11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t \geq 0)$일 때 점 P의 위치 x가

$$x=t^3-t^2-t+1$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 1이다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이다.
ㄷ. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에 점 P의 가속도는 4이다.

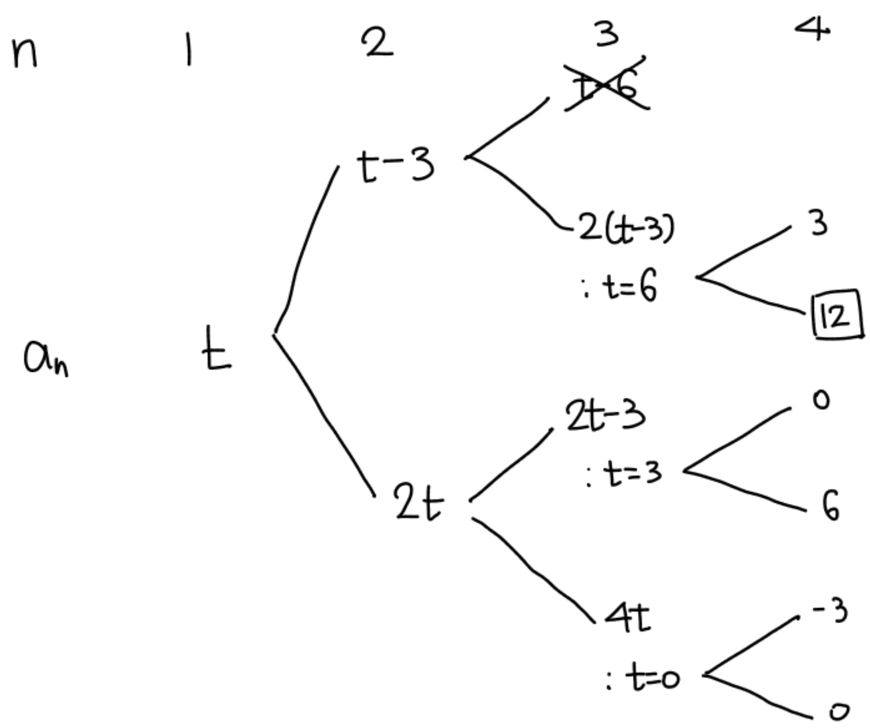
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

?

12. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4의 최댓값은? [4점]

(가) $a_1=a_3$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$(a_{n+1}-a_n+3)(a_{n+1}-2a_n)=0$$
이다.

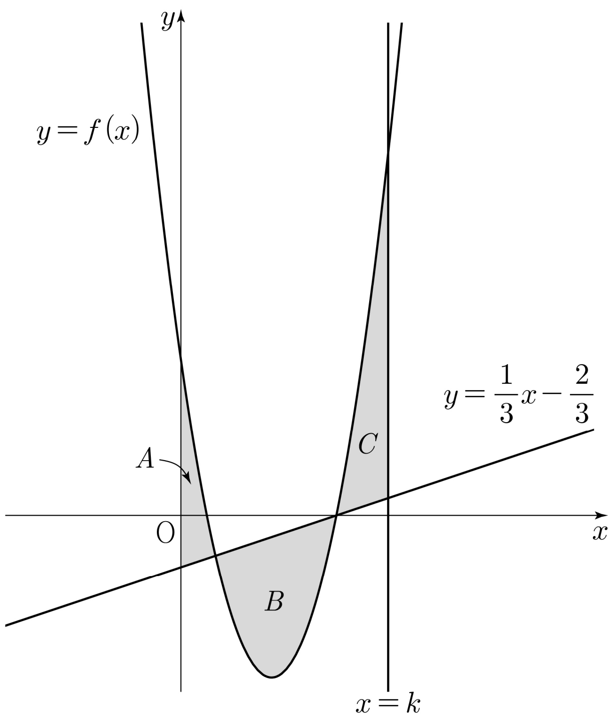
① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21



13. 그림과 같이 함수 $f(x)=3x^2-7x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ 및 y축으로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$로 둘러싸인 영역을 B, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$, $x=k\,(k>2)$로 둘러싸인 영역을 C라 하자.

$$(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$$

일 때, 상수 k의 값은? [4점]

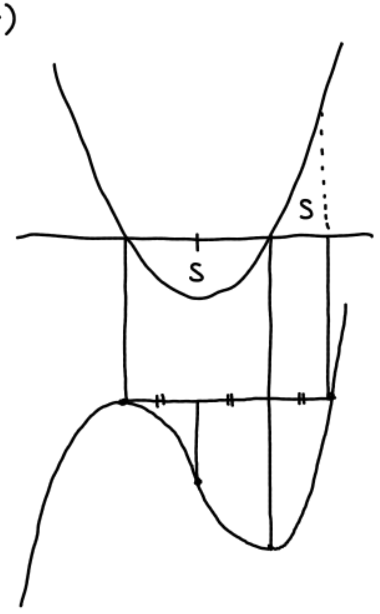


① $\frac{29}{12}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

$A-B+C=\int_0^k (3x^2-7x+2)-\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=0$

$: k=\frac{8}{3}$

+)

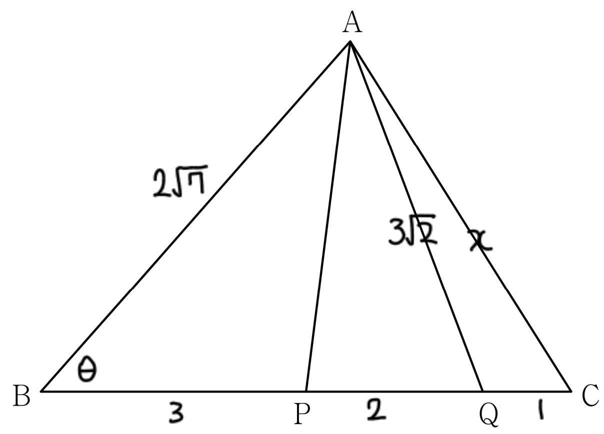


14. $\overline{AB}=2\sqrt{7}$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P, 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점을 Q라 하자.

$$\overline{AQ}=3\sqrt{2},\ \sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점]

① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$ ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



$\frac{25+18-28}{2\cdot5\cdot3\sqrt{2}}=-\frac{1+18-x^2}{2\cdot1\cdot3\sqrt{2}}$

$15=-95+5x^2$

$x=\sqrt{22}$

$\cos\theta=\frac{28+36-22}{2\cdot2\sqrt{7}\cdot6}=\frac{6\cdot7}{4\cdot6\cdot\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$2R=\frac{\sqrt{22}}{\frac{3}{4}}$ $\quad\pi R^2=\boxed{\frac{88}{9}\pi}$

조건 [등호 (결정 or 시작점) / 부등호 (배제)

15. 상수 k와 $\boxed{f'(0)=6}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 $\boxed{0\text{ 이하}}$이다.

(나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

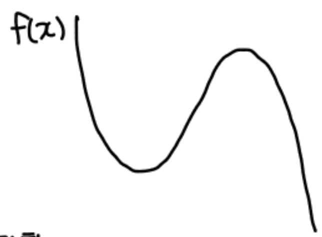
① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

(가)해석 :

1. 무한대적 사고 (숲을 보기)

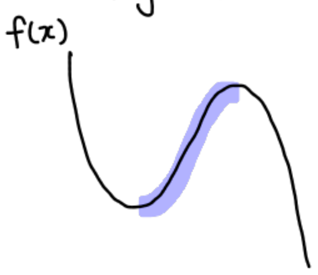
$\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ 는 $a>>1$ 에서도 0 이하 : f 최고차 음수

→ 개형 확정 (∵ $f'(0)>0$) f(x)

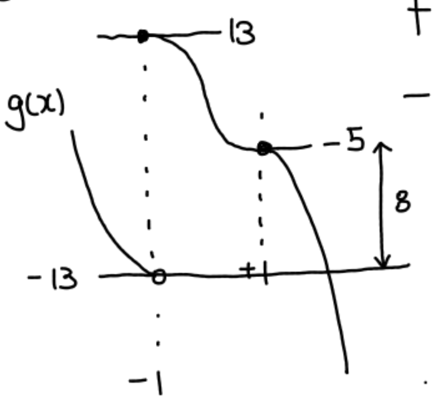


2. 조건 만족시키는 경우 관찰

→ g가 연속인 구간에서는 감소해야 되므로 $x=-1, 1$ 에서 $f'(x)=0$.



3. 개형 확정 및 계산



f 최고차항 $-2x^3$ (∵ $f'(0)=6$)

$\underset{5}{-f(1)} = \underset{-5}{f(1)} + \underset{10}{k}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -5 - 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{5}{2}$

$\therefore k+f\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{15}{4}}$

+) $f(1)=-5$ 알 수 있는 법

$|\Delta\text{극값}| = \frac{|\text{최고차항 계수}|}{2}\cdot|\text{극대}x-\text{극소}x|^3$ 쓰면 $f(1)-f(-1)=8$

or

거리곱 (사실 같은거지만)

단답형

16. 방정식 $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

21. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값과 $\lim_{x\to a}\dfrac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이
> 모두 존재한다.

$g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

일반적으로 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라고 한다.

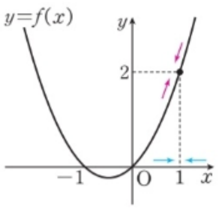
(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.
(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.
(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라고 한다. 즉, 위의 세 가지 조건 (i), (ii), (iii) 중에서 어느 한 가지라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

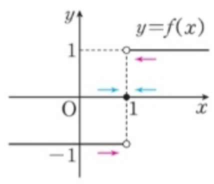
예제 1 다음 함수가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.

(1) $f(x)=x^2+x$ (2) $f(x)=\begin{cases}\boxed{\dfrac{|x-1|}{x-1}} & (x\neq1)\\ 0 & (x=1)\end{cases}$

풀이 (1) 함수 $f(x)$에 대하여
(i) $f(1)=2$
(ii) $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2+x)=2$
(iii) $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.



(2) 함수 $f(x)$에 대하여
(i) $f(1)=0$
(ii) $\lim_{x\to1+}\dfrac{|x-1|}{x-1}=1$, $\lim_{x\to1-}\dfrac{|x-1|}{x-1}=-1$
즉, $\lim_{x\to1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$이 존재하지 않는다.
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
→ $g(1)=g(2)=0$



답 (1) 연속 (2) 불연속

$g(x)=(x-1)(x-2)[(x-1)(x-2)+1]$
$g(-1)=\boxed{42}$

22. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자.
삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $\boxed{k+\log_2 k}=\dfrac{q}{p}$이다. → 관계식으로 나올 것이다
$p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] (k 못 구한다)
: 25수능20

$A(\underbrace{\log_2k-1}_{=m},\ k)$ $m=\log_2k-1$
$B(\log_2k-1+l,\ k-l)$ $2^m=\frac{k}{2}$

$16=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & m & m+l & 0\\ 0 & k & k-l & 0\end{vmatrix}$

$32=|mk-ml-mk-kl|$
$=l(m+k)\cdots①$
$2^{m+l-2}-3=k-l$
$\frac{k}{8}\cdot2^l-3=k-l$: $l=3\cdots②$

② → ① : $\frac{32}{3}=\log_2k-1+k$

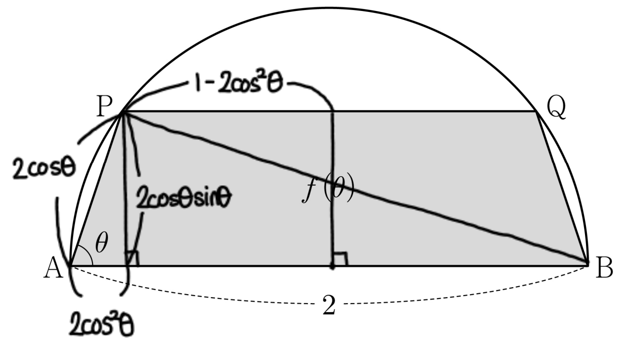
$\therefore\ k+\log_2k=\frac{35}{3}$, $\boxed{38}$

② 보충 : $k\cdot2^{l-3}+l=k+3$
$y=k\cdot2^{x-3}+x$: 증가함수 이므로 $l=3$ 확정 가능

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

☆ 직선은 변곡점(이계도함수 값)에 영향을 주지 않는다

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{BAP} = \theta \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 1:3$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a)$의 값은? [3점]



① $-\frac{64}{25}$ ② $-\frac{59}{25}$ ③ $-\frac{54}{25}$ ④ $-\frac{49}{25}$ ⑤ $-\frac{44}{25}$

$f(\theta) = 2 \times \left[\frac{1}{2} \times (1+1-2\cos^2\theta) \times 2\cos\theta\sin\theta\right]$

$= 4sc - 4sc^3$

$f'(\theta) = 4c^2 - 4s^2 - 4c^4 + 12s^2c^2$

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2c : 2s = 1:3$

$2c = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad 2s = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$s^2 = \frac{9}{10}, \quad c^2 = \frac{1}{10}$

$f'(a) = 4\left(\frac{1}{10} - \frac{9}{10} - \frac{1}{100} + \frac{27}{100}\right)$

$= 4\left(-\frac{8}{10} + \frac{26}{100}\right)$

$= 4 \times \left(-\frac{54}{100}\right)$

$= \boxed{-\frac{54}{25}}$

● **함수의 그래프**

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음을 고려하여 그린다.

❶ 함수의 정의역과 치역 ❷ 대칭성과 주기
❸ 좌표축과의 교점 ❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점 ❻ 점근선

28번, 30번 둘 다 그래프 ↔ 식 이해 연습 잘 되있으면 극악의 난이도까지는 X.

애초에 미적분은 해야 될 행동이 뻔함.

28. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$$\left(f(x)\right)^5 + \left(f(x)\right)^3 + ax + b = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$$
이다. ; $x = -\frac{1}{2}$ 선대칭

(나) $f(-3)f(3) < 0$, $\boxed{f'(2) > 0}$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

1. $f(-3)f(3) < 0$ 이고 $f(x)$ 연속 : by 사잇값 정리, $(-3, 3)$ 에 $f(x)=0$ 의 실근 존재 + 거기서 부호 바뀜.

2. 좌변 변곡점일 때 우변 변곡점

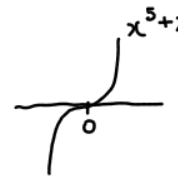
$y' = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$

$y'' = \frac{2(x^2+x+\frac{5}{2}) - (2x+1)^2}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}$

$= \frac{-2(x-1)(x+2)}{(\quad)^2}$

$(x^5+x^3) \circ f(x)$

x^5+x^3



$\Rightarrow f(1)=0$ or $f(-2)=0$

3. a, b 값 결정

$(5f(x)^4 + 3f(x)^2)f'(x) + a = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$ …①

$x=2)$ 양수 $\times \underbrace{f'(2)}_{\text{양수}} + a = \frac{10}{17}$

$\therefore a < \frac{10}{17}$

i) $f(1)=0$

①에 $x=1$ 대입: $a = \frac{2}{3} > \frac{10}{17}$ (×)

ii) $f(-2)=0$

①에 $x=-2$ 대입: $a = -\frac{2}{3} < \frac{10}{17}$ (○)

(가) 식 미분하면 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 점대칭이므로 $x=1$ 에서와 부호 반대

(가) 식에 $x=-2$ 대입: $-2a+b = \ln\frac{9}{2}$

$\therefore b = -\frac{4}{3} + \ln\frac{9}{2}$

$\therefore a \times e^b = -\frac{2}{3}e^{-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}}$

$= \boxed{-3e^{-\frac{4}{3}}}$

단답형

29. 두 정수 α, $\beta\ (\alpha>\beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_n = \alpha\times\sin\frac{n}{2}\pi + \beta\times\cos\frac{n}{2}\pi$$
> 이고, $a_1\times a_2\times a_3\times a_4 = 4$이다.

수열 $\{a_n\}$과 $b_1>0$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}\,b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}\,b_{2n}) = 6$$

일 때, $b_1\times b_3 = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

3. 계수 결정

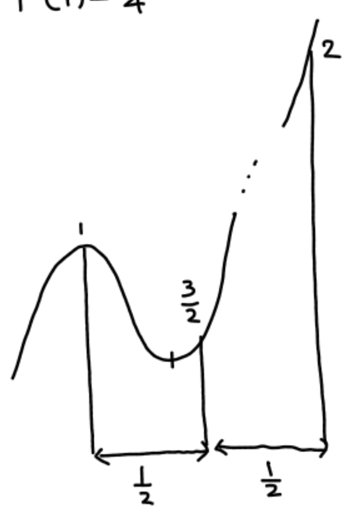
$$\left|g'(x)\right| = \left|\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

$$\left|g'(-\ln 3)\right| = \left|\frac{3}{8}f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{3}{8}f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$f(x) = (x-\frac{1}{2})^3 + A(x-\frac{1}{2})^2 + B(x-\frac{1}{2}) - B$

$f'(x) = 3(x-\frac{1}{2})^2 + 2A(x-\frac{1}{2}) + B$

$f'(1) = \frac{3}{4} + A + B = 0$ ⋯ ①



∴ $f(1) < f(2)$ (∵ 삼차함수 비율관계)

→ $f(2) \le 0$ 이면 개형 만족

$f(2) = \frac{27}{8} + \frac{9}{4}A + \frac{3}{2}B - B \le 0$ ⋯ ②

$f(1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B - B$

$-f(1) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B \ge \frac{11}{14}$ (계산 생략)

∴ $\boxed{25}$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right| \ge 0$$

$|\ \ | = 0$ 일 때 미계 $= 0$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

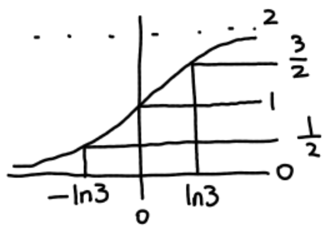
> (가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $\boxed{g(0)>0}$이다. (by f의 극값)
>
> (나) $\boxed{g'(\ln 3)<0}$, $|g'(-\ln 3)| = \left|\frac{3}{8}g(-\ln 3)\right|$

$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. 속함수 관찰

$y = \frac{2}{1+e^{-x}}$:

$y' = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

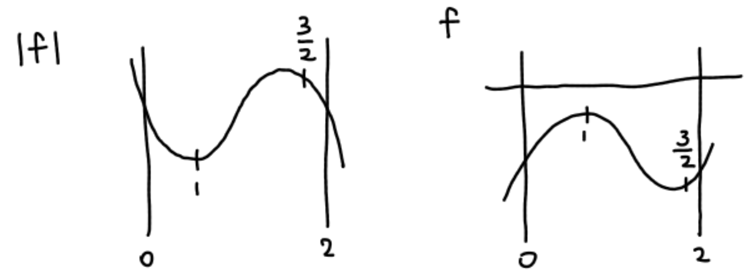


속함수 증가 : g개형이 곧 |f| 개형

2. f 개형 확정

$g'(\ln 3) < 0$: $|f|$가 $x = \frac{3}{2}$ 감소

$x = 0$ 극소 : $|f|$가 $x = 1$ 극소 & $f(1) \ne 0$



∴ $g(0) = -f(1)$ 의 최소 구하면 ok.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.