양수이다.) [3점]

① 15 ② $\frac{35}{2}$ ③ 20 ④ $\frac{45}{2}$ ⑤ 25

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \quad a = 2b, \quad \frac{x^2}{4b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$QR \perp PR \therefore$

$$\frac{k^2}{4b^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$> \frac{k}{4} = 1 \therefore k = 4$$

$$Q(4, 1) \text{ 대입}$$

$$\frac{16}{4b^2} - \frac{1}{b^2} = 1, \quad b^2 = 3$$

$$a^2 = 4b^2 = 12$$

27. 삼각형 OAB에 대하여 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 라 하자.

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 6, |\vec{a} - \vec{b}| = 9, (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

일 때, 삼각형 OAB의 넓이는? [3점]

- ① $4\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $8\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= 36 & |\vec{a}|^2 &= |\vec{b}|^2 \\ 4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} &= 81 & |\vec{a}| &= |\vec{b}| \\ \Rightarrow 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} &= 72 \\ \Rightarrow 6|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2 &= 9|\vec{a}|^2 = 153, \therefore |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = 17 \\ & \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \\ S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{289} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

28. 그림과 같이 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)을 초점으로 하는

타원 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 과 두 점 $G(0, d)$, $G'(0, -d)$ ($d > 1$)을

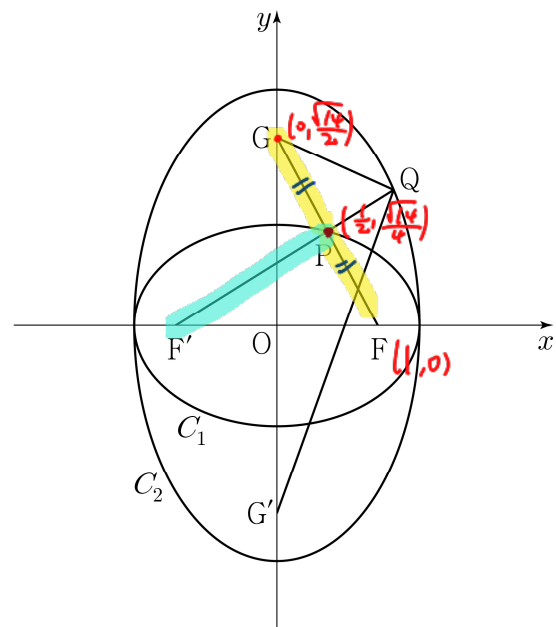
초점으로 하고 타원 C_1 의 두 꼭짓점을 지나는 타원 C_2 가 있다.

직선 FG가 타원 C_1 과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고,

직선 F'P가 타원 C_2 와 제1사분면에서 만나는 점을 Q라 하자.

$\overline{GP} = \overline{PF}$ 이고 $\overline{GP} + \overline{PF'} = 2\sqrt{2}$ 일 때, $\overline{QG} + \overline{QG'}$ 의 값은?

(단, a 는 양수이다.) [4점]



- ① $\sqrt{19}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{21}$ ④ $\sqrt{22}$ ⑤ $\sqrt{23}$

$$\overline{GP} + \overline{PF'} = \overline{PF} + \overline{PF'} = 2a = 2\sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{2}, c = 1, \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

$$F(1, 0), P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{4}}{4})$$

$$G(0, \frac{\sqrt{4}}{2}), d = \frac{\sqrt{4}}{2}, C_2: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$

$$k^2 - 2 = d^2 = \frac{2}{2}$$

$$k^2 = \frac{11}{2}, k = \frac{\sqrt{22}}{2}$$

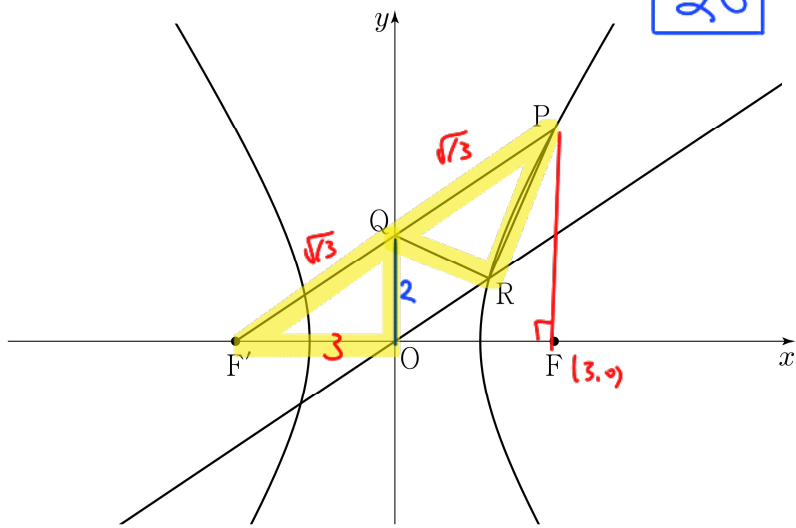
$$\therefore \overline{QG} + \overline{QG'} = 2k = \sqrt{22}$$

단답형

29. 그림과 같이 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)을 초점으로 하는 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P 에 대하여 선분 $F'P$ 가 y 축과 만나는 점을 Q 라 하고, 원점 O 를 지나고 선분 $F'P$ 와 평행한 직선이 이 쌍곡선과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 R 이라 하자.

$\overline{F'Q} = \overline{QP}$, $\overline{OQ} = 2$ 이고 삼각형 PQR 의 넓이가 3일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는 $p + q\sqrt{13}$ 이다.

$p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]

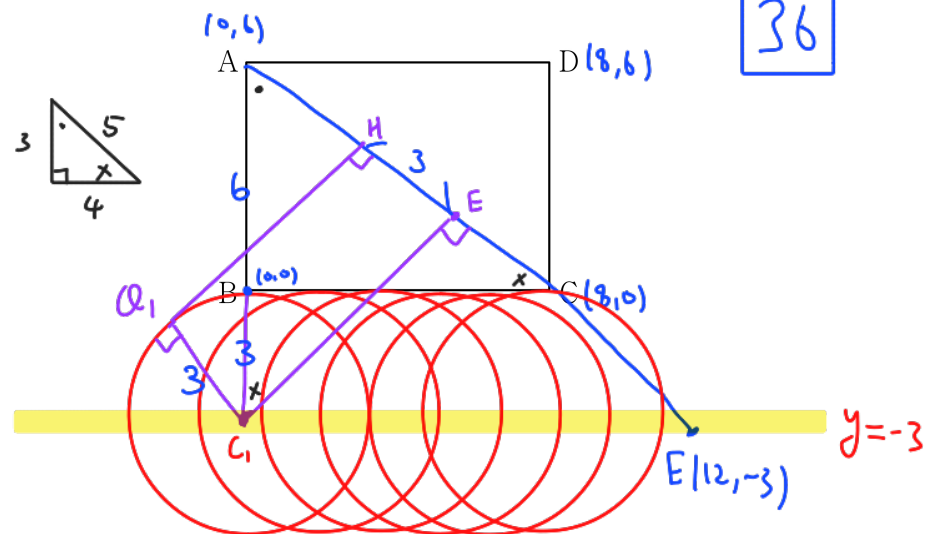


$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \triangle QF'O = 3, \therefore \overline{OF'} = 3, \overline{QF'} = \sqrt{13} = \overline{QP} \\ \triangle F'OQ &\sim \triangle F'FP \therefore \angle F'FP = 90^\circ \\ \overline{FF'} &= 4 \therefore \overline{PF'} - \overline{PF} = 2\sqrt{13} - 4 \\ p &= -4, q = 2, p^2 + q^2 = 20 \end{aligned}$$

30. 좌표평면에 $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 8$ 인 직사각형 $ABCD$ 와 $2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$ 를 만족시키는 점 E 가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P 에 대하여 점 Q 가

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]



$$\begin{aligned} \overrightarrow{BE} &= \frac{3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}}{3-1} \quad AC \text{ 3:1 이분} \\ &E(12, -3) \end{aligned}$$

$$P(a, 0), Q(x, y) \quad \overrightarrow{PQ} = (x-a, y), \overrightarrow{AB} = (0, -6)$$

$$(x-a, y) \cdot (x-a, y+6) = 0$$

$$(x-a)^2 + (y+3)^2 = 9 \quad 0 \leq a \leq 8$$

$$\overline{AE} = 9 \times \frac{3}{5} = \frac{27}{5} \therefore \overline{AH} = \frac{27}{5} - 3 = \frac{12}{5}$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ} \geq |\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{AH}| = 15 \times \frac{12}{5} = 36$$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.