2024年
第34回 日本数学オリンピック
本選問題

受験生への注意事項

試験開始の指示のあるまで, 問題は見ないこと.

分度器・電卓・パソコン・携帯電話, またノートや参考書等の使用は厳禁です.

携帯電話等の電源は切っておくこと.

問題は 5 問, 試験時間は 4 時間, 解答用紙は 5 枚 (各問題につき 1 枚) です.

配点は各問 8 点, 合計 40 点です.

証明が完結していない場合でも部分点を与えることがあります.

解答用紙の裏面を用いるときは「裏面につづく」と記入すること.

解答用紙の追加はできません.

5 枚の解答用紙の記入欄の各々(おのおの)に, 受験番号・氏名を記入すること.

解答用紙だけを回収します.

2024 年 2 月 11 日

(公財) 数学オリンピック財団

2024年日本数学オリンピック本選

(公財) 数学オリンピック財団

問　題[*1]

2024年2月11日 試験時間4時間5題

1. n を2以上の整数とする. n 個の実数の組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ であって, $a_1 - 2a_2$, $a_2 - 2a_3$, $\ldots$, $a_{n-1} - 2a_n$, $a_n - 2a_1$ が $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の並べ替えであるようなものをすべて求めよ.

ただし, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 自身も $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の並べ替えである.

2. 正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって, 任意の正の整数 m, n に対して

$$\mathrm{lcm}\bigl(m, f(m + f(n))\bigr) = \mathrm{lcm}\bigl(f(m), f(m) + n\bigr)$$

をみたすものをすべて求めよ.

ただし, 正の整数 x, y に対し, x と y の最小公倍数を $\mathrm{lcm}(x, y)$ で表す.

3. xy 平面において, x 座標と y 座標が1以上2000以下の整数である点を**良い点**とよぶ. また, 以下の条件をすべてみたす4点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ について, 折れ線 $ABCD$ を **Z型折れ線**とよぶ.

- A, B, C, D はすべて良い点である.
- $x_1 < x_2$, $y_1 = y_2$.
- $x_2 > x_3$, $y_2 - x_2 = y_3 - x_3$.
- $x_3 < x_4$, $y_3 = y_4$.

n 個のZ型折れ線 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ が以下の条件をみたすとき, 正の整数 n としてありうる最小の値を求めよ.

どの良い点 P についても, 1以上 n 以下の整数 i が存在して, P が Z_i 上にある.

ただし, 折れ線 $ABCD$ とは, 線分 AB, BC, CD (いずれも端点を含む) を合わせた図形のことである.

4. $AB < AC$ をみたす鋭角三角形 ABC があり, その外心を O, 三角形 ABC の外接円の A を含まない方の弧 BC の中点を M とする. 辺 AB の B 側の延長線上の点 D が $BD = BM$ をみたした. また, 辺 AC 上 (端点を除く) の点 E が $CE = CM$ をみたした. 三角形 ABE の外接円と三角形 ACD の外接円が A でない点 X で交わっているとき, 線分 DE の垂直二等分線は三角形 AOX の外接円に接することを示せ. ただし, UV で線分 UV の長さを表すものとする.

5. $a^2+b^2+c^2+d^2-4\sqrt{abcd}=7\cdot 2^{2n-1}$ をみたす正の整数の組 (a,b,c,d,n) は存在しないことを示せ.

以上