문제	해설

14. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $0 < a_1 < a_5 < 2\pi$이고 두 집합

$$A = \{\sin a_n \mid n = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5\},$$

$$B = \{\cos a_n \mid n = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5\}$$

는 $n(A) = n(B) = 4$, $A \cap B = \varnothing$을 만족시킨다.
$\sin a_3 + \sin a_5 > 0$일 때, 부등식 $\cos a_n \geq \sin a_4$를 만족시키는 15 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은? [4점]

1.

[정답] 39

[내용 영역] 삼각함수의 정의, 삼각함수의 방정식/부등식에의 활용

[행동 영역] 추론

$n(B) = 4$이므로 어느 두 자연수 i, $j\,(1 \leq i < j \leq 5)$에 대하여 $\cos a_i = \cos a_j$이다. 그런데 $0 < a_i < a_j < 2\pi$이므로 $a_i + a_j = 2\pi$일 수밖에 없다. 또한, 만약 $j \geq i+3$이면 $\cos a_{i+1} = \cos a_{j-1}$도 성립하므로 $n(B) \leq 3$이 되어 $n(B) = 4$와 모순이다.
따라서 $j = i+1$이거나 $j = i+2$이다.

(i) $j = i+2$인 경우

$a_i = \pi - d$, $a_{i+1} = \pi$, $a_{i+2} = \pi + d$라 하자.

$i = 2$이면 $n(B) \leq 3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$i = 1$이면 $n(B) = 4$는 만족시킬 수 있지만 $\pi < a_3 < a_5 < 2\pi$이므로 $\sin a_3 + \sin a_5 > 0$를 만족시키지 못한다.

$i = 3$이면 $n(B) = 4$는 만족시킬 수 있지만 $\sin a_3 + \sin a_5 = 0$이다.

(ii) $j = i+1$인 경우

$a_i = \pi - d$, $a_j = \pi + d$라 하자.

$i = 2$이면 $\cos a_1 = \cos a_4$, $\cos a_2 = \cos a_3$이므로 $n(B) = 4$와 모순이다.

$i = 3$이어도 마찬가지로 $n(B) = 4$와 모순이다.

$i = 1$이면 $n(B) = 4$는 만족시킬 수 있지만 $\pi < a_3 < a_5 < 2\pi$이므로 $\sin a_3 + \sin a_5 > 0$를 만족시키지 못한다.

$i = 4$이면

$a_1 = \pi - 7d$, $a_2 = \pi - 5d$, $a_3 = \pi - 3d$, $a_4 = \pi - d$, $a_5 = \pi + d$

이므로 $\sin a_3 + \sin a_5 > 0$를 만족시킬 수 있다.

$n(A) = 4$이므로 $\sin a_1 = \sin a_2$이거나 $\sin a_1 = \sin a_3$이다.

$\sin a_1 = \sin a_2$이면 $\pi - 6d = \dfrac{\pi}{2}$에서 $d = \dfrac{\pi}{12}$이다. 그러나

$$A = \left\{\sin\frac{7\pi}{12},\, \sin\frac{9\pi}{12},\, \sin\frac{11\pi}{12},\, \sin\frac{13\pi}{12}\right\},$$

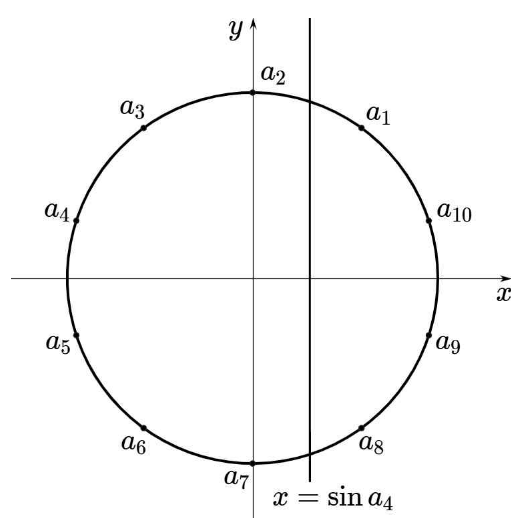
$$B = \left\{\cos\frac{5\pi}{12},\, \cos\frac{7\pi}{12},\, \cos\frac{9\pi}{12},\, \cos\frac{11\pi}{12}\right\}$$

에서 $\sin\dfrac{11\pi}{12} = \cos\dfrac{5\pi}{12}$이므로 $A \cap B = \varnothing$와 모순이다.

$\sin a_1 = \sin a_3$이면 $a_2 = \dfrac{\pi}{2}$에서 $d = \dfrac{\pi}{10}$이다. 그리고

$$A = \left\{\sin\frac{5\pi}{10},\, \sin\frac{7\pi}{10},\, \sin\frac{9\pi}{10},\, \sin\frac{11\pi}{10}\right\},$$

$B = \left\{\cos\dfrac{3\pi}{10},\, \cos\dfrac{5\pi}{10},\, \cos\dfrac{7\pi}{10},\, \cos\dfrac{9\pi}{10}\right\}$에서 $A \cap B = \varnothing$이다.



(i), (ii)에 의해 $a_n = \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{10}(n-1)$ 이다.

$\sin a_4 = \sin \frac{9\pi}{10} = \cos \frac{4\pi}{10}$ 이므로 $\cos a_n \geq \sin a_4$ 를 만족시키는 15 이하의 모든 자연수 n 은 1, 8, 9, 10, 11 이고, 이들의 합은 39 이다.