기초논술(미적편)

orbi 컴싸한자루로수능보기(fr0mhell)

#주의! 약식으로 해설했으니 실전에서 이런식으로 적으면 안됨!

1. (2022 한양대 변형)

   $f(x)$는 $[0, a+b]$ 구간에서 감소하므로 구간 $[0, b]$에서 $f(x+a) < f(x)$이다.

   정적분에 성질에 의하여

   $\int_0^b f(x+a)\ dx < \int_0^b f(x)\ dx$ 이고
   $\int_a^{b+a} f(x)\ dx = \int_0^b f(x+a)\ dx$ 이므로,
   $\int_0^{b+a} f(x)\ dx < \int_0^b f(x)\ dx + \int_0^a f(x)\ dx$ 가 성립한다.

2. $\frac{\tan(nx)}{\tan(x)} = \frac{\sin(nx)\cos(x)}{\sin(x)\cos(nx)}$ 이므로, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} = n$ 을 수학적 귀납법으로 보인다. $n = 1, \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{sin(x)} = 1$ 이므로 $n = k, \lim_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{sin(x)} = k$ 라면,

   $n = k+1, \lim_{x\to 0} \frac{\sin(kx+x)}{sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(nx)\sin(x)+sin(nx)cos(x)}{sin(x)} = 1+k$

   $\therefore$모든 자연수 n 에 대해 성립한다.

3. 귀류법을 사용하자. $\log_5(2) = \frac{p}{q}$ (단,p, q는 서로소인 자연수) 이면 $2^q = 5^p$ 이다. 그러나 2^q 는 짝수, 5^p 는 홀수이므로 모순이다. 그러므로 $\log_5(2)$ 는 무리수이다.

4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{3x-1} + e^{-x+3}}{e^{x-1} + e^{-x+1}}\ dx = \int_0^2 \frac{e^{4x} + e^4}{e^{2x} + e^2}\ dx$

$u(x) = e^{2x} + e^2$ 라고 하자,

$$\int_0^2 \frac{e^{3x-1} + e^{-x+3}}{e^{x-1} + e^{-x+1}}\ dx = \int_0^2 \frac{e^{4x} + e^4}{e^{2x} + e^2}\ dx = \int_0^2 u(x)dx - \int_0^2 e^2 \frac{u'(x)}{u(x)}dx$$
$$= \frac{e^4 - 1}{2}$$

5. (a) $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \iff \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(1)}{\frac{1}{x}} < 1$ by 평균값 정리

   $\frac{1}{c} < 1 \quad (1 < c < 1 + \frac{1}{x})$ 이므로 참

   $\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \iff \frac{1}{x+1} < \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{1}$ by 평균값 정리

   $\frac{1}{c} > \frac{1}{x+1} \quad (x < c < 1 + x)$ 이므로 참

   (b) (a)식을 e에 올리고 x 제곱하면 성립

   (c) $e^{\frac{x}{x+1} \times (x+1) \div x} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \times (x+1) \div x}$ 에 의하여 성립

   (d) $e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e$ 이므로 극한의 성질에 의해서

   $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{x+1}} \leq \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \lim_{x\to\infty} e$

   $\therefore \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$